Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 4

Aufgabe 13 Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{u} = f(u,t), u(t_0) = u_0$, wobei $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in der ersten Komponente Lipschitz stetig sei. Wir nehmen an, dass eine Unterlösung v und eine Oberlösung w dieses Anfangswertproblems gibt, welche auf $[t_0, \infty)$ definiert sind. Man zeige, dass die Lösung $u(t, t_0, u_0)$ für alle $t \in [t_0, \infty)$ existiert.

Aufgabe 14 Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = f(t,y)$, $y(0) = 0$ für

$$f(t,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4t^3 y}{t^4+y^2} & \text{falls } (t,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (t,y) = (0,0) \end{array} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ stetig ist, aber in keinem Gebiet, welches $(0,0)$ enthält, eine Lipschitzbedingung erfüllt.
Hinweis: Betrachten Sie bei festem t die Differenz von $f(t,y)$ und $f(t,\tilde{y})$ mit $y = t^2$ und $\tilde{y} = 2t^2$.

(b) Zeigen Sie, daß für jedes $c \geq 0$ die Funktion

$$y : t \mapsto c - \sqrt{t^4 + c^2}$$

das Anfangswertproblem löst.

Aufgabe 15 Für das mathematische Pendel $\ddot{u} + \sin(u) = 0$ wird $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto y^2 - \cos x$ durch

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}(\dot{u}(t))^2 - \cos u(t)$$

zum Funktional auf den Lösungen der Differentialgleichung. Man zeige, dass E . längs Lösungen konstant ist. Wie sehen die Niveaulinien von E aus? Man interpretiere die erhaltenen Lösungen und zeige, dass längs der durch das Eulersche Polygonzugverfahren definierten Näherungslösung E streng monoton wächst und bestimme numerisch das Wachstumsverhalten bei gegebener Schrittweite in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 16 Betrachten Sie das gedämpfte mathematische Pendel

$$\ddot{u} + \sin(u) + c\dot{u} = 0$$

mit $c > 0$. (Wir nehmen an, dass die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit ist.) Zeigen Sie, dass

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}(\dot{u}(t))^2 - \cos(u(t))$$

längs Lösungen streng monoton abnimmt. Schreiben Sie ein `matlab`-Programm (oder ein Programm in einer anderen höheren Programmiersprache) zur numerischen Untersuchung der Gleichung für $c = 1$ und stellen Sie insbesondere E als Funktion von t für verschiedene Anfangswerte graphisch dar.

Abgabe: 5.5.2005