

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 3

Aufgabe 9 Sei $\Gamma = \left\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid 1 + \frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 2 \right\}$. Man überzeuge sich zunächst davon, dass (1) (Γ, d) , wobei d die übliche Metrik auf $C([0, 1], \mathbb{R})$ sei, ein vollständiger metrischer Raum ist, und (2) für $f \in \Gamma$ gilt $\int_0^1 f(x) dx \neq 0$. Definiere für $f \in \Gamma$ den Operator $\mathfrak{T}$ durch

$$\mathfrak{T}(f)(x) = 1 + \frac{\int_0^x f(s) ds}{\int_0^1 f(s) ds}.$$

Man zeige (a) $\mathfrak{T}(\Gamma) \subset \Gamma$ und (b) $\mathfrak{T} : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ist eine starke Kontraktion. Welches Element aus Γ ist der eindeutige Fixpunkt?

Aufgabe 10 Man betrachte die Gleichung

$$\dot{x} = \text{sign}(x) \sqrt{|x|}.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems $x(t_0) = x_0$? Man zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = 0$ nicht eindeutig bestimmt ist. Wie sieht dies bei anderen Anfangswerten aus?

Aufgabe 11 Man betrachte die Gleichung

$$\dot{x} = x^2.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems $x(t_0) = x_0$? Man zeige, dass das maximale Existenzintervall nicht für alle Anfangswerte gleich $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 12 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u' = 2t(u + 1), \quad u(0) = 0.$$

- (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem.
- (b) Im Beweis des lokalen Existenzsatzes von Picard und Lindelöf wurde unter den dort gemachten Voraussetzungen der Operator

$$T : C(I_\delta, U) \rightarrow C(I_\delta, U) : u \mapsto u_0 + \int_{t_0}^{\cdot} f(u(s), s) ds$$

betrachtet und gezeigt, dass T eine starke Kontraktion ist. Daher folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_{n+1} = Tu_n$ mit gegebenem $u_0 \in C(I_\delta, W)$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems $u' = f(t, u)$, $u(0) = 0$ konvergiert.

Berechnen Sie für $f(t, u) = 2t(u + 1)$, $u_0 \equiv 0$ und geeignete Wahl der Konstanten die Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und vergleichen Sie diese mit der in (a) gewonnenen Lösung.

Abgabe: 29.4.2005