Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 2

Aufgabe 5 Man überlege sich, ob ein Zerfallsgesetz $u(t)$, welches für ein $T > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ der Beziehung $u(t+T) = \frac{1}{2}u(t)$ genügt, auch eine Gleichung der Form $u'(t) = -\alpha u(t)$ erfüllt.

Aufgabe 6 Man überprüfe die folgenden Gleichungen auf Exaktheit, bestimme für die nicht exakten Gleichungen einen integrierenden Faktor und bestimme die Lösungen. Man beachte, daß die Gleichungen nicht überall Sinn machen. In diesen Fällen betrachte man eine äquivalente Differentialgleichung für die Funktion $x = x(y)$. Gibt es eine symmetrische Schreibweise?

(a) $yy' = x$

(b) $xy' = y$

(c) $x - y + (-x+1)y' = 0$

(d) $4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$

(e) $xy^2 + y - xy' = 0$

Aufgabe 7 (a) Es sei X ein Banachraum. Man zeige, dass die Menge $C([0,1],X)$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit Werten in X, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C([0,1],X)} = \sup_{x\in[0,1]} \|u(x)\|_X,$$

ein Banachraum ist.
(b) Wir betrachten die Abbildung

$$T : C([0,1],\mathbb{R}^n) \to C([0,1],\mathbb{R}^n) : u \mapsto \int_0^1 f(.,y)u(y)dy,$$

wobei f eine auf $[0,1]\times[0,1]$ stetige, reellwertige Funktion ist. Man zeige, T ist stetig und linear. Ist T eine Kontraktion?

Aufgabe 8 Man schreibe ein `matlab`-Programm, das für eine gegebene rechte Seite $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ für die Differentialgleichung $u' = f(u,t)$ mit Anfangswert $u(t_0) = u_0$ Näherungslösungen nach dem Eulerschen Polygonzugverfahren berechnet. Man verwende das Programm, um Näherungslösungen für

(a) die logistische Gleichung

(b) den harmonischen Oszillator

zu berechnen und graphisch auszugeben. Untersuchen Sie das Verhalten für verschiedene Anfangswerte.

Abgabe: 22.4.2005