

## Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

### Blatt 12

**Aufgabe 45** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(U, U)$ . Wir definieren  $f^n(x)$  durch die Rekursion  $f^1(x) = x$  und  $f^{(n+1)}(x) = f(f^n(x))$ . Zeigen Sie ausführlich: ist  $f(x_0) = x_0$  ein Fixpunkt und gilt  $\sigma(Df(x_0)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ,

(a) so gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $|x - x_0| < \delta$  impliziert, dass  $|f^n(x) - x_0| < \varepsilon$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) so gibt es ein  $\rho > 0$ , so dass  $|x - x_0| < \rho$  impliziert,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ .

**Aufgabe 46** Wir betrachten das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy.\end{aligned}$$

Begründen Sie zunächst warum dies ein Modell für zwei Spezies ist, von denen eine sich von der anderen ernährt. Untersuchen Sie dieses System auf Ruhelagen und auf periodisches Verhalten.

Wie verändert ein Eingreifen von außen auf die Beutespezies das Verhalten. Begründen Sie damit, dass das Spritzen von Insektiziden das bekämpfte Insekt auf lange Sicht begünstigt und damit ökologisch unsinnig ist.

**Aufgabe 47** Für  $m = 2, 3$  betrachte man jeweils die Vektorfelder auf  $\mathbb{C}$  definiert durch

$$\dot{z} = z^j \bar{z}^{m-j}, \quad j = 0, \dots, m$$

und skizziere die jeweiligen Flüsse auf einer Umgebung von 0.

Zählen Sie wie oft sich das Vektorfeld dreht, während man die 0 auf einer geschlossenen Kurve umläuft.

**Aufgabe 48** Es sei für  $n \in \mathbb{N}$  die Zahl  $a_n$  die erste Ziffer von  $2^n$  (im Dezimalsystem). Für  $j = 0, \dots, 9$  sei  $b_n(j)$  die Anzahl der  $k \leq n$  mit  $a_k = j$ . Die Häufigkeit des Auftretens von  $j$  als erster Ziffer definieren wir als

$$r(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(j)}{n}.$$

Zeigen Sie  $r(7) > r(8)$ . (Hinweis: betrachten Sie die Folge

$$x_{n+1} = x_n + b \bmod 1$$

für geeignetes  $b \in \mathbb{R}$  und benutzen, Sie, dass für diese Folge und eine meßbare Menge  $S \subset [0, 1]$  und für irrationales  $b$  gilt  $\mu(S)$  ist Besuchshäufigkeit der Folge  $x_n$  in  $S$ .)

**Abgabe: 8.7.2005**