

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 11

Aufgabe 41 (a) Beweisen Sie, dass für eine reelle Matrix C mit $\det C \neq 0$ gilt: es gibt eine reelle Matrix B mit $E(B, 1) = C^2$.

(b) Führen Sie aus, dass es für T -periodisches $A(t)$ immer eine $2T$ -periodische reelle Matrix und eine reelle konstante Matrix gibt mit

$$\Psi(t) = P(t)E(B, t).$$

Aufgabe 42 Wir betrachten die Abbildung

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : t \mapsto \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte (als Funktionen von t) und zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte $\lambda_{1,2}(t)$ in der linken Halbebene liegen.

(b) Weisen Sie nach, dass

$$u(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \exp\left(\frac{t}{2}\right)$$

eine für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkte Lösung der Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ ist.

Aufgabe 43 Betrachten Sie die Gleichung aus der vorigen Aufgabe und zeigen Sie, dass

(a) e^π ein Floquet-Multiplikator ist.

(b) der zweite Floquet Multiplikator $e^{-2\pi}$ ist.

Aufgabe 44 Man gebe im Raum $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ jede der folgenden Mengen explizit an, zeige, dass es jeweils eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist und bestimme die jeweilige Kodimension:

(a) $\left\{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid A \text{ hat einfachen Eigenwert } 0 \right\}$

(b) $\left\{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid A \text{ hat ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte} \right\}$

(c) $\left\{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid A \text{ hat die Jordanform } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid A \text{ hat die Jordanform } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Hinweis: Satz über implizite Funktionen

Abgabe: 1.7.2005