Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 10

Aufgabe 37 Prüfen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen Gradientensysteme sind.

(a) $\dot{x} = x$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{|x|}}x,\ x \in \mathbb{R}^n$.

(c) $\ddot{x} + \sin x = 0$ (mathematisches Pendel).

Aufgabe 38 Bestimmen Sie Näherungslösungen für das *Lorenz–System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= x(28 - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \frac{8z}{3} \end{aligned}$$

mittels des in MATLAB implementierten *Runge-Kutta–* sowie des *Eulerschen Polygonzugverfahrens* für gleiche Startwerte und geben Sie diese Lösungen graphisch aus.

Aufgabe 39 Untersuchen Soe ob folgende Differentialgleichungen (bzw. deren Rückführungen auf Systeme erster Ordnung) Hamiltonsch sind:

(a) Räuber-Beute-Modell:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha - \beta y)x \\ \dot{y} &= (-\gamma + \delta x)y \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

(b) Das mathematische Pendel $\ddot{x} + \sin x + c\dot{x} =$ ohne Dämpfung ($c = 0$) oder mit Dämpfung ($c > 0$).

(c) Das n-Körperproblem $\ddot{x} = -\nabla V(x)$ mit $x : \mathbb{R} \to R^{3n}$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{R}^+$ und

$$\begin{aligned} V &= \left\{ x^{(1)}, \ldots x^{(n)} \in (\mathbb{R}^3)^n \;\middle|\; x^{(i)} \neq x^{(j)} \text{ für } i \neq j \right\} \to \mathbb{R} \\ & (x^{(1)}, \ldots x^{(n)}) \mapsto \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|x^{(i)} - x^{(j)}\|}. \end{aligned}$$

Aufgabe 40 Untersuchen Sie sämtliche Ruhelagen des Räuber-Beute Modells

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha - \beta y - \lambda x)x \\ \dot{y} &= (-\gamma + \delta x - \mu y)y \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu > 0$)auf Stabilität und Attraktivität. Benutzen Sie die gewonnen Erkenntnisse, um im ersten Quadranten dür signifikante Parameterwerte qualitative Phasenportaits zu skizzieren.

Abgabe: 24.6.2005