Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 1

Aufgabe 1 Man verifiziere die Aussagen über die logistische Gleichung $p' = \beta p - Sp^2$:

(a) Für $p_0 \in (0, K),\ K = \beta/S$ existiert die Lösung für alle Zeiten und strebt für $t \to \infty$ gegen K, für $t \to -\infty$ gegen null.

(b) Für $p_0 > K$ existiert die Lösung nicht für alle reellen Zeiten. Man diskutiere das Verhalten.

(c) Man untersuche das Verhalten der Lösungen für $p_0 < 0$!

Aufgabe 2 Man löse die Gleichungen

(i) $u' = u^2 + 1$ (ii) $u' = -\dfrac{x^2}{u^3}$ (iii) $u' = e^u \sin(x)$

mit der Methode der *Trennung der Veränderlichen* und diskutiere das Verhalten der Lösungen $u(0) = p_0,\ p_0 \in \mathbb{R}$, d.h. man beantworte die folgenden Fragen.

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung?

(b) Wie verhält sich die Lösung für $t \to t_+,\ t \to t_-$, wenn (t_-, t_+) das (maximale) Intervall bezeichnen, auf dem die Lösung $u(t)$ existiert?

Aufgabe 3 Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $\exp(At)$ bezeichnen wir die Reihe

$$\exp(At) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} A^\nu.$$

Man berechne jeweils einen expliziten Ausdruck für A^ν und für $\exp(At)$. Man zeige:

(a) $A \exp(At) = \exp(At) A$.

(b) $\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At)$.

(c) $\exp(-At) \exp(At) = \mathbb{1}$.

Aufgabe 4

Man begründe, daß jede Lösung der Gleichung $u' = u$ die Form Ce^x mit einer reellen Konstante C hat.

Man gebe ein entsprechendes Argument für die Gleichung $u'' + u = 0$ mit der zweiparametrigen Schar von Lösungen $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ an.

Abgabe: 15.4.2005