

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 1

Aufgabe 1 Man verifiziere die Aussagen über die logistische Gleichung $p' = \beta p - Sp^2$:

- (a) Für $p_0 \in (0, K)$, $K = \beta/S$ existiert die Lösung für alle Zeiten und strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen K , für $t \rightarrow -\infty$ gegen null.
- (b) Für $p_0 > K$ existiert die Lösung nicht für alle reellen Zeiten. Man diskutiere das Verhalten.
- (c) Man untersuche das Verhalten der Lösungen für $p_0 < 0$!

Aufgabe 2 Man löse die Gleichungen

$$(i) \quad u' = u^2 + 1 \qquad (ii) \quad u' = -\frac{x^2}{u^3} \qquad (iii) \quad u' = e^u \sin(x)$$

mit der Methode der *Trennung der Veränderlichen* und diskutiere das Verhalten der Lösungen $u(0) = p_0$, $p_0 \in \mathbb{R}$, d.h. man beantworte die folgenden Fragen.

- (a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung?
- (b) Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow t_+$, $t \rightarrow t_-$, wenn (t_-, t_+) das (maximale) Intervall bezeichnen, auf dem die Lösung $u(t)$ existiert?

Aufgabe 3 Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $\exp(At)$ bezeichnen wir die Reihe

$$\exp(At) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} A^\nu.$$

Man berechne jeweils einen expliziten Ausdruck für A^ν und für $\exp(At)$. Man zeige:

- (a) $A \exp(At) = \exp(At)A$.
- (b) $\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At)$.
- (c) $\exp(-At) \exp(At) = \mathbb{1}$.

Aufgabe 4

Man begründe, daß jede Lösung der Gleichung $u' = u$ die Form Ce^x mit einer reellen Konstante C hat.

Man gebe ein entsprechendes Argument für die Gleichung $u'' + u = 0$ mit der zweiparametrischen Schar von Lösungen $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ an.

Abgabe: 15.4.2005