Bemerkung zur Differentialrechnung

Reiner Lauterbach

SS02
Ergänzung zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Lineare und multilineare Abbildungen

1.1 Banachräume

Wir beschreiben zunächst die Voraussetzungen für die weiteren Überlegungen. Dabei ist uns wichtig, einen Raum zu betrachten, der gleichzeitig linearer Raum und vollständiger metrischer Raum ist, da dies für die Differentialrechnung die wesentlichen Zutaten sind.

Definition 1.1.1 *Es sei V ein linearer Raum über dem Grundkörper $\mathbb{R}$,*

$$\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}$$

sei eine Abbildung mit den Eigenschaften

(N1) $\|v\|_V = 0$ *genau dann wenn* $v = 0$*;*

(N2) $\|\lambda v\|_V = |\lambda|\|v\|_V$ *für* $v \in V$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(N3) $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$ *für alle* $v, w \in V$.

Dann heißt $\|\cdot\|_V$ *eine* Norm *auf* V.

Das Paar $(V, \|\cdot\|_V)$ *wird als normierter, linearer Raum bezeichnet.*

Durch

$$d_V(v, w) = \|v - w\|_V$$

wird eine Metrik auf V *erklärt.*

Ist der metrische Raum (V, d_V) *vollständig, so nennen wir das Paar* $(V, \|\cdot\|_V)$ *einen Banachraum.*

Definition 1.1.2 *Eine Teilmenge* U *eines Banachraumes (oder auch eines normierten Raumes) heißt* beschränkt, *wenn es ein* $R > 0$ *gibt, so daß* $U \subset B_R(0)$ *ist.*

Bemerkung 1.1.3 Beschränktheit ist ein Konzept, das in metrischen Räumen kaum sinnvoll ist, man benötigt, die Struktur eines normierten Raumes.

Lemma 1.1.4 *Ist* $(V, \|\cdot\|_V)$ *ein normierter, linearer Raum, so ist jede Cauchyfolge beschränkt.*

Beweis. Ist $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n, m > N$ impliziert, dass $\|v_n - v_m\|_V < \varepsilon$. Sei N die Zahl, die nach dieser Definition zu $\varepsilon = 1$ gewählt werden kann. Sei

$$R = \max\{\|v_1\|_V, \ldots, \|v_{N+1}\|_V\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|v\|_V \leq R + 1.$$

□

Beispiel 1.1.5 1. $\mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ ist ein Banachraum.

2. $C([0,1], \mathbb{R})$ mit

$$\|v\|_{C([0,1],\mathbb{R})} = \sup_{x\in[0,1]} |v(x)|$$

ist ein Banachraum.

3. Die Menge $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ versehen mit der Norm

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} = \max_{\|x\|=1} \|Lx\|_{\mathbb{R}^n}$$

ist ein Banachraum. Dies ist ein Spezialfall der nachfolgenden Betrachtung (siehe Nr. 5 weiter unten).

4. Es seien $V_1, \ldots, v_r$ Banachräume, so setze

$$V = V_1 \times \ldots \times V_r$$

und für $v = (v_1, \ldots, v_r)$

$$\|v\|_V = \max_{j=1,\ldots,r} \|v_j\|_{V_j}.$$

Dann ist dies eine Norm auf V (leicht nachzuprüfen und diese macht das Paar $(V, \|\cdot\|_V)$ zum Banachraum.

5. Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume, dann ist

$$\mathcal{L}(V; W) = \Big\{L : V \to W \;\Big|\; L \text{ ist stetig und linear}\Big\}$$

mit

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup_{v \in V, \|v\|_V = 1} \|Lv\|_W$$

ist ein Banachraum. Dieses Beispiel ist für die weiteren Überlegungen grundlegend. Wir wollen es kurz ausführen (beachte, es reicht wenn $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter linearer Raum ist): ist $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge stetiger, linearer Abbildungen, so ist mit $v \in V$ mit $n(v) = \max\{\|v\|_V, 1\}$

$$\|\frac{1}{n(v)} v\|_V \leq 1$$

und daher

$$\|L_n v - L_m v\|_W = n(v) \left\| L_n \frac{1}{n(v)} v - L_m \frac{1}{n(v)} v \right\|_W \leq n(v) \|L_n - L_m\|_{\mathcal{L}(V;W)}.$$

Damit schließt man $\{L_n v\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge und da W ein vollständiger Raum ist, ist diese auch konvergent, wir schreiben

$$w(v) = \lim_{n\to\infty} L_n v.$$

Die Zuordnung

$$v \mapsto w(v)$$

ist stetig und linear. Wir zeigen dies nacheinander:

- **Stetigkeit** Sei $Q = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\|_{\mathcal{L}(V;W)}$. Dann ist $Q < \infty$, nach Lemma 1.1.4. Setze $M = Q + 1$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Ist nun $\|v_1 - v_2\|_V < \delta$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|w(v_i) - L_n v\|_W < \frac{\varepsilon}{4}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|w(v_1) - w(v_2)\|_W &\leq \|w(v_1) - L_n v_1\|_W + \|L_n v_1 - l_n v_2\|_W + \|L_n v_2 - w(v_2)\|_W \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \|L_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} \|v_1 - v_2\| + \varepsilon 4 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + M\delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

  Also ist die Zuordnung stetig.

- **Linearität** Wir betrachten

$$\begin{aligned} w(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lim_{n\to\infty} L_n(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda_1 L_n v_1 + \lim_{n\to\infty} \lambda_2 L_n v_2 \\ &= \lambda_1 w(v_1) + \lambda_2 w(v_2). \end{aligned}$$

Wir schreiben $Lv = w(v)$. L ist daher eine stetige lineare Abbildung. (Man beachte, in endlich dimensionalen Banachräumen ist jede lineare Abbildung stetig.) Nun ist

$$Lv = \lim_{n\to\infty} L_n v$$

für alle $v \in V$. Zu zeigen bleibt $L_n \to L$ im Sinne der Norm von $\mathcal{L}(V, w)$. Wir wollen die folgende Größe abschätzen:

$$\|L - L_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|(L - L_n)v\|_W.$$

Dazu benutzt man am besten die aus der Definition der Norm folgende elementare Abschätzung (siehe auch Satz 1.1.7)

$$\|Lv\|_W \leq \|L\|\mathcal{L}(V;W)\|v\|_V,$$

die für alle $v \in V$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dazu gibt es ein $N_{Cauchy} \in \mathbb{N}$, so dass für $m > n > N_{Cauchy}$ gilt

$$\|L_n - L_m\|_{\mathcal{L}(V;W)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies bedeutet, dass für jedes $v \in V$ und $m > n > N_{Cauchy}$ gilt

$$\|(L_m - L_n)v\|_W \leq \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_V.$$

Mit der **Dreiecksungleichung** und der **punktweisen Konvergenz** erhält man die gleichmäßige Konvergenz: sei $n > N_{Cauchy}$, so gilt für alle $m > n$ und jedes $v \in V$, $\|v\|_V \leq 1$

$$\|Lv - L_n v\|_W \leq \|Lv - L_m v\|_W + \|L_m v - L_n v\|_W \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|Lv - L_m v\|_W.$$

Da für jedes $v \in V$ $\lim_{m\to\infty} L_m v = Lv$ gilt, finden wir ein hinreichend großes $m > n$, so daß der zweite Ausdruck durch $\varepsilon/2$ abgeschätzt werden kann, insgesamt also

$$\|Lv - L_n v\|_W < \varepsilon.$$

Daraus folgt

$$\|L - L_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} < \varepsilon.$$

6. Das nächste Beispiel ist von grundlegender Bedeutung für unsere Betrachtungen. Es seien $V_1, \ldots, V_r$ und W jeweils Banachräume, wir setzen

$$\mathcal{L}^r(V_1, \ldots, V_r; W) = \left\{ M : V_1 \times \ldots \times V_r \to W \;\middle|\; M(v_1, \ldots, v_{j-1}, \cdot, v_{j+1}, \ldots, v_r) \in \mathcal{L}(V_j; W) \right\}.$$

Setze $V = V_1 \times \ldots \times V_r$ und $\|\cdot\|_V$ wie oben. Wir definieren für $M \in \mathcal{L}^r(V_1, \ldots, V_r; W)$ eine Norm durch

$$\|M\|_{\mathcal{L}^r(V_1,\ldots,V_r;W)} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|Mv\|_W.$$

Wir wollen nachprüfen, dass $(\mathcal{L}^r(V_1, \ldots, V_r; W), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^r(V_1,\ldots,V_r;W)})$ ein Banachraum ist. Dazu muss zunächst die Normeigenschaft geprüft werden. Dies ist einfach und bleibt dem Leser überlassen. Der nächste Schritt ist die Vollständigkeit. Dieser ist eine direkte Verallgemeinerung des obigen Schrittes für $\mathcal{L}(V; W)$.

Wir wollen nun eine Charakterisierung stetiger linearer Abbildungen angeben.

Definition 1.1.6 *Es seien V, W Banachräume, $L : V \to W$ sei linear. L heißt* beschränkt, *wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt*

$$\|Lv\|_W \leq M\|v\|_V.$$

Satz 1.1.7 *Es seien V, W Banachräume, $L : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

1. *L ist genau dann stetig, wenn L im Nullpunkt stetig ist.*
2. *L ist genau dann im Nullpunkt stetig, wenn L beschränkt ist.*

Beweis.

1. Ist L stetig, dann natürlich auch im Nullpunkt. Angenommen L ist im Nullpunkt stetig, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, mit $\|v\|_V < \delta$ impliziert $\|Lv\|_W < \varepsilon$. Ist nun $v_0 \in V$, $eps > 0$ vorgegeben, δ passend für die Stetigkeit im Nullpunkt gewählt. Ist nun $\|v - v_0\|_V < \delta$, so ist

$$\|Lv - Lv_0\|_W = \|L(v - v_0)\|_W < \varepsilon$$

und dies war zu zeigen.

2. Angenommen L ist im Nullpunkt stetig, $\varepsilon > 0$ gegeben und δ passend gewählt. Sei $M = \frac{2\varepsilon}{\delta}$. Ist $v \in V$, so gibt es $lambda > 0$ mit $\|\lambda v\|_V = \frac{\delta}{2}$ und daher $\lambda\|Lv\|_W < \varepsilon$. Dann ist

$$\|Lv\|_W < \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{2\varepsilon\|v\|_V}{\delta} = M\|v\|_V.$$

Daher folgt aus der lokalen Stetigkeit die Beschränktheit.

Die Umkehrung ist sehr geradlinig: gilt

$$\|Lv\|_W \leq M\|v\|_V \ \ \forall v \in V,$$

und ist $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Ist nun $\|v\|_V < \delta$, so ist

$$\|Lv\|_W \leq M\|v\|_V < M\delta = \varepsilon.$$

□

1.2 Räume multilinearer Abbildungen

Wir haben gesehen, dass die Räume

$$\mathcal{L}^r(V_1, \ldots, v_r; W)$$

(mit der oben definierten Norm) Banachräume sind, gleiches gilt für gilt für

$$\mathcal{L}(V_2, \mathcal{L}(V_1; W))$$

mit der entsprechenden Norm (durch zweifache Anwendung der Überlegung aus dem Beispiel 5 in 1.1.5). Wir charakterisieren zunächst stetige multilineare Abbildungen auf eine Weise, die Satz 1.1.7 entspricht.

Satz 1.2.1 *Eine multilineare Abbildung $M : V_1 \times \ldots \times V_r \to W$ ist genau dann stetig, wenn es eine Konstante $K > 0$ gibt, so dass für alle $v = (v_1, \ldots, v_r)$ gilt*

$$\|M(v)\|_W \leq K \|v_1\|_{V_1} \cdots \|v_r\|_{V_r}.$$

Beweis. Kann man direkt aus Satz 1.1.7 folgern. □

Wir definieren für Banachräume $V_1, \ldots, V_r, W$ und für eine Zahl $2 \leq p$ rekursiv

$$\mathbb{L}^1(V_1; W) = \mathcal{L}(V_1; W)$$

und

$$\mathbb{L}^p(V_1, \ldots, V_p; W) = \mathcal{L}(V_p; \mathbb{L}^{p-1}(V_1, \ldots, V_{p-1}; W).$$

Durch rekursive Definition erhalten wir eine Norm auf $\mathbb{L}^p(V_1, \ldots, V_p; W)$, welche diesen Raum zum Banachraum macht. Wir wollen nun zeigen, dass die Banachräume $\mathcal{L}^r(V_1, \ldots, v_r; W)$ und $\mathbb{L}^r(V_1, \ldots, V_r; W)$ *isomorph* als Banachräume sind, d.h. dass es eine Abbildung zwischen beiden Räumen gibt, die gleichzeitig ein Homöomorphismus und ein linearer Isomorphismus ist (man spricht auch von einem toplinearen Isomorphismus).

Satz 1.2.2 *Die Räume $\mathbb{L}^p(V_1, \ldots, V_p; W)$ und $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_p; W)$ sind isomorph als Banachräume, der Isomorphismus kann normerhaltend gewählt werden.*

Beweis. Wir definieren die Abbildung

$$T_p : \mathbb{L}^p(V_1, \ldots, V_p; W) \to \mathcal{L}^p(V_1, \ldots, v_p; W)$$

auf folgende Weise rekursiv. Für $p = 1$ ist $(TL)(v_1) = Lv_1$. Angenommen T_{p-1} sei für $p \geq 2$ definiert als Abbildung $T_{p-1} : \mathbb{L}^{p-1}(V_1, \ldots, V_{p-1}; W) \to \mathcal{L}^{p-1}(V_1, \ldots, v_{p-1}; W)$. Setze

$$(T^p L_p)(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_p) = T_{p-1}(L_p(v_p))(v_1, \ldots, v_{p-1}).$$

Man prüft (leicht) nach, dass $T^p L_p$ für $L_p \in \mathbb{L}^p(V_1, \ldots, V_p; W)$ ein Element in $\mathcal{L}^p(V_1, \ldots, V_p; W)$ ist. Nun ist zu zeigen, dass T^r injektiv, surjektiv und ein Homöomorphismus ist. Alle drei Eigenschaften werden via Induktion über p gezeigt.

Für $p = 1$ ist $T_1 : \mathbb{L}^1(V_1; W) \to \mathcal{L}^1(V_1; W)$ mit

$$: \mathbb{L}^1(V_1; W) = \mathcal{L}(V_1, W) = \mathcal{L}^1(V_1; W)$$

die Identität, die Normen stimmen überein, also ist T^1 injektiv surjektiv und in beiden Richtungen normerhaltend, also homöomorph. Für $p \geq 2$ sei gezeigt $T^{p-1} : \mathbb{L}^{p-1}(V_1, \ldots, V_{p-1}; W) \to \mathcal{L}^{p-1}(V_1, \ldots, V_{p-1}; W)$ sei injektiv, surjektiv und in beiden Richtungen normerhaltend. Ist nun $L_p \in \ker T^p$, so ist

$$T^p L_p = 0,$$

also für alle $v_p \in V_p$ ist

$$T_{p-1}(L_p(v_p)) = 0.$$

Laut Induktionsverankerung ist dann $L_p(v_p) = 0$, also $L_p = 0$. Für die Surjektivität betrachten wir eine p-lineare Abbildung $M : V_1 \times \ldots \times V_p \to W$. Wähle $v_p \in V_p$ fest und betrachte die $p - 1$ lineare Abbildung

$$M_{v_p} : V_1 \times \ldots \times V_{p-1} \to W : (v_1, \ldots, v_{p-1}) \mapsto M(v_1, \ldots, v_p).$$

Sei $L_{p-1} = T_{p-1}^{-1} M_{v_p}$. Setze

$$L_p(v_p) = L_{p-1}.$$

Dann ist L_p stetig und linear und es gilt $T_p L_p = M$. Entsprechend zeigt man, dass T_p und T_p^{-1} normerhaltend sind. Sei $L_p \in \mathbb{L}^p(V_1, \ldots, V_p; W)$, dann ist

$$\|L_p\|_{\mathbb{L}^p(V_1,\ldots,V_p;W)} = \sup_{v_p \in V_p} \|L_p(v_p)\|_{\mathbb{L}^{p-1}(V_1,\ldots,V_{p-1};W)}.$$

Nach Induktionsverankerung ist

$$\begin{aligned}
\|T^p L_p\|_{\mathcal{L}^p(V_1,\ldots,V_p;W)} &= \sup_{\|v_p\|_{V_p}=1} \|T^{p-1} L_p(v_p)\|_{\mathcal{L}^{p-1}(V_1,\ldots,V_{p-1};W)} \\
&= \sup_{\|v_p\|_{V_p}=1} \|L_p(v_p)\|_{\mathbb{L}^{p-1}(V_1,\ldots,V_{p-1};W)} \\
&= \|L_p\|_{\mathbb{L}^p(V_1,\ldots,V_p;W)}.
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.3 *Es sei* $M \in \mathcal{L}^r(\underbrace{V, \ldots, V}_{r-mal}; W)$, *so nennen wir*

$$P(v) = M(v, \ldots, v)$$

eine homogene, polynomiale Abbildung $V \to W$ *vom Grad* r.

Kapitel 2

Differenzierbarkeit

2.1 Ableitungen

Satz 2.1.1 *Es seien V, W Banachräume, $U \subset V$ offen und $f : U \to W$ stetig. Es sei $u_0 \in U$. Es gibt höchstens eine lineare Abbildung $L : V \to W$ mit*

$$\lim_{u \to u_0, u \neq u_0} \frac{1}{\|u - u_0\|_V}(f(u) - f(u_0) - L(u - u_0)) = 0. \tag{2.1.2}$$

Beweis. Vergleiche Satz 7.3.4 und dessen Beweis aus der Vorlesung Analysis II. □

Definition 2.1.3 *Gibt es eine (und dann, wie gesehen, genau eine) lineare Abbildung L, so dass Gleichung (2.1.2) erfüllt ist, so nennen wir $L = Df(u_0)$ die* Ableitung *von f im Punkt u_0, f heißt im Punkt u_0* differenzierbar.

Ist $f : U \to W$ in jedem Punkt differenzierbar, so nennen wir f differenzierbar.

Ist $f : U \to W$ in jedem Punkt von U differenzierbar, so ist

$$Df : U \to \mathcal{L}(V; W)$$

eine Abbildung.

Definition 2.1.4 *Ist $Df : U \to \mathcal{L}(V; W)$ stetig, so nennen wir f* stetig differenzierbar.

Wir wollen nun die Situation betrachten, dass $U \subset V_1 \times V_2$ für Banachräume $V_{1,2}$ ist. Sei $u_0 = (v_1^0, v_2^0) \in U$ liegt und U eine offene Menge in $V_1 \times V_2$. Dann gibt es eine offene Menge

$$\tilde{U} = B_{r_1}(v_1^0) \times B_{r_2}(v_2^0)$$

($B_{r_i}(v_i^0) \subset V_i,\ i = 1, 2$) welche in U liegt. Ist nun

$$f : U \to W$$

stetig, wobei W ein weiterer Banachraum ist, kann man die Frage stellen, ob f als Funktion von v_1 im Punkt v_1^0 differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so nennen wir f im Punkt u_0 *partiell nach der ersten Variablen differenzierbar* und wir schreiben $D_1 f(u_0) \in \mathcal{L}(V_1; W)$ für die partielle Ableitung, die eine lineare Abbildung von V_1 nach W ist.

2.2 Höhere Ableitungen

Definition 2.2.1 *Ist $Df : U \to \mathcal{L}(V; W)$ differenzierbar, so nennen wir f* zweimal differenzierbar. *Die zweite Ableitung wird mit $D^2 f$ bezeichnet.*

$D^2 f(u_0) = D(Df)(u_0)$ ist eine Abbildung $\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; W))$. Beachte die Abbildung $D^2 f(u_0)(h_2) : V \to W$ linear und man kann einen zweiten Zuwachs h_1 einsetzen: $D^2 f(u_0)(h_2)(h_1)$ ist linear in h_2 und in h_1 und kann demnach als bilineare Abbildung $D^2 f(u_0) : V \times V \to W$ aufgefaßt werden. Nach Konstruktion ist eine r-te Ableitung

$$D^r f \in \mathbb{L}^r(\underbrace{V, V, \ldots, V}_{r\text{-mal}}; W).$$

Mit dem Isomorphismus T_r können wir $D^r f(u_0)$ identifizieren mit einer r-Linearform $T^r D^r f(u_0)$.

Beispiel 2.2.2 *1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch*

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x + y) \\ \cos(x - y) \end{pmatrix}.$$

Dann ist für $h \in \mathbb{R}^2$

$$Df(0, 0)h = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und allgemeiner ist

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) \\ -sin(x - y) & \sin(x - y) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung $D^2 f(x_0, y_0)(k) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ergibt sich dann für $k = (k_1, k_2)$ zu

$$D^2 f(x_0, y_0)(k) = \begin{pmatrix} -\sin(x_0 + y_0)(k_1 + k_2) & -\sin(x_0 + y_0)(k_1 + k_2) \\ -\cos(x_0 - y_0)(k_1 - k_2) & \cos(x_0 - y_0)(k_1 - k_2) \end{pmatrix}.$$

Als Bilinearform erhält man

$$(k, h) \mapsto k \begin{pmatrix} -\sin(x_0 + y_0)(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) \\ -\cos(x_0 - y_0)(k_1 - k_2)(h_1 - h_2) \end{pmatrix} = M(k, h).$$

2. *Wir wollen nun eine weitere Abbildung betrachten, seien*
$$V = C^1([0,1];\mathbb{R}),\;\; W = C([0,1];\mathbb{R})$$
und
$$F : V \to W : f \mapsto \sin(f').$$
Wir stellen die Frage ist F differenzierbar und was ist die Ableitung im Punkt $f_0(x) = \cos(x)$. Wir suchen eine lineare Abbildung $L : C^1 \to C$ mit der Eigenschaft
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1([0,1],\mathbb{R})}} (F(f_0+h) - F(f_0) - Lh) = 0.$$
Wir machen den Ansatz
$$Lh = \cos(f_0')h'.$$
Nun ergibt sich
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_{C^1([0,1],\mathbb{R})}} (\sin(-\sin(x)+h'(x)) - \sin(-\sin(x)) - \cos(-\sin(x)))h'(x)$$
Für jedes feste x führen wir einer Taylorentwicklung bezüglich $h'(x)$ durch und erhalten die Klammer rechts als
$$o(|h'(x)|).$$
Damit folgt die Behauptung. Natürlich kann man das noch etwas ausführlicher aufschreiben!

2.3 Anwendungen

Wie in der Analysis II kann man eine Reihe von Sätzen beweisen, z.B. die Entwicklung in Reihen und den Satz über implizite Funktionen beweisen. Letzterer impliziert dann folgenden Satz.

Satz 2.3.1 *Ist $U \subset C^1(M;N)$ offen, $f \in U$ und $f(x_0) = y_0$ und $Df(x_0) : T_{x_0}M \to T_{y_0}N$ ein linearer Isomorphismus, so gibt es eine Umgebung V von f und eine Umgebung W von x_0, so dass für jedes $g \in V$ g genau eine Nullstelle $x(g)$ in W hat. Die Abbildung*
$$X : V \to W : g \mapsto x(g)$$
ist C^1 und
$$DX(f)(g) : C^1(M;N) \to T_{x_0}M : g \mapsto Df(x_0)^{-1}g(x_0).$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $F : U \times M \to N : (g,x) \mapsto g(x)$. Die partielle Ableitung $D_2F(f,x_0) = Df(x_0) : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ ist ein linearer Isomorphismus, also sagt der Satz über implizite Funktionen, dass es eine Auflösung $X : V \to W : g \mapsto x(g)$ in entsprechenden Umgebungen gibt. Die Linearisierungsformel entspricht der aus dem Satz über implizite Funktionen. $\square$

Index