

Kapitel 6

Stabilität

6.1 Die Stabilität einer Ruhelage

In diesem Abschnitt sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung. Wir betrachten die Differentialgleichung (5.1.1) $\dot{u} = f(u)$.

Definition 6.1.1 Eine Ruhelage u_0 der Gleichung (5.1.1) heißt stabil, wenn die Menge $\{u_0\}$ im Sinne der Definition 5.1.27 stabil ist. Die Ruhelage wird asymptotisch stabil genannt, wenn sie stabil ist und zusätzlich die Menge $\{u_0\}$ ein Attraktor im Sinne der Definition 5.1.28 ist. Ist u_0 nicht stabil, so nennen wir u_0 instabil.

Ein hinreichendes Stabilitätskriterium geht auf den russischen Mathematiker Ljapunov¹ zurück, das er in seiner Habilitationsschrift im Jahre 1892 bewies. Zwei Hilfssätze wollen wir vorab bereitstellen.

Hilfssatz 6.1.2 (a) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\alpha > \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ eine Konstante $M_\alpha \geq 1$, so daß für alle $t \geq 0$ gilt

$$\|E(A, t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t}.$$

(b) Entsprechend gibt es zu jedem $\beta < \min\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ eine Konstante $N_\beta \geq 1$ mit

$$\|E(A, t)\| \leq N_\beta e^{\beta t} \quad \forall t \leq 0.$$

Beweis. Es reicht (a) zu beweisen. Die Aussage (b) folgt dann in gleicher Weise. Die Aussage folgt im wesentlichen aus dem Beweis des Satzes über Spektrum und Stabilität I, d.h. Satz 3.5.1. Sei α wie im Hilfssatz angegeben. Wir schreiben $A = A - \alpha \mathbb{1} + \alpha \mathbb{1}$.

¹Aleksandr Michailowitsch Ljapunov (6.6.1857-3.11.1918) leistete in seiner Habilitationsschrift fundamentale Beiträge zur Stabilitätstheorie. Weitere Ergebnisse in der Theorie der Differentialgleichungen betreffen die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, ein Problem das von Riemann studiert worden war und bis heute aktuell ist.

Da $\mathbb{1}$ mit jeder anderen Matrix kommutiert, erhält man

$$\|E(A, t)\| \leq e^{\alpha t} \|E(A - \alpha \mathbb{1}, t)\|.$$

Da alle Eigenwerte von $A - \alpha \mathbb{1}$ in der linken Halbebene sind, ist nach dem Beweis von Satz 3.5.1 $E(A - \alpha \mathbb{1}, t)$ für $t \geq 0$ beschränkt. Das heißt also, es gibt eine Konstante $M_\alpha > \|E(A - \alpha \mathbb{1}, t)\|$ und damit $\|E(A, t)\| < M_\alpha e^{\alpha t}$, wie behauptet. $\square$

Hilfssatz 6.1.3 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung der Null, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$. Dann existiert zu jedem $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ mit

$$|u_1| < \eta, |u_2| < \eta \Rightarrow |g(u_1) - g(u_2)| < L|u_1 - u_2|.$$

Beweis. Da die Ableitung $Dg(u)$ stetig in U ist, läßt sich zu jeder Konstante $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ finden, so daß $\|Dg(u)\| < L$ für $|u| < \eta$ ist. Wegen des Mittelwertsatzes läßt sich die Lipschitz Konstante auf einer Umgebung durch die maximale Norm der Ableitung abschätzen. $\square$

Satz 6.1.4 (Ljapunov, Spektrum und Stabilität II) Gegeben sei eine autonome Differentialgleichung (5.1.1) mit einer Ruhelage u_0 . Die Abbildung f sei in einer Umgebung von u_0 stetig differenzierbar und $A = Df(u_0)$ sei die Linearisierung (Ableitung) von f im Punkt u_0 . Dann gilt:

1. Haben alle Eigenwerte von A negative Realteile, so ist u_0 asymptotisch stabil.
2. Gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil positiv ist, so ist u_0 instabil.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Stabilitätsaussage. O.B.d.A. dürfen wir davon ausgehen, daß $u_0 = 0$ ist. Zur Erleichterung der Schreibweise wollen wir dies auch tun. Da $A = Df(0)$ ist, kann man die Abbildung f in der Form $f(u) = Au + g(u)$ schreiben, wobei g bei 0 stetig differenzierbar ist und $Dg(0) = 0$ ist. Also hat die zu betrachtende Gleichung die Form

$$(6.1.5) \quad \dot{u} = Au + g(u)$$

Wir müssen die Stabilität und die Attraktivität von $u_0 = 0$ zeigen. Die Stabilität kann man auch so formulieren: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$|v_0| < \delta \implies |u(t, v_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $v_0 \in U$. Die Lösung $u(t) = u(t, v_0)$ von (6.1.5) genügt der Integralgleichung

$$u(t) = E(A, t)v_0 + \int_0^t E(A, t-s)g(u(s))ds,$$

da natürlich nach Einsetzen der Lösung $u(t, v_0)$ in die Gleichung (6.1.5) daraus mit $h(t) = g(u(t, v_0))$ die äquivalente Gleichung

$$\dot{u} = Au + h(t)$$

entsteht. Sei $\mu = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\mu < 0$ und die Norm von $E(A, t)$ kann für jedes $\alpha \in (\mu, 0)$ abgeschätzt werden durch

$$\|E(A, t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t},$$

wobei M_α die reelle Konstante ist, deren Existenz der Hilfssatz 6.1.2 gewährleistet. Wir finden auch eine positive Konstante $L > 0$ mit

$$M_\alpha L < \frac{1}{2} \min\{-\alpha, 1\}.$$

Nach Hilfssatz 6.1.3 gibt es ein $\eta > 0$, $\eta < \varepsilon$, so daß auf $B_\eta(0)$ die Funktion g die Lipschitz Konstante L hat. Sei $\delta = \frac{1}{2} \frac{\eta}{M_\alpha}$. Nun hat man für $|v_0| < \delta$ die Abschätzung

$$(6.1.6) \quad |u(t, v_0)| \leq \|E(A, t)\| |v_0| + \int_0^t \|E(A, t-s)\| |f(u(s, v_0))| ds.$$

Einsetzen ergibt (jedenfalls solange $|u(s, v_0)| < \eta$ ist)

$$\begin{aligned} |u(t, u_0)| &\leq M_\alpha e^{\alpha t} \delta + M_\alpha L \eta \int_0^t e^{\alpha(t-s)} ds \\ &< \frac{1}{2} \eta + M_\alpha L \eta \frac{1}{|\alpha|} (1 - e^{\alpha t}) \\ &< \frac{1}{2} \eta + M_\alpha L \eta \frac{1}{|\alpha|} \\ &< \eta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit hat man die Stabilität, denn angenommen es gäbe eine Zahl $t^* > 0$ mit $|u(t^*, v_0)| = \eta$, dann kann man o.B.d.A. davon ausgehen, daß t^* minimal gewählt wurde. Dann ist für $t \in (0, t^*)$ $|u(t, v_0)| < \eta$. Unsere Abschätzung garantiert, daß auch noch für $t = t^*$ die Lösung $u(t, v_0)$ in $B_\eta(0)$ enthalten ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Um die asymptotische Stabilität zu zeigen, nutzen wir die Formel (6.1.6) und schätzen etwas anders ab:

$$(6.1.7) \quad |u(t, v_0)| \leq M_\alpha e^{\alpha t} \delta + M_\alpha L \int_0^t e^{\alpha(t-s)} |u(s, v_0)| ds.$$

Multiplikation mit $e^{-\alpha t}$ liefert für die Funktion $v(t) = e^{-\alpha t} |u(t, v_0)|$ die Abschätzung

$$v(t) \leq M_\alpha \delta + M_\alpha L \int_0^t v(s) ds.$$

Hier verwenden wir das Lemma von Gronwall (Lemma 2.2.13)

und erhalten

$$v(t) \leq M_\alpha \delta e^{M_\alpha L t}.$$

Damit ergibt sich für $u(t, u_0)$ die Abschätzung

$$|u(t, u_0)| \leq M_\alpha \delta e^{(M_\alpha L + \alpha)t}.$$

Da $M_\alpha L + \alpha < 0$ ist, konvergiert dies gegen Null. Damit ist die asymptotische Stabilität gezeigt.

Wir nehmen nun an, daß die Linearisierung einen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt. Wir zeigen, daß es eine nichttriviale Lösung $u(t)$ gibt mit $u(t) \rightarrow w_0$ für $t \rightarrow -\infty$. Daraus folgt dann die Behauptung. Zunächst wollen wir uns überlegen, wie die Aussage des Satzes aus dieser Tatsache folgt. Dann werden wir dies als eigenes Lemma formulieren. Sei $u(t)$ eine Lösung mit $u(t) \rightarrow w_0 = 0$ für $t \rightarrow -\infty$. Sei $\varepsilon = |u(0)| > 0$. (Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß 0 im maximalen Existenzintervall enthalten ist.) Angenommen, es existiere ein $\delta > 0$, so daß aus $|u_0| < \delta$ folgen würde, daß für alle $t \geq 0$ gilt $|u(t, u_0)| < \varepsilon$, so könnte man schließen, daß $|u(t)| > \delta \forall t \leq 0$. Dies ist ein Widerspruch. Wie angekündigt wollen wir die Existenz von $u(t)$ getrennt zeigen. $\square$

Definition 6.1.8 Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann bezeichnen wir mit E^+ die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit positivem Realteil, entsprechend mit E^- die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit negativem Realteil, und E^0 entsprechend mit Realteil 0. P^+ , P^- , P^0 schreiben wir für die Projektoren auf diese Räume mit Kern $E^0 \oplus E^-$ bzw. $E^+ \oplus E^-$ bzw. $E^0 \oplus E^+$. Weiter seien $Q^+ = I - P^+$, $Q^- = I - P^-$ die entsprechenden komplementären Projektoren. Weiterhin wollen wir vereinbaren, daß $\sigma^+(A)$ für $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ steht und ganz entsprechend $\sigma^0(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$, bzw. $\sigma^-(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$ definiert sind.

Lemma 6.1.9 Die Räume E^+ , E^- und E^0 sind invariante Unterräume für A , d.h. $AE^+ \subset E^+$, $AE^- \subset E^-$ und schließlich $AE^0 \subset E^0$.

Beweis. Folgt sofort aus der Definition der Räume. $\square$

Definition 6.1.10 Die Einschränkungen von A auf die verschiedenen Unterräume wollen wir folgendermaßen bezeichnen:

$$\begin{aligned} A_u &= A|_{E^+} \\ A_s &= A|_{E^-} \\ A_c &= A|_{E^0} \\ A_{cu} &= A|_{E^0 \oplus E^+} \\ A_{cs} &= A|_{E^0 \oplus E^-} \end{aligned}$$

Lemma 6.1.11 (a) Die jeweiligen Spektren dieser lineare Abbildungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\sigma(A_u) &= \sigma^+(A) \\ \sigma(A_s) &= \sigma^-(A) \\ \sigma(A_c) &= \sigma^0(A) \\ \sigma(A_{cu}) &= \sigma^0(A) \cup \sigma^+(A) \\ \sigma(A_{cs}) &= \sigma^0(A) \cup \sigma^-(A).\end{aligned}$$

(b) Die Matrixexponentialfunktionen der Einschränkungen A_u, A_{cs} genügen den Abschätzungen:

$$\begin{aligned}\forall \beta < \frac{1}{3} \min \{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma^+(A) \} \quad \exists N_{3\beta} \geq 1 \quad \|E(A_u, t)\| \leq N_{3\beta} e^{3\beta t} \quad \forall t \leq 0 \\ \forall \alpha > 0 \quad \exists M_\alpha \geq 1 \quad \|E(A_{cs}, t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t} \quad \forall t > 0.\end{aligned}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Hilfssatz 6.1.2. □

Bemerkung 6.1.12 Ähnliche Abschätzungen gelten natürlich auch für die anderen Teile von A .

Bemerkung 6.1.13 Außerdem kann man eine solche Dreiteilung auch an anderen Achsen als der imaginären Achse vornehmen.

Satz 6.1.14 Sei $\dot{u} = Au + g(u)$ eine autonome Differentialgleichung mit stetig differenzierbarem $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g(0) = 0, Dg(0) = 0$. Hat A Eigenwerte mit positivem Realteil, so existiert eine Umgebung $B_\delta(0)$, so daß zu jedem $u_0 \in B_\delta(0) \cap E^+$ eine Lösung $u(t)$ existiert mit

1. $P^+ u(0) = u_0$,
2. $u(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$.

Beweis. Wähle ein

$$\alpha \in (0, \frac{1}{3} \min \{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma^+(A) \}).$$

Dann gibt es nach dem oben angegebenen Lemma 6.1.11 Zahlen M_α und $N_{3\alpha}$ mit den entsprechenden Abschätzungen $\|E(A_{cs}, t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t}$ für positive t und

$$\|E(A_u, t)\| \leq N_{3\alpha} e^{3\alpha t}$$

für nichtpositive t . Setze

$$M = \max \{ M_\alpha, N_{3\alpha} \}.$$

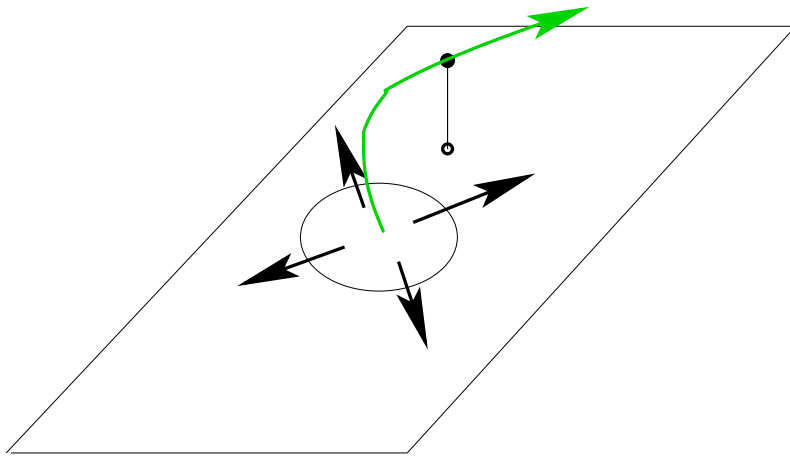


Abbildung 6.1: Existenz einer Lösung, die für $t \rightarrow -\infty$ gegen eine Ruhelage konvergiert. Die schwarzen Pfeile deuten den linearisierten Fluß in dem Raum E^+ an, die grüne Linie eine Lösung der Gleichung mit $P^+u(0) = u_0$.

Damit gilt $\|E(P^+A, t)P^+\| \leq Me^{3\alpha t}$ für $t \leq 0$ und $\|E(Q^+A, t)Q^+\| \leq Me^{\alpha t}$ für $t > 0$. Wir wählen $\eta > 0$ so klein, daß

$$\frac{ML(\eta)}{\alpha} \max \{\|P^+\|, \|Q^+\|\} < \frac{1}{4}$$

ist, wobei $L(\eta)$ die Lipschitz Konstante von g auf $B_\eta(0)$ ist. Wir betrachten den Raum der Funktionen

$$C^\alpha(u_0) = \{u : (-\infty, 0] \rightarrow U \mid u \text{ ist stetig, } |u(t)| < \eta e^{2\alpha t} < \infty, P^+u(0) = u_0\}.$$

Auf $C^\alpha(u_0)$ definieren wir eine Metrik d^α durch

$$d^\alpha(u, v) = \eta \sup \{|u(t) - v(t)|e^{-2\alpha t} \mid t \leq 0\}.$$

d^α macht $C^\alpha(u_0)$ zum vollständigen, metrischen Raum. Wir prüfen die Vollständigkeit nach. Sei $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Metrik d^α . Dann existiert ein punktwiser Limes $u(t)$. Wir müssen zeigen, daß u wieder in C^α liegt. Dazu prüfen wir die Wachstumsbedingung nach:

$$|u(t)| \leq |u(t) - u_n(t)| + |u_n(t)| \leq |u(t) - u_n(t)|e^{-2\alpha t}e^{2\alpha t} + \eta e^{2\alpha t} \leq (d^\alpha(u, u_n) + \eta)e^{2\alpha t} \leq (\varepsilon + \eta)e^{2\alpha t}.$$

Wir setzen für $t \leq 0$

$$(6.1.15) \quad Tu(t) = e^{P^+At}u_0 + \int_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+g(u(s))ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+g(u(s))ds.$$

Wir müssen für ein genügend kleines $\delta > 0$ drei Dinge beweisen:

1. T bildet für $|u_0| < \delta$ den Raum $C^\alpha(u_0)$ in sich ab.

2. T ist eine starke Kontraktion.

3. Der Fixpunkt u hat die gewünschten Eigenschaften.

1.) T bildet den Raum $C^\alpha(u_0)$ in sich ab. Dazu müssen wir die drei Eigenschaften nachprüfen, nämlich die Stetigkeit von Tu , die Wachstumsschranke und schließlich die Anfangsbedingung. Die Stetigkeit von Tu ist klar, sofern die Integrale existieren. Auch die letzte Eigenschaft ist offensichtlich:

$$P^+Tu(0) = P^+E(P^+A, 0)u_0 + P^+\int_{-\infty}^0 E(Q^+A, -s)Q^+g(u(s))ds.$$

Dies ist gleich P^+u_0 . Bleibt die Beschränktheit von Tu zu zeigen. Dazu schätzen wir ab:

$$|Tu(t)| \leq \|e^{P^+At}\| |u_0| + \int_t^0 \|e^{P^+A(t-s)}\| \|P^+\| L(\eta) |u(s)| ds + \int_{-\infty}^t \|e^{Q^+A(t-s)}\| \|Q^+\| L(\eta) |u(s)| ds.$$

Einsetzen ergibt (Dabei beachte man, daß im zweiten Integral die Zeitdifferenz positiv, im dritten negativ ist.)

$$|Tu(t)| \leq Me^{\alpha t} |u_0| + ML(\eta) \max\{\|P^+\|, \|Q^+\|\} \left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} |u(s)| ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} |u(s)| ds \right).$$

Wegen der Wachstumsbeschränkung in C^α kann man weiter abschätzen

$$|Tu(t)| \leq Me^{3\alpha t} |u_0| + ML(\eta) \eta \max\{\|P^+\|, \|Q^+\|\} \left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} e^{2\alpha s} ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} e^{2\alpha s} ds \right).$$

Wir betrachten zunächst das zweite Integral, es liefert folgenden Beitrag:

$$e^{3\alpha t} \int_t^0 e^{-3\alpha s} e^{2\alpha s} ds = e^{3\alpha t} \frac{1}{-\alpha} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Dies ergibt als obere Abschätzung für das erste Integral

$$\frac{1}{\alpha} (e^{2\alpha t} - e^{3\alpha t}).$$

Für das zweite Integral erhält man

$$e^{\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{\alpha s} ds \leq \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha t}.$$

Zusammen ergibt sich die endgültige Abschätzung

$$\|Tu(t)\| \leq Me^{3\alpha t} |u_0| + ML(\eta) \eta \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha t} - \frac{ML(\eta) \eta}{\alpha} e^{3\alpha t}.$$

Mit $\delta < \frac{L(\eta)\eta}{\alpha}$ und der Wahl von η erhält man

$$|Tu(t)| \leq \eta e^{2\alpha t}.$$

Damit haben wir den ersten Schritt abgeschlossen.

2.) Seien $u_1, u_2 \in C^\alpha(u_0)$. Wir müssen den Abstand $d^\alpha(Tu_1, Tu_2)$ kontrollieren. Also

$$d^\alpha(Tu, Tv) = \eta \sup \{ |Tu(t) - Tv(t)| e^{-2\alpha t} \mid t \leq 0 \}.$$

Die Differenz $Tu(t) - Tv(t)$ hat die Form

$$Tu(t) - Tv(t) = \int_0^t e^{P^+ A(t-s)} P^+ (g(u(s)) - g(v(s))) ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+ A(t-s)} Q^+ (g(u(s)) - g(v(s))) ds.$$

Übergang zu den Normen und die grundlegenden Abschätzungen ergeben

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq ML(\eta) \left(\|P^+\| \int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} |u(s) - v(s)| ds + \|Q^+\| \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} |u(s) - v(s)| ds \right).$$

Wir betrachten wieder die beiden Integrale getrennt und multiplizieren zunächst mit $\eta e^{-2\alpha t}$. Für das erste Integral erhalten wir

$$e^{-2\alpha t} \int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} e^{-2\alpha s} e^{2\alpha s} |u(s) - v(s)| ds \leq e^{\alpha t} \int_t^0 e^{-\alpha s} ds d^\alpha(u, v).$$

Damit ergibt sich für das erste Integral die Abschätzung

$$e^{-2\alpha t} \int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} e^{-2\alpha s} e^{2\alpha s} |u(s) - v(s)| ds \leq \frac{1}{\alpha} d^\alpha(u, v).$$

Für das zweite erhalten wir

$$e^{-2\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} |u(s) - v(s)| ds.$$

Wie oben ergibt sich dafür

$$\int_{-\infty}^t e^{2\alpha(t-s)} ds d^\alpha(u, v) \leq \frac{1}{\alpha} d^\alpha(u, v).$$

Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned} d^\alpha(Tu, Tv) &\leq ML(\eta) \max\{\|P^+\|, \|Q^+\|\} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) d^\alpha(u, v) \\ &< 2 \frac{ML(\eta)}{\alpha} \max\{\|P^+\|, \|Q^+\|\} d^\alpha(u, v). \end{aligned}$$

Nach der Wahl von $L(\eta)$ ist damit

$$d^\alpha(Tu, Tv) \leq \frac{1}{2} d^\alpha(u, v)$$

und T ist eine starke Kontraktion.

3.) Sei $Tu = u$. Wir müssen zeigen, daß u die Differentialgleichung löst, und das richtige Verhalten für $t \rightarrow -\infty$ zeigt. Letzteres ist aufgrund der Definition von C^α klar.

Daß u die Differentialgleichung löst folgt aus der Invarianz der Unterräume und der Tatsache, daß man die Differentialgleichung in ein gekoppeltes System auf den Unterräumen äquivalent umschreiben kann. Wir rechnen nach $\dot{u} + \frac{d}{dt}(Tu)(t)$ und erhalten

$$\dot{u} = Ae^{P^+At}u_0 + P^+g(u(t)) + A \int_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+g(u(s))ds + Q^+g(u(t)) + A \int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+g(u(s))ds.$$

Die rechte Seite ergibt

$$Ae^{P^+At}u_0 + g(u(t)) + A \left(\int_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+g(u(s))ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+g(u(s))ds \right) = Au(t) + g(u(t)).$$

□

Bemerkung 6.1.16 Die dritte Aussage, die wir im ersten Satz über Spektrum und Stabilität (im linearen Fall) gemacht haben, hat keine Übertragung auf die gegenwärtige Situation. Hat A Eigenwerte auf der imaginären Achse, so kann u_0 asymptotisch stabil, stabil aber nicht asymptotisch stabil oder auch instabil sein. Drei triviale Fälle, die dies erläutern, sind $\dot{u} = -u^3$, $\dot{u} = 0$ und schließlich $\dot{u} = u^2$. Im ersten Fall ist $u_0 = 0$ asymptotisch stabil, im zweiten stabil, aber nicht asymptotisch stabil, und im dritten Fall instabil.

Definition 6.1.17 Sei $\dot{u} = f(u)$ wie im Satz und w_0 eine Ruhelage, so daß $A = Df(w_0)$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat, so nennt man die Ruhelage hyperbolisch.

Eine Motivation für diesen Begriff, liefert das Phasenporträt der Gleichung $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$.

Beispiel 6.1.18 (Lorenz Gleichungen) Wir betrachten das dreidimensionale System

$$(6.1.19) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}.$$

Dabei seien b, r, σ drei positive reelle Zahlen. Für Ruhelagen erhält man aus der ersten Gleichung $x = y$. Damit ergibt die zweite Gleichung $(r - 1 - z)x = 0$. Die Lösungen dieser Gleichungen sind $x = 0$ oder $z = 1 - r$. Mit der dritten Gleichung erhält man schließlich $x^2 = bz$. Damit ergibt sich als Lösung $x = y = z = 0$ oder

$$x = y, z = 1 - r, x = \pm \sqrt{b(r - 1)}.$$

Damit erkennt man, daß die nichttriviale Lösung nur für $r > 1$ existiert. Für $r < 1$ hat man also nur die triviale Lösung $x = y = z = 0$, und für $r > 1$ hat man neben dieser

trivialen Lösung noch zwei weitere Lösungen. Wir werden die Stabilität der trivialen Lösung ausrechnen. Als Linearisierung bei $x = y = z = 0$ ergibt sich die Matrix

$$(6.1.20) \quad A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Das Spektrum kann man leicht ausrechnen: Man hat einen Eigenwert $-b < 0$. Um die Vorzeichen der anderen beiden zu diskutieren, betrachten wir

$$\det A = \sigma(1 - r) \text{ und } \operatorname{tr} A = -1 - \sigma < 0.$$

Also ist für $r < 1$ die triviale Ruhelage asymptotisch stabil. Bei $r = 1$, dort wo weitere Lösungen entstehen, verliert diese Lösung die Stabilität, sie wird instabil. Um die Stabilität der neuen Ruhelagen zu bekommen, geben wir zunächst die Linearisierung A von f in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) an:

$$(6.1.21) \quad A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung für diese Eigenwerte lautet

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Man rechnet nach, daß für

$$r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

alle Realteile für die nichttriviale Lösung negativ sind. Für $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ hat man die Stabilität für $1 < r < \frac{470}{19}$. Dort werden auch die nichttrivialen Lösungen instabil. Weitere interessante Phänomene treten auf.

Beispiel 6.1.22 Ist w_0 eine Ruhelage einer autonomen Differentialgleichung und gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(w_0)$, so daß für jedes $u_0 \in B_\varepsilon(w_0)$ gilt $\omega(u_0) = w_0$, so folgt nicht, daß w_0 asymptotisch stabil ist. Man beachte, daß bei der Definition der asymptotischen Stabilität die Stabilität gefordert wurde. Ein Beispiel für dieses Phänomen liefert Aufgabe 3, Blatt 10. In Abbildung 6.2 sehen wir ein qualitatives Phasenportrait, das das beschriebene Phänomen illustriert.

6.2 Die Stabilität einer periodischen Lösung

Sei wieder $\dot{u} = f(u)$ die autonome Differentialgleichung (5.1.1) mit einer Lipschitz stetigen rechten Seite. In diesem Abschnitt betrachten wir einen geschlossenen Orbit $\mathcal{O}$ für (5.1.1) und eine Lösung $u(t)$ in diesem Orbit. Wie im vorigen Abschnitt für eine Ruhelage wollen wir auch hier den Begriff der Stabilität definieren und Kriterien für verschiedene Formen der Stabilität angeben. Hier ist die Situation naturgemäß etwas komplizierter als im Fall einer Ruhelage.

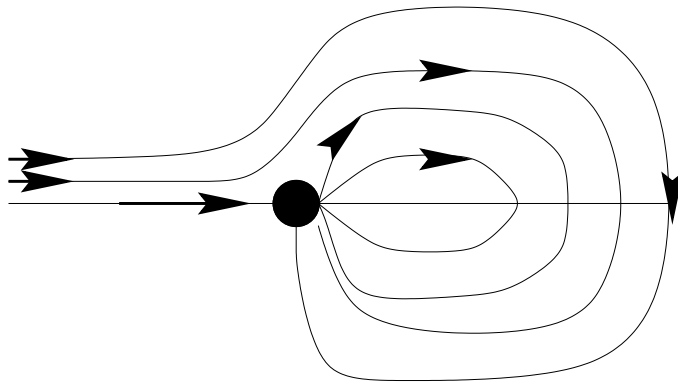


Abbildung 6.2: Ein Beispiel einer attraktiven Ruhelage, die nicht asymptotisch stabil ist. Typisch ist das Auftreten von homoklinen Orbits.

Definition 6.2.1 Der geschlossene Orbit $\mathcal{O}$ heißt orbital stabil, wenn $\mathcal{O}$ als Menge stabil im Sinne der Definition 5.1.27 ist. Er wird als orbital asymptotisch stabil bezeichnet, wenn er stabil und attraktiv im Sinne der Definition 5.1.28 ist. Man nennt u orbital asymptotisch stabil mit asymptotischer Phase, wenn $\mathcal{O}$ asymptotisch stabil ist und es eine Umgebung U von $\mathcal{O}$ gibt, so daß zu jedem Anfangswert $u_0 \in U$ eine Zahl $T(u_0)$ gibt, so daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t - T(u_0)) - u(t, t_0)| = 0$$

ist.

Ein geometrischer Zugang zur Stabilitätstheorie periodischer Lösungen geht auf Poincaré zurück. Zunächst konstruiert man sich den sogenannten Poincaré Schnitt und die Poincaré Abbildung. Dabei geht man von der Beobachtung aus, daß jeder Punkt auf einem geschlossenem Orbit regulärer Punkt ist und somit eine Transversale existiert.

Lemma 6.2.2 Sei L eine Transversale zum Lipschitz stetigen Vektorfeld f in einem Punkt u_0 auf einem geschlossenem Orbit $\mathcal{O}$. Dann gibt es eine Umgebung U_0 von u_0 , so daß zu jedem Punkt $v \in U_0 \cap L$ ein $t_v > 0$ existiert, so daß $u(t_v, v) \in L$ ist, aber für $t \in (0, t_v)$ die Lösung $u(t, v) \notin L$ ist.

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz über stetige Abhängigkeit von Anfangswerten. □

Definition 6.2.3 Eine Transversale L , wie sie im vorherigen Lemma angegeben war, heißt Poincaré Schnitt. Die Abbildung $\Pi : L \cap U_0 \rightarrow L : v \mapsto u(t_v, v)$ nennt man Poincaré Abbildung oder auch Wiederkehrabbildung, engl. return map.

Ein alternativer Beweis von Lemma 6.2.2 beruht auf dem Satz über implizite Funktionen, damit erhält man auch eine etwas stärkere Aussage.

Satz 6.2.4 Ist $f \in C^1(U)$, so existiert eine Umgebung U_0 von u_0 , so daß $\Pi : L \cap U_0 \rightarrow L$ stetig differenzierbar ist.

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz über implizite Funktionen: Man wähle eine affin lineare Transversale $u_0 + H$, so ist für jeden Punkt v nahe u_0 der affine Raum $v + H$ eine Transversale und man hat eine stetig differenzierbare Abbildung π einer Umgebung V nach $\mathcal{O}$ durch

$$u + H \ni v \mapsto u.$$

Wir betrachten für w nahe u_0 und t nahe t_{u_0} die Abbildung $Q(w, t) = \pi \circ \Phi(w, t)$, wobei Φ der zu f gehörende Fluß ist. Dann ist Q stetig differenzierbar, $Q(u_0, t_{u_0}) = u_0$ und

$$Q_t(u_0, t_{u_0}) = D_w \pi \circ \Phi_t(u_0, t_{u_0}) = D_w \pi f(u_0) \neq 0.$$

Damit garantiert der Satz über implizite Funktionen die lokale Lösbarkeit der angegebenen Gleichung und damit die Behauptung des Satzes. $\square$

Die Poincaré Abbildung gibt uns ein einfaches geometrisches Kriterium für die Stabilität einer periodischen Lösung, das auch für theoretische Untersuchungen von Bedeutung ist.

Satz 6.2.5 Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$, u_0 ein (regulärer) Punkt auf $\mathcal{O}$. Sei L ein Poincaré Schnitt mit Poincaré Abbildung Π . Dann gilt:

1. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, daß $w \in L$ und $|w - u_0| < \delta$ implizieren, so daß die Iterierten $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind und gilt $|\Pi^n(w) - u_0| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathcal{O}$ orbital stabil.
2. Ist $\mathcal{O}$ orbital stabil und gibt es eine Umgebung U_1 von u_0 , so daß aus $w \in U_1$ folgt, daß $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist und für $n \rightarrow \infty$ gegen u_0 konvergiert, so ist $\mathcal{O}$ orbital asymptotisch stabil.
3. Gibt es ein w , so daß $\Pi^{-n}(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren und gegen u_0 für $n \rightarrow -\infty$ konvergieren so ist $\mathcal{O}$ instabil.

Beweis. Folgt offensichtlich aus der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten! Beachte, daß es eine Umgebung gibt, auf der die Rückkehrzeit durch $2t_{u_0} \geq t_w \geq \frac{1}{2}t_{u_0}$ nach oben bzw. unten beschränkt ist! $\square$

Um ein eher algebraisches Kriterium zu erhalten, müssen wir uns noch einmal Gedanken über Übergangsmatrizen machen.

Definition 6.2.6 Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, in der ersten Komponente Lipschitz stetig mit $f(0, t) = 0$. Die Ruhelage $u = 0$ der Gleichung (2.1.2) nennt man stabil, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so daß aus $|u_0| < \delta$ folgt, daß $|u(t, t_0, u_0)| < \varepsilon$ für alle $t > t_0$. Kann δ unabhängig von t_0 aus einer Menge $S \subset \mathbb{R}$ gewählt werden, so spricht man

von gleichmäßiger Stabilität bezüglich S . Entsprechend definiert man asymptotisch stabil, wenn es ein $\delta_1(t_0) > 0$ gibt, so daß aus $|u_0| < \delta_1(t_0)$ folgt $u(t, t_0, u_0) \rightarrow 0$. Man nennt u_0 instabil, wenn es nicht stabil ist. Bei der Definition gleichmäßiger asymptotischer Stabilität (bezüglich S) verlangt man, daß 0 stabil und asymptotisch stabil ist und die Zahl $\delta_1 = \delta_1(t_0)$ unabhängig von $t_0 \in S$ gewählt werden kann und schließlich zu jeder positiven Zahl $\eta > 0$ eine Zeit $T(\eta)$ gefunden werden kann, so daß für alle $t > t_0$ $|u(t + T(\eta), t_0, u_0)| < \eta$ für alle $t_0 \in S$ und alle u_0 mit $|u_0| < \delta_1$ ist. Man überträgt diese Begriffe auf beliebige Lösungen, indem man für eine Lösung $u(t)$ das System $\dot{y} = f(u(t) + y, t) - f(u(t), t)$ betrachtet.

Lemma 6.2.7 Alle Lösungen von $\dot{u} = A(t)u$ haben die gleichen Stabilitätseigenschaften.

Beweis. Folgt aus der Linearität. □

Bemerkung 6.2.8 Aus diesem Grunde sagt man auch, das System (3.3.4) $\dot{u} = A(t)u$ ist stabil, asymptotisch stabil oder instabil.

Satz 6.2.9 Sei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig. Sei $\Psi(t)$ eine Fundamentalmatrix für $\dot{u} = A(t)u$ und β sei eine beliebige reelle Zahl. Dann ist das System $\dot{u} = A(t)u$

1. stabil, genau dann wenn es zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Konstante $K(t_0)$ gibt mit $\|\Psi(t)\| \leq K(t_0)$ für alle $t \geq t_0$,
2. gleichmäßig stabil für $t_0 \geq \beta$, genau dann wenn es eine Konstante $K(\beta)$ gibt, so daß für $t_0 \geq \beta$ und $t_0 \leq s \leq t$ gilt

$$\|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\| \leq K(\beta),$$

3. asymptotisch stabil genau dann, wenn

$$\|\Psi(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

4. gleichmäßig asymptotisch stabil für $t_0 \geq \beta$ genau dann, wenn es Konstanten $K = K(\beta) > 0$, $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ gibt mit

$$\|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \text{ für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Beweis. 1.) Die Rückrichtung folgt einfach aus der Darstellung der Lösung: Sei $u(t)$ eine Lösung, so ist $u(t) = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u(t_0)$. Sei $M = |\Psi(t_0)^{-1}|$. Dann ist $|u(t)| \leq K(t_0)M |u(t_0)|$. Wählt man $\delta = \frac{\varepsilon}{K(t_0)M}$, so hat man die Stabilitätsbedingung erfüllt. Die Hinrichtung ist auch nahezu offensichtlich: Stabilität besagt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $|u_0| < \delta$ die Norm $|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u_0| < \varepsilon$ beschränkt bleibt. Angenommen es gäbe Folgen u_ν , t_ν , so daß

$$\Psi(t_\nu)u_\nu \rightarrow_{\nu \rightarrow \infty} \infty$$

konvergiert. Dann hat $\tilde{u}_\nu = \frac{1}{2} \delta \frac{1}{|\Psi(t_0)u_\nu|} \Psi(t_0)u_\nu$ die Norm $\frac{\delta}{2}$ und $|\Psi(t_\nu)\Psi(t_0)^{-1}\tilde{u}_\nu| \geq \varepsilon$ für genügend großes ν .

2.) Beide Richtungen können wie im ersten Teil durchgeführt werden, hier hängt δ für $t_0 \geq \beta$ nicht von t_0 ab.

3.) Als erstes folgt aus der Abklingbedingung die Beschränktheit von $\|\Psi(t)\|$ und damit die Stabilität. Die Asymptotik erhält man wie im ersten Beweisschritt. Die Umkehrung folgt auch wie oben.

4.) Ist die angegebene Bedingung erfüllt, so konvergiert $\|\Psi(t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und aus 2.) folgt die Stabilität. Aus dem dritten Schritt erhält man die asymptotische Stabilität. Sei $|u(t_0)| \leq 1$ und $\eta \in (0, K)$. Setze

$$T = -\frac{\log(\eta/K)}{\alpha}.$$

Dann ist für $t \geq t_0 + T$, $t' = t - (T + t_0) > 0$

$$|u(t)| = |\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u(t_0)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|u(t_0)| = Ke^{-\alpha T}e^{-\alpha t'}|u(t_0)| < Ke^{-\alpha T} = \eta.$$

Hier ist die Umkehrung schwieriger. Wir nehmen also an, daß die Nulllösung gleichmäßig asymptotisch stabil für $t_0 \geq \beta$ ist. Insbesondere existiert ein $b > 0$, so daß zu jedem $\eta < b$ ein $T = T(\eta)$ existiert mit

$$|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u(t_0)| \leq \eta, \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 > \beta, \quad |u(t_0)| < b.$$

Daher ist (warum kann man so abschätzen?)

$$\|\Psi(t+T)\Psi(t_0)^{-1}\| < \frac{\eta}{b} < 1 \quad \text{für } t \geq t_0 \geq \beta.$$

Aufgrund der Definition von gleichmäßiger asymptotischer Stabilität gilt eine entsprechende Abschätzung für alle $t \geq \beta$, d.h.

$$\|\Psi(t+T)\Psi(t)^{-1}\| < \frac{\eta}{b} < 1 \quad \text{für } t \geq \beta.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stabilität existiert ein $M = M(\beta)$ mit

$$\|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\| \leq M, \quad \text{für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Setze

$$\alpha = -T^{-1} \log\left(\frac{\eta}{b}\right)$$

und

$$K = Me^{\alpha T}.$$

Dann gibt es zu jedem $t \geq t_0$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $kT \leq t - t_0 < (k+1)T$. Daher gilt dann

$$\begin{aligned} \|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}\| &= \|\Psi(t)\Psi(t_0+kT)^{-1}\Psi(t_0+kT)\Psi(t_0)^{-1}\| \\ &\leq \|\Psi(t)\Psi(t_0+kT)^{-1}\| \|\Psi(t_0+kT)\Psi(t_0)^{-1}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \|\Psi(t_0 + Tk)\Psi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq M \|\Psi(t_0 + Tk)\Psi(t_0 + (k-1)T)^{-1}\Psi(t_0 + (k-1)T)\Psi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq M \frac{\eta}{b} \|\Psi(t_0 + (k-1)T)\Psi(t_0)^{-1}\| \\
&\vdots \\
&\leq M \left(\frac{\eta}{b}\right)^k \\
&\leq M e^{-\alpha k T} \\
&= K e^{-\alpha(k+1)T} \\
&\leq K e^{-\alpha(t-t_0)}
\end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Beweis. $\square$

Wir betrachten nun die homogene, lineare Gleichung

$$(6.2.10) \quad \dot{u} = A(t)u$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\exists T > 0 \text{ mit } A(t+T) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ oder $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ eine stetige Abbildung ist. Der Zusammenhang mit periodischen Lösungen wird in Kürze klar werden.

Lemma 6.2.11 *Zu jeder komplexen $n \times n$ Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $\det A \neq 0$ gibt es eine Matrix $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $e^B = E(B, 1) = A$.*

Beweis. Ist $e^B = A$, so gilt für jede nichtsinguläre Matrix C

$$e^{C^{-1}BC} = C^{-1}AC.$$

Daher ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß A in Jordan'scher Normalform gegeben ist. Also hat A die Gestalt (3.1.3) mit Jordan Blöcken der Form (3.1.4). Jeden Block der Form (3.1.4) schreiben wir in der Gestalt

$$\mathcal{B}_k = \lambda_k \mathbb{1} + N_k,$$

wobei N_k der nilpotente Anteil ist. Aufgrund der Annahme, daß die Determinante von A von Null verschieden ist, ist auch $\lambda_k \neq 0$. Wir geben nun eine Matrix B_k an, so daß $e^{B_k} = \mathcal{B}_k$ ist. Wir schreiben $\mathcal{B}_k$ in der Form $\mathcal{B}_k = \lambda_k(\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda_k}N_k)$. Dann ist (für einen geeigneten Zweig des Logarithmus) $B_k = (\log \lambda_k)\mathbb{1} + S_k$ mit

$$S_k = - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j \lambda_k^j} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}^j.$$

Einsetzen in die Potenzreihe gibt das gewünschte Resultat. $\square$

Bemerkung 6.2.12 Man beachte, daß Lemma 6.2.11 nicht für $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\det A \neq 0$ gilt.

Satz 6.2.13 (Floquet) Sei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig und T -periodisch. Jede Fundamentalmatrix der Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ hat die Form

$$\Psi(t) = P(t)E(B, t),$$

wobei B eine konstante und P eine T -periodische Matrix ist.

Beweis. Ist $\Psi(t)$ eine Fundamentalmatrix, so ist $\Psi(t+T)$ auch eine Fundamentalmatrix. Daher gibt es eine nichtsinguläre Matrix C , so daß für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\Psi(t+T) = \Psi(t)C$$

gilt. C hat dann aufgrund der Flußeigenschaft die Darstellung $C = \Psi(T)$. Nach Lemma 6.2.11 gibt es eine Matrix B mit $e^{TB} = C$. Setze

$$P(t) = \Psi(t)E(B, -t).$$

Dann hat man

$$P(t+T) = \Psi(t+T)E(B, -(t+T)) = \Psi(t)E(B, T)E(B, -(t+T)) = P(t).$$

□

Korollar 6.2.14 (Transformation auf konstante Koeffizienten)

Zu T -periodischem $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gibt es eine nichtsinguläre periodische Koordinatentransformation $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, welche die Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten überführt.

Beweis. Seien P, B wie im Satz 6.2.13. Wir setzen $w = (P(t))^{-1}u$. Die Differentialgleichung für w ist dann mit

$$\frac{d}{dt}P(t)w = \dot{P}w + P\dot{w} = \dot{u} = Au$$

und damit

$$\dot{w} = P(t)^{-1}(A(t)P(t) - \dot{P}(t))w.$$

Da $P(t) = \Psi(t)E(B, -t)$ ist, hat man $\dot{P} = A(t)P(t) - P(t)B$. Einsetzen gibt

$$\dot{w} = P(t)^{-1}(A(t)P(t) - A(t)P(t) + P(t)B) = Bw.$$

Die rechte Seite hängt nicht von t ab.

□

Definition 6.2.15 Gegeben sei das homogene, lineare System (3.3.4) $\dot{u} = A(t)u$ mit T -periodischem $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann heißt eine Matrix C , die für eine Fundamentalmatrix $\Psi(t)$ des angegebenen Systems der Beziehung

$$\Psi(t+T) = \Psi(t)C$$

genügt, eine Monodromiematrix von (3.3.4). Die Eigenwerte ρ_j einer Monodromiematrix heißen charakteristische Multiplikatoren von (3.3.4). Ist ρ ein charakteristischer Multiplikator und $\rho = e^{\lambda T}$, so wird λ als charakteristischer Exponent bezeichnet.

Bemerkung 6.2.16 Die charakteristischen Exponenten sind nicht eindeutig bestimmt, die Multiplikatoren jedoch schon. Die charakteristischen Multiplikatoren hängen nicht von der gewählten Fundamentalmatrix ab. Charakteristische Exponenten werden auch oft als Floquet² Multiplikatoren bzw. Floquet Exponenten bezeichnet.

Lemma 6.2.17 Eine komplexe Zahl λ ist charakteristischer Exponent der Gleichung (3.3.4) mit einer T -periodischen rechten Seite A , falls das System (3.3.4) eine nichttriviale Lösung $p(t)e^{\lambda t}$ besitzt, wobei p periodisch mit Periode T ist. Speziell gibt es genau dann eine nichttriviale Lösung $u(t)$ mit Periode T (bzw. $2T$), wenn es den Multiplikator 1 (bzw. -1) gibt.

Beweis. Sei $e^{\lambda t}p(t)$ eine solche Lösung. Dann gibt es ein u_0 und eine Fundamentalmatrix $\Psi(t)$ mit $e^{\lambda t}p(t) = \Psi(t)u_0$. Nach dem Satz von Floquet 6.2.13 kann $\Psi(t)$ in der Form $P(t)E(B, t)$ geschrieben werden. Also ist $e^{\lambda t}p(t) = P(t)E(B, t)u_0$. Da $P(t+T) = P(t)$ und $p(t+T) = p(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, hat man

$$e^{\lambda(t+T)}p(t+T) = P(t+T)E(B, t+T)u_0,$$

und daher ist

$$e^{\lambda t}e^{\lambda T}p(t) = P(t)E(B, t)E(B, T)u_0.$$

Also gilt

$$e^{\lambda T}P(t)E(B, t)u_0 = P(t)E(B, t)E(B, T)u_0.$$

Zusammen genommen ist

$$P(t)E(B, t) \left(E(B, T) - e^{\lambda T} \right) u_0 = 0.$$

Daher ist $\det \left(E(B, T) - e^{\lambda T} \mathbb{1} \right) = 0$. Für die Umkehrung beachtet man einfach, daß aus dem Verschwinden von $\det \left(E(B, T) - e^{\lambda T} \right)$ die Existenz eines Vektors u_0 folgt mit

$$\left(E(B, T) - e^{\lambda T} \right) u_0 = 0.$$

Man kann sogar λ und u_0 so wählen, daß λ Eigenwert von B ist. Dann ist

$$E(B, t)u_0 = e^{\lambda t}u_0,$$

und $P(t)E(B, t)u_0$ ist die gewünschte Lösung. □

²Achille Marie Gaston Floquet (15.12.1847-7.10.1920) war ab 1873 Professor in Belfort, Angers und Clermont-Ferrand ab 1890 Professor für Analysis an der Universität Nancy. Er beschäftigte sich mit Astronomie, Differentialgleichungen und periodischen Funktionen.

Lemma 6.2.18 Seien $\rho_j = e^{\lambda_j T}$ die charakteristischen Multiplikatoren. Dann ist

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = \exp \left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \right)$$

und

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \bmod \left(\frac{2\pi i}{T} \right).$$

Beweis. Sei $\Psi(t)$ die Fundamentalmatrix mit Anfangswert $\Psi(0) = \mathbb{1}$. Dann ist

$$\det C = \det \Psi(T) = \exp \left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \right).$$

Daraus folgt alles weitere. □

Als Hauptsatz über lineare periodische Systeme ergibt sich

Satz 6.2.19 (a) Das lineare, homogene periodische System $\dot{u} = A(t)u$ ist genau dann stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren betragsmäßig kleiner oder gleich eins sind und die, die dem Betrage nach eins sind, gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen.

(b) Das System ist genau dann gleichmäßig asymptotisch stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren dem Betrage nach kleiner eins sind. In diesem Fall kann man eine Fundamentalmatrix abschätzen:

$$\exists K > 0, \alpha < 0 \text{ mit } t - s \geq 0 \implies \|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\| \leq K e^{-\alpha(t-s)}.$$

Beweis. Benutzt im wesentlichen die Ideen wie im autonomen Fall. □

Als Stabilitätskriterium für geschlossene Orbits erhält man schließlich den

Satz 6.2.20 Sei $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der autonomen Gleichung $\dot{u} = f(u)$, wobei die rechte Seite als genügend glatt vorausgesetzt werde. Dann ist $\mathcal{O}$ genau dann orbital stabil, wenn das lineare homogene periodische System

$$(6.2.21) \quad \dot{y} = Df(u(t))y,$$

stabil ist, wobei $u(t)$ eine Lösung im Orbit $\mathcal{O}$ ist.

Ohne vollständigen Beweis wollen wir noch ein Kriterium für orbital asymptotische Stabilität angeben.

Satz 6.2.22 $\mathcal{O}$ ist genau dann orbital asymptotisch stabil, wenn (6.2.21) stabil ist, 1 charakteristischer Multiplikator mit algebraischer Vielfachheit 1 ist und alle von 1 verschiedenen charakteristischen Multiplikatoren dem Betrage nach kleiner als 1 sind.

Beweis. (Skizze)

1. Die Eigenwerte von $D_u \Pi(u_0)$ sind gerade die charakteristischen Multiplikatoren, wobei die Vielfachheit von 1 um eins verringert ist.
2. Man benötigt das dem Satz 6.1.4 vom Spektrum und Stabilität II entsprechende Stabilitätskriterium für Abbildungen, dies wiederum entspricht der Aussage von Satz 6.1.4, nur ist jeweils $\operatorname{Re} \lambda < \Rightarrow 0$ durch $|\lambda| < \Rightarrow 1$ zu ersetzen.

□

6.3 Ljapunov Funktionen

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Bestimmung der Stabilität von Lösungen sind sogenannte Ljapunov-Funktionen. Sie verallgemeinern erste Integrale.

Definition 6.3.1 Es sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Funktion. Eine Funktion $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt erstes Integral, falls w längs Lösungen der Gleichung $\dot{u} = f(u, t)$ konstant bleibt.

Kennt man eine hinreichende Zahl von (linear unabhängigen) ersten Integralen, so kann man die Differentialgleichung als gelöst ansehen. Eine wichtige Klasse von Systemen mit erstem Integral sind Hamilton'sche Systeme. Die Hamilton-Funktion H ist bereits das erste Integral.

Definition 6.3.2 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, f Lipschitz stetig auf U . Wir betrachten die Gleichung $\dot{u} = f(u)$. Sei $W \subset U$ offen. Eine Funktion $V : C^0(W, \mathbb{R})$ heißt Ljapunov Funktion auf W zu $\dot{u} = f(u)$, falls alle partiellen Ableitungen von V existieren und für alle $w \in W$ gilt

$$\langle \nabla V(w), f(w) \rangle \leq 0.$$

Eine unmittelbare Konsequenz dieser Forderung ist, daß für alle $w \in W$ gilt

$$\frac{d}{dt} V(u(t, u_0))|_{t=0} \leq 0.$$

Ist $W = U$, so gilt für jede Lösung $\frac{d}{dt} V(u(t)) \leq 0$.

Satz 6.3.3 Wir betrachten $\dot{u} = f(u)$ mit Ruhelage $u = 0$. Gibt es eine Umgebung W von 0 und eine Ljapunov-Funktion V auf W mit $V \geq 0$ und $V(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, so ist u stabil. Ist $\dot{V}(u)|_{t=0} < 0$ für $u > 0$, so ist 0 asymptotisch stabil.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Stabilitätsaussage. Zu zeigen ist also, daß zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so daß aus $|u_0| < \delta$ folgt, daß das maximale Existenzintervall vorwärts unbeschränkt ist und für alle $t \geq 0$ gilt $|u(t, u_0)| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und $\varepsilon > \eta > 0$ gegeben. Es existiert eine Umgebung $B_\tau(0)$ mit

$$V(B_\tau(0)) \subset [0, \eta].$$

Sei

$$\mu = \inf \{V(x) \mid |x| = \tau\}$$

und $r < \mu$. Dann ist die Zusammenhangskomponente von $V^{-1}[0, r)$ in $B_\tau(0)$ enthalten. Ist nun $\delta < \tau$, so ist für $u_0 \in B_\delta(0)$ die Lösung auf ihrem maximalen Existenzintervall in $B_\tau(0)$ enthalten. Damit ist dieses Existenzintervall unbeschränkt und die Aussage gezeigt. Um zu zeigen, daß die eben gemachte Aussage gilt, wollen wir $V(t) = V(u(t, u_0))$ betrachten. Es gilt $V(0) = V(u_0) < r < \mu$. Angenommen, es gibt ein t_0 mit $V(t_0) = \varepsilon$, dann gibt es ein $0 < t_1 < t_0$ mit $V(t_1) = \mu$. Wegen $\dot{V} \leq 0$ und $V(t_1) = \mu < \varepsilon = V(t_0)$ erhalten wir einen Widerspruch.

Im zweiten Fall müssen wir noch zeigen $u(t, u_0) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann ist klar, $V(t)$ ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent. Angenommen $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = c > 0$. Dann ist $\omega(u_0)$ nichtleer und $0 \notin \omega(u_0)$. Dann ist V konstant auf $\omega(u_0)$. Enthält $\omega(u_0)$ einen regulären Punkt, ist dort aber $\dot{V} < 0$. Also enthält $\omega(u_0)$ keinen regulären Punkt, sei x ein kritischer Punkt in $\omega(u_0)$. Aber auch dann $\dot{V}(t) = \nabla V \cdot \dot{x} = 0$ und damit $x = 0$. $\square$

Nebenbei haben wir noch gezeigt:

Korollar 6.3.4 *Unter den Voraussetzungen von Teil (a) des letzten Satzes gilt: Sei R die Menge $\dot{V} = 0$ und M die größte invariante Menge in R , so ist für jedes u_0 die Grenzmenge $\omega(u_0) \subset M$.*

Der Beweis des Satzes 5.4.3 liefert auch eine Aussage über Gradientensysteme.

Korollar 6.3.5 *Unter den Voraussetzungen von Teil (a) des letzten Satzes gilt: V ist auf Grenzmenge $\omega(u_0)$, $\alpha(u_0)$ konstant.*

Ohne Beweis wollen wir die sogenannten Umkehrsätze angeben.

Satz 6.3.6 (Umkehrsatz) *Die Existenz einer Ljapunov-Funktion mit den im Satz 6.3.3 angegebenen Eigenschaften ist notwendig für Stabilität bzw. asymptotische Stabilität einer Ruhelage.*

Beweis. Findet man z.B. im Buch von HARTMAN [12]. $\square$

Beispiel 6.3.7 1. Wir betrachten $\ddot{x} + g(x) = 0$, mit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(0) = 0$. Das System ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x).\end{aligned}$$

Setze

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds$$

und

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x).$$

Dann ist $\dot{V} = 0$ und die Ruhelage $(x, y) = 0$ stabil, falls $xg(x) > 0$.

2. Für die entsprechende Gleichung mit Dämpfung findet man asymptotische Stabilität.

6.4 Die instabile Mannigfaltigkeit

In der Nähe regulärer Punkte hatten wir mit dem Begradigungssatz eine Art Normalform für den Fluß gefunden. Wir bereits darauf hingewiesen, daß es für kritische Punkte, also für Ruhelagen eine entsprechende Aussage nicht gibt. Daher muß man noch eine zusätzliche Voraussetzung machen um einen solche Satz beweisen zu können.

Definition 6.4.1 1. Eine Ruhelage heißt hyperbolisch, wenn alle Eigenwerte der Linearisierung nichtverschwindenden Realteil besitzen, d.h. für eine Ruhelage x_0 gilt

$$\lambda \in \sigma(Df(x_0)) \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda \neq 0.$$

2. Eine periodische Lösung heißt hyperbolisch, wenn alle Floquetmultiplikatoren vom Betrag ungleich 1 sind.

Gegeben sei nun ein autonomes C^1 -Vektorfeld $v : M \rightarrow TM$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (oder $U \subset \mathbb{R}^n$). Es sei u_0 eine hyperbolische Ruhelage. Es sei $k_s = \dim E_s$ und $k_u = \dim E_u$. Dann gilt der folgende Satz über die Existenz lokaler stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten.

Satz 6.4.2 (Lokale invariante Mannigfaltigkeiten) Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ bzw. $V \subset M$ von u_0 und

1. eine C^1 -Mannigfaltigkeit $W_{loc}^s(u_0) \subset V$ mit $u_0 \in W_{loc}^s(u_0)$ und $T_{u_0}W^s(u_0) = E_s$, so daß für alle $v_0 \in V$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, v_0) = u_0.$$

2. eine C^1 -Mannigfaltigkeit $W_{loc}^u(u_0) \subset V$ mit $u_0 \in \tilde{W}^u(u_0)$ und $T_{u_0} \tilde{W}^s(u_0) = E_u$, so daß für alle $v_0 \in V$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t, v_0) = u_0.$$

Definition 6.4.3 Die Mannigfaltigkeit $W_{loc}^s(u_0)$ heißt eine lokal stabile Mannigfaltigkeit von u_0 . Entsprechend bezeichnet man die Mannigfaltigkeit $W_{loc}^u(u_0)$ als lokal instabile Mannigfaltigkeit.

Für den folgenden Satz nehmen wir an, daß wir entweder auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M arbeiten, oder aber (in der Zeit) globale Existenz von Lösungen gewährleistet sei.

Definition 6.4.4 (Globale invariante Mannigfaltigkeiten) Es sei Φ der zu unserer Differentialgleichung gehörende Fluß, u_0 eine hyperbolische Ruhelage und $W^s(u_0)$, bzw. $W^u(u_0)$ seien lokal stabile, bzw. lokal instabile Mannigfaltigkeiten. Dann

Satz 6.4.5 (Globale invariante Mannigfaltigkeiten) Es seien

$$W^s(u_0) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Phi(W_{loc}^s(u_0), -k)$$

und

$$W^u(u_0) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Phi(W_{loc}^u(u_0), k).$$

Dann sind $W^s(u_0)$ und $W^k(u_0)$ Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Folgt aus dem Satz 6.4.2 und der Tatsache, daß $\Phi(\cdot, k)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein Diffeomorphismus ist. $\square$

Beweis des Satzes 6.4.2. Es reicht die Existenz von $W_{loc}^s(u_0)$ oder $W^u(u_0)$ zu beweisen. Wir beweisen letzteres. Satz 6.1.14 garantiert zu jedem Punkt v_0 im instabilen Unterraum (der hinreichend nahe bei u_0 liegt) genau eine Lösung $u(t)$ mit $P^+u(0) = v_0$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = u_0$, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so daß zu jedem $v_0 \in B_\delta(u_0) \cap E^+$ eine Lösung $u(t, w_0)$ existiert $P^+w_0 = v_0$ und $u(t, w_0) \rightarrow u_0$. Die Eindeutigkeit dieses Wertes w_0 folgt aus dem Beweis des Satzes. Wir setzen $h(v_0) = w_0$. Dann ist $W_{loc}^s(u_0) \cap B_\delta(u_0)$ der Graph von h und es reicht zu zeigen $h \in C^1$ und $Dh(u_0) = 0$. Man sieht relativ leicht, daß der Graph von h lokal invariant ist, d.h. zu jedem Startwert $v_0 = u_0 + w_0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für $|t| < \varepsilon$ die Lösung $u(t, v_0)$ auf dem Graphen von h liegt. Außerdem ist h stetig, wegen Satz 1.4.11.

6.5 Aufgaben

Aufgabe 6.5.1 Es sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine Matrix, deren Eigenwerte alle nicht positiven Realteil besitzen. Man betrachte die homogene, lineare Gleichung $\dot{u} = Au$ und zeige, daß die Ruhelage $u = 0$ genau dann stabil ist, wenn alle Eigenwerte auf der imaginären Achse gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen.

Aufgabe 6.5.2 Man beweise, daß eine Ruhelage w_0 einer autonomen Gleichung instabil ist, wenn es eine nichtkonstante Lösung $u(t, u_0)$ gibt mit $w_0 \in \alpha(u_0)$. Ist w_0 instabil, so gibt es entweder ein u_0 mit $w_0 \in \alpha(u_0)$ oder jede Umgebung U von u_0 enthält eine vollständige Trajektorie.

Aufgabe 6.5.3 Man zeige, daß im Korollar 6.2.14 die Matrix B reell gewählt werden kann, wenn A eine reelle Matrix ist. In diesem Fall muß man zulassen, daß P die doppelte Periode wie A hat.