Kapitel 5

Anfänge einer geometrischen Theorie

5.1 Autonome Systeme

Jetzt wollen wir beginnen, geometrische Begriffe für die Lösung und das Langzeitverhalten einzuführen. Wir beginnen mit der Gleichung

$$\dot{u} = f(u), \tag{5.1.1}$$

wobei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetige Funktion sei. Wir wollen voraussetzen, daß die Lösungen $u(t, u_0)$ (O.B.d.A. ist $t_0 = 0$, da die Gleichung als autonom vorausgesetzt wird.) für $u_0 \in U$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert seien.

Definition 5.1.2 *Eine Abbildung $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U$ heißt* Fluß *oder* Phasenfluß *von (5.1.1), falls für jedes $u_0 \in U$ gilt*

$$\Phi(u_0, t) = u(t, u_0).$$

Lemma 5.1.3 (Eigenschaften eines Flusses) *Ist f in (5.1.1) Lipschitz stetig und ist Φ der zur Gleichung (5.1.1) gehörende Fluß, so gilt*

1. *$\Phi(\cdot, t) : U \to U$ ist ein Homöomorphismus; ist f differenzierbar, so ist $\Phi(\cdot, t)$ ein Diffeomorphismus.*
2. *$\Phi(u, t + s) = \Phi(\Phi(u, s), t)$.*
3. *$\Phi(u, 0) = u \; \forall u \in U$.*

Notation: Für $\Phi(., t)$ schreiben wir auch $\Phi_t(.) : U \to U$.

Beweis. Die erste Aussage folgt, da $u(t, u_0)$ stetig vom Anfangswert abhängt. Ist f differenzierbar, so ist die Lösung nach dem Anfangswert differenzierbar. Die zweite Aussage ist eine direkte Konsequenz des Eindeutigkeitssatzes. Als direkte Folgerung aus der Definition erhalten wir auch die letzte Aussage. □

Definition 5.1.4 *Sei $u(t, t_0, u_0)$ die Lösung der Differentialgleichung (2.1.2), d.h. $\dot{u} = f(u, t)$ mit maximalem Existenzintervall I. Dann nennt man die Menge $T = \{(u(t, t_0, u_0), t) \mid t \in I\}$ die* Trajektorie *der Lösung $u(t, t_0, u_0)$. Ein Pfad oder auch* Orbit *ist die Projektion einer Trajektorie auf die erste Komponente.*

Offensichtlich ist für eine autonome Differentialgleichung der Unterschied zwischen dem Pfad oder Orbit auf der einen Seite und der Trajektorie nicht besonders wichtig.

Lemma 5.1.5 (Trajektorien im erweiterten Phasenraum) *Jeder Punkt (u_0, t_0) liegt auf genau einer Trajektorie.*

Beweis. Folgt sofort aus den Existenz- und Eindeutigkeitssätzen. □

Bemerkung 5.1.6 Daraus wird klar, daß der erweiterte Phasenraum eine disjunkte Vereinigung von Trajektorien ist. Ebenso folgt, daß der Phasenraum einer autonomen Gleichung eine disjunkte Vereinigung von Orbits ist. Man überlege sich dies!

Definition 5.1.7 *Besteht ein Orbit einer Differentialgleichung aus einem einzigen Punkt u_0, so nennt man u_0 eine* Ruhelage *von (2.1.2), bzw. ein* Equilibrium *oder auch eine* Gleichgewichtslage*. Eine Gleichgewichtslage einer autonomen Differentialgleichung nennt man auch einen* kritischen Punkt*, alle anderen Punkte werden als* reguläre Punkte *bezeichnet.*

Definition 5.1.8 *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt* Weg *(im $\mathbb{R}^n$) oder auch Kurve. Dann nennt man $\gamma(a)$ den* Anfangspunkt *und $\gamma(b)$ den* Endpunkt.

Definition 5.1.9 *Ist γ ein Homöomorphismus auf dem Intervall (a, b) oder $[a, b]$, so bezeichnet man das Bild $\{\gamma(t) \mid t \in (a, b)\}$ oder $\{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$ als* Bogen.

Definition 5.1.10 *Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ist $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, so wollen wir das Bild von γ als* Jordan Bogen[1] *bezeichnen. Ist ein Orbit $\mathcal{O}$ einer autonomen Gleichung ein Jordan Bogen, so nennt man $\mathcal{O}$ auch einen* geschlossenen Orbit.

Lemma 5.1.11 *Ein Orbit $\mathcal{O}$ ist genau dann geschlossen, wenn er der Orbit einer nichtkonstanten periodischen Lösung ist.*

Beweis. Zunächst nehmen wir, daß $\mathcal{O}$ geschlossen ist. Sei $u_0 \in \mathcal{O}$ ein Punkt auf diesem Orbit. Dann gibt es aber ein $T > 0$ mit $u(T, u_0) = u(0, u_0) = u_0$. Die Lösung $u(t, u_0)$ ist dann periodisch mit Periode T. Für die Umkehrung nehmen wir an, daß $u(t, u_0)$ eine periodische Lösung mit (minimaler) Periode T sei. Dann ist $\{u(t, u_0) \mid t \in [0, T)\}$ ein Bogen im $\mathbb{R}^n$. Identifiziert man im Intervall $[0, T]$ Anfangs- und Endpunkt, so ist dies homöomorph zu S^1. □

[1] Marie Ennemond Camille Jordan (5.1.1838-22.1.1922) stammte aus Lyon und studierte auch dort. Später wurde er zunächst Prüfer und später Professor an der Ecôle Polytechnique. Er arbeitete in verschiedenen Gebieten der Mathematik, unter anderem auf dem Gebiet "Analysis situs", das wir heute als Topologie bezeichnen.

Definition 5.1.12 *Sei $\dot{u} = f(u)$ eine autonome Differentialgleichung, mit $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist. Eine Teilmenge $V \subset U$ heißt* invariant, *wenn*

$$u_0 \in W \Longrightarrow u(t, u_0) \in W \; \forall t \in \mathbb{R}, \tag{5.1.13}$$

oder anders ausgedrückt, falls

$$\Phi_t V \subset V \; \forall t \in \mathbb{R} \tag{5.1.14}$$

gilt. Entsprechend heißt die Menge V positiv invariant *wenn die Bedingung (5.1.13) oder (5.1.14), für alle $u_0 \in V$ und für alle $t > 0$ erfüllt ist. Gleichermaßen nennen wir V* negativ invariant, *wenn eine der Bedingungen ((5.1.13) oder (5.1.14)) für alle $t < 0$ erfüllt ist.*

Beispiele invarianter Mengen sind Orbits (von Lösungen, die für alle Zeiten definiert sind). Natürlich sind auch beliebige Vereinigungen von Orbits invariante Mengen. Alle invarianten Mengen sind von dieser Gestalt. Trotzdem ist es interessant, spezielle invariante Mengen zu studieren. Wir beginnen mit folgender Definition.

Definition 5.1.15 *Sei $\mathcal{O}$ ein Orbit einer autonomen Differentialgleichung. Mit $\mathcal{O}^+_{u_0}$ bezeichnen wir den* positiven Halborbit *durch $u_0 \in \mathcal{O}$, der für $u_0 \in \mathcal{O}$ definiert ist durch*

$$\mathcal{O}^+_{u_0} = \{u(t, u_0) \mid t \geq 0\}.$$

Entsprechend ist der negative Halborbit *durch die Gleichung*

$$\mathcal{O}^-_{u_0} = \{u(t, u_0) \mid t \leq 0\}.$$

definiert.

Definition 5.1.16 *Sei $\mathcal{O}$ ein Orbit einer autonomen Differentialgleichung und $u(t)$ eine zugehörige Lösung. Mit $\omega(\mathcal{O})$ bezeichnen wir die ω-*Limesmenge *von $\mathcal{O}$. Diese wird definiert als die Menge der Punkte $v \in \mathbb{R}^n$, zu denen eine Folge $\{t_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_\nu \to \infty$ existiert mit $u(t_\nu) \to v$. Entsprechend definiert man die α-*Limesmenge *$\alpha(\mathcal{O})$ als die Menge der Punkte $w \in \mathbb{R}^n$, zu denen eine Folge $\{t_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_\nu \to -\infty$ existiert mit $u(t_\nu) \to w$. Als Synonym für Limesmenge gebrauchen wir oft den Begriff* Grenzmenge.

Lemma 5.1.17 *Die vorstehenden Definitionen hängen nicht von der Wahl der Lösung im Orbit $\mathcal{O}$ ab.*

Beweis. Zwei Lösungen im selben Orbit gehen durch eine Verschiebung auseinander hervor. Gibt es zu $v \in \mathbb{R}^n$ eine Zeitfolge, so daß $u(t_\nu)$ gegen v konvergiert, so konvergiert eine Lösung $\tilde{u}$ die durch eine Zeitverschiebung aus u hervorgeht, d.h. $\tilde{u}(t) = u(t - \tau)$ für die um τ verschobene Zeitfolge gegen v. $\square$

Lemma 5.1.18 (Alternative Charakterisierung der Limesmengen) *Sei $\mathcal{O}$ ein Orbit einer autonomen Differentialgleichung. Dann ist*

$$\omega(\mathcal{O}) = \bigcap_{u \in \mathcal{O}} \overline{\mathcal{O}_u^+}$$

und

$$\alpha(\mathcal{O}) = \bigcap_{u \in \mathcal{O}} \overline{\mathcal{O}_u^-}.$$

Beweis. Einfach nachzuprüfen! □

Definition 5.1.19 *Für $u_0 \in U$ sei $\omega(u_0)$ die* ω-Limesmenge *des eindeutig bestimmten Orbits auf dem u_0 liegt. Entsprechend ist $\alpha(u_0)$ die* α-Limesmenge *des eindeutig bestimmten Orbits von u_0.*

Satz 5.1.20 *Die α- bzw. ω-Limesmengen eines Orbits sind beide abgeschlossen und invariant. Ist der Halborbit $\mathcal{O}_u^+$ (oder $\mathcal{O}_u^-$) beschränkt, so gilt: Die ω-Limesmenge (bzw. die α-Limesmenge) ist*

1. *nichtleer,*
2. *kompakt und*
3. *zusammenhängend.*

Außerdem wird dann der Abstand einer Lösung im Orbit zur Grenzmenge beliebig klein, d.h.

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(u(t, u_0), \omega(u_0)) = 0$$

bzw.

$$\lim_{t \to -\infty} \operatorname{dist}(u(t, u_0), \alpha(u_0)) = 0.$$

Beweis. Wegen der alternativen Charakterisierung der Grenzmengen im Lemma 5.1.18 ist eine Limesmenge ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen und somit abgeschlossen. Die Invarianz läßt sich für beide Grenzmengen in ganz ähnlicher Weise zeigen, deshalb beschränken wir uns auf die ω-Limesmenge. Sei $v \in \omega(\mathcal{O})$. Sei weiterhin u eine Lösung im Orbit $\mathcal{O}$. Wie üblich schreiben wir $u(t, v)$ für die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = f(u), u(0) = v$. Nun gibt es eine Folge $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $\lim_{k \to \infty} u(t_k) = v$ ist. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Wir behaupten, daß die Folge $u(t + t_k)$ für $k \to \infty$ gegen $u(t, v)$ konvergiert. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert (nach Satz 2.2.7) ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß $|v - u_0| < \delta \Rightarrow |u(t, v) - u(t, u_0)| \leq \varepsilon$. Weiter gibt es zu $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $k > N \Rightarrow |u(t_k) - v)| < \delta$. Dann ist aber für $k > N$ wegen $u(t, u(t_k)) = u(t + t_k)$ auch $|u(t + t_k) - u(t, v)| < \varepsilon$. Insbesondere ist $u(t, u_0)$ der Grenzwert der $u(t + t_k)$ und deshalb in $\omega(\mathcal{O})$.

Für die zweite Behauptung beschränken wir uns wieder auf den positiven Halborbit, für den negativen Halborbit geht der Beweis ganz genauso. Sei also $u \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_u^+$ beschränkt. Dann schließt man zunächst, daß für $u \in \mathcal{O}$ der Abschluß des positiven $\overline{\mathcal{O}_u^+}$ nichtleer und kompakt ist. Da offensichtlich je endlich viele der $\overline{\mathcal{O}_u^+}$ nichtleeren Durchschnitt haben, also je endlich viele $\overline{\mathcal{O}_{u_j}^+}$, $u_j \in \mathcal{O}$, nichtleeren Schnitt haben, ist auch der Schnitt

$$\bigcap_{u \in \mathcal{O}} \overline{\mathcal{O}_u^+}$$

nichtleer und natürlich kompakt (man beachte die endliche Durchschnittseigenschaft als Charakterisierung kompakter Mengen.). Der Zusammenhang der Limesmenge folgt unmittelbar (wie?) aus der Konvergenzeigenschaft, die wir zunächst beweisen. Angenommen wir hätten eine Folge $t_k \to \infty$ mit $\mathrm{dist}(u(t_k, u_0), \omega(u_0))$ konvergiert nicht gegen null. Durch Auswahl einer Teilfolge, die wieder mit t_k bezeichnet wird, kann man davon ausgehen, daß

$$\mathrm{dist}(u(t_k, u_0), \omega(u_0)) > \eta \; \forall k \in \mathbb{N}$$

für eine Zahl $\eta > 0$ gilt. Wegen der Beschränktheit des Semiorbits erhält man eine konvergente Teilfolge, deren Grenzelement natürlich in der Grenzmenge $\omega(u_0)$ enthalten ist. Damit haben wir einen Widerspruch. □

Der folgende Satz beschreibt das Verhalten der Lösungen in der Nähe eines regulären Punktes.

Satz 5.1.21 (Begradigungssatz) *Sei u_0 ein regulärer Punkt der autonomen Differentialgleichung (5.1.1), wobei f als Lipschitz stetig vorausgesetzt wird. Dann gibt es Umgebungen W von u_0 und V von 0 im $\mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $\Psi : W \to V$ welcher die Orbits der Gleichung (5.1.1) auf die Orbits der Gleichung*

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.22}$$

im folgenden Sinne abbildet: Sei $u(t, w_0)$ eine Lösung in W, so ist

$$v(t, \Psi(w_0)) = \Psi(u(t, w_0))$$

Lösung des Anfangswertproblems (5.1.22) und $v(0, \Psi(w_0)) = \Psi(w_0)$. Dabei kann V in der Form $(-a, a) \times B_\delta^{n-1}(0)$ für ein $a > 0$ und

$$B_\delta^{n-1} = \{(x_2, \ldots, x_n) \mid |(x_2, \ldots, x_n)| < \delta\}$$

gewählt werden. Ist f differenzierbar, so kann Ψ als Diffeomorphismus gewählt werden.

Die Abbildung 5.1 zeigt das begradigte Vektorfeld und den begradigenden Homöomorphismus.

Beweis. Übungsaufgabe! □

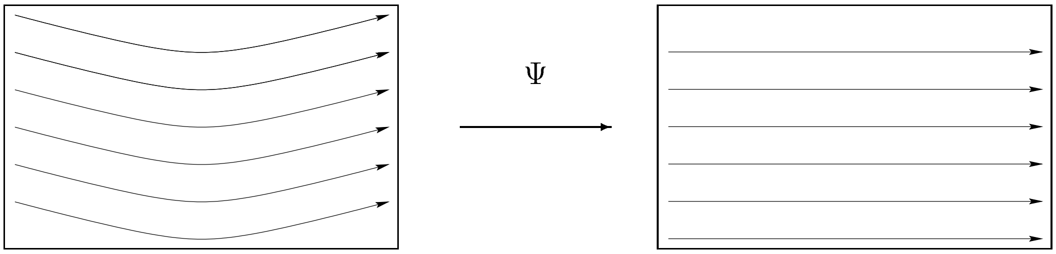

Abbildung 5.1: Begradigung des Vektorfeldes

Bemerkung 5.1.23 Dies ist der erste Satz, der sozusagen eine Normalform einer Differentialgleichung angibt. Eine allgemeine Normalform in der Nähe singulärer Punkte gibt es nicht. Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann man solche Normalformen angeben. Dabei untersucht man das Spektrum der Linearisierung des Vektorfeldes in der Ruhelage. Das Auffinden von Normalformen in der Nähe der kritischer Punkte von autonomen Differentialgleichungen ist heute eine wichtige Aufgabe der Theorie der Differentialgleichungen. Solche (einfache) Gleichungen, die das Verhalten in der Nähe solcher Punkte dann beschreiben, sind unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bekannt.

Definition 5.1.24 *Das Urbild* $\Psi^{-1}(0 \times B_\delta^{n-1})$ *heißt* Transversale *zu* f *im Punkt* u_0.

Definition 5.1.25 *Eine Teilmenge* M *von* U *heißt* minimal, *wenn sie nichtleer, kompakt und invariant ist und keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften enthält.*

Satz 5.1.26 (Existenz minimaler Mengen) *Jede nichtleere, kompakte und invariante Menge* M *enthält eine minimale Menge.*

Beweis. Sei F die Familie der nichtleeren, kompakten und invarianten Teilmengen von M. Da $M \in F$ ist $F \neq \emptyset$. Wir definieren eine Ordnung auf F, indem wir setzen $M_1 > M_2$ genau dann wenn $M_1 \subset M_2$. Hat man nun eine vollständig geordnete Kette K bezüglich dieser Ordnung, so gilt für jede endliche Auswahl $M_1, \ldots, M_n$, daß $\cap_{j=1}^n M_j \neq \emptyset$. Also ist $M_K = \cap_{M \in K} M$ nichtleer, kompakt und invariant. Also existiert eine obere Schranke in F. Das Zorn'sche Lemma garantiert nun die Existenz eines maximalen Elementes. Dies hat alle gewünschten Eigenschaften. □

Definition 5.1.27 *Eine nichtleere, kompakte und invariante Menge* $K \subset U$ *heißt* stabil, *wenn es zu jeder Umgebung* W *von* K *mit* $K \subset W \subset U$ *eine weitere Umgebung* V *von* K, $V \subset W$ *gibt, so daß*

$$u_0 \in V \Longrightarrow u(t, u_0) \in W \ \forall t \geq 0$$

gilt.

Definition 5.1.28 *Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset U$ wird* Attraktor *genannt, wenn $\mathcal{A}$ stabil ist und es eine Umgebung S von $\mathcal{A}$ gibt, so daß*

$$u_0 \in S \Longrightarrow \operatorname{dist}(u(t, u_0), \mathcal{A}) \to_{t\to\infty} 0$$

gilt.

Eine wichtige Aufgabe der qualitativen Theorie von Differentialgleichungen besteht darin, die Attraktoren zu finden und die Feinstruktur des Phasenflusses auf den Attraktoren. Erst in den letzten Jahren haben seltsame Attraktoren (Lorentz Attraktor) und chaotische Systeme viel Aufmerksamkeit auf sich gelenkt. Auch in der Theorie unendlich dimensionaler dynamischer Systeme spielen *globale Attraktoren* eine wichtige Rolle. Unter sehr allgemeinen Umständen sind diese endlich dimensional, und das Verhalten auf dem Attraktor und nahe bei dem Attraktor kann wieder durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden.

5.2 Der Satz von Poincaré-Bendixson

Im vorigen Abschnitt haben wir Existenz und einige Eigenschaften von Limesmengen kennengelernt. Hier wollen wir einen Satz vorstellen, der zu Beginn unseres Jahrhunderts bewiesen wurde, und nach dem schwedischen Mathematiker Ivar Otto Bendixson[2] und dem französischen Mathematiker Jules Henri Poincaré[3] benannt wurde. Der Satz, mit dem wir uns nun beschäftigen wollen, wurde vor kurzem wiederbelebt, indem eine Verallgemeinerung für bestimmte partielle Differentialgleichungen und auch für sogenannte Funktionaldifferentialgleichungen entdeckt wurde. Zuerst noch ein wichtiges Hilfsmittel, der sogenannte Jordan'sche Kurvensatz.

Satz 5.2.1 (Jordan) *Jeder Jordan Bogen zerlegt den $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten, von denen genau eine beschränkt ist.*

Beweis. s. Deimling [6]. □

Satz 5.2.2 (Poincaré-Bendixson) *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz stetig, $\dot{u} = f(u)$ eine autonome Differentialgleichung im $\mathbb{R}^2$ und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung. Sei $u_0 \in \{u(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ist*

1. *$\mathcal{O}^+_{u_0}$ beschränkt, so enthält $\omega(u_0)$ entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit,*

[2]Ivar Otto Bendixson (1.8.1861-29.11.1935) forschte und lehrte an der Universität Stockholm. Er befaßte sich mit algebraischen Fragen (Auflösung von Gleichungen) wie auch mit Differentialgleichungen

[3]Jules Henri Poincaré (29.4.1854-17.7.1912) war ein Zeitgenosse Hilberts und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, wie auch dieses Jahrhunderts. Er führte topologische Methoden bei der Untersuchung analytischer Probleme ein und wurde damit auch zu einem der Mitbegründer der algebraischen Topologie.

2. *$\mathcal{O}^-_{u_0}$ beschränkt, so enthält $\alpha(u_0)$ entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit.*

3. *Sind sowohl $\mathcal{O}^+_{u_0}$, wie auch $\mathcal{O}^-_{u_0}$ beschränkt, so enthalten beide Grenzmengen jeweils entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit.*

Beweis. Die Beweise sind für die beiden Grenzmengen identisch, wir führen deshalb nur den Beweis für die ω-Limesmenge aus. Sei $\mathbf{U}_0 \in \omega(u_0)$ ein regulärer Punkt. Wegen der Invarianz von Grenzmengen ist auch der Orbit durch $\mathbf{U}_0$ wieder in $\omega(u_0)$ und natürlich dann auch dessen Grenzmenge. Dies sieht man ein, indem man annimmt, daß $\mathbf{U}_1$ ein Punkt in der Grenzmenge $\omega(\mathbf{U}_0)$ ist. Dann gibt es eine Folge $t_n \to \infty$, so daß $u(t_n, \mathbf{U}_0)$ gegen $\mathbf{U}_1$ konvergiert. Für jedes n existiert eine Folge $t_{n_k} \to \infty$ für $k \to \infty$ mit $u(t_{n_k}, u_0) \to u(t_n, \mathbf{U}_0)$ für $k \to \infty$. Dann gibt es eine Folge, $t_{n_{k_j}}$, so daß $u(t_{n_{k_j}}, u_0)$ gegen $\mathbf{U}_1$ konvergiert. Man führe das Argument aus. Wir wollen zeigen, daß entweder der Orbit $\mathcal{O}$ durch $\mathbf{U}_0$ geschlossen ist, oder die Grenzmenge von $\mathcal{O}$ aus Ruhelagen besteht. Die weiteren Schritte des Beweises wollen wir in einige Lemmata aufgliedern. Der Beweis beruht auf dem Existenzsatz für minimale Mengen und ist demzufolge nicht konstruktiv.

Lemma 5.2.3 *Sei w_0 ein regulärer Punkt und L eine abgeschlossene Transversale zu f in w_0. D.h. L ist eine Transversale, die durch eine Abbildung γ beschrieben wird, deren Definitionsbereich ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ ist. Sei $L_0 = \gamma(\mathrm{int}\ (I))$. Sei $V \subset L_0$ definiert durch*

$$V = \{w \in L_0 \mid \exists t_w > 0 : \ u(t_w, w) \in L_0 \text{ und } u(t, w) \notin L \ \forall t \in (0, t_w)\}.$$

Sei $W = \gamma^{-1}(V) \subset I$ und $g : W \to I$ definiert durch

$$g(y) = \gamma^{-1} u(t_{\gamma(y)}, \gamma(y)).$$

Dann ist

1. *W offen;*

2. *g stetig;*

3. *$g^k(w)$ ist monoton, wobei $g^k(w) = g(g^{k-1}(w))$, solange es definiert ist.*

Beweis. Wegen der stetigen Abhängigkeit und der Tatsache, daß L Transversale ist, folgt, daß W offen ist. Ebenso erhält man die Stetigkeit von g. Nun betrachten wir den Jordan Bogen, der für einen Punkt $w \in V$ aus $\{u(t, w) \mid t \in [0, t_w]\}$ und dem Abschnitt in L_0 zwischen w und $u(t_w, w)$ besteht. Ist $w = u(t_w, w)$, so ist diese Lösung periodisch und damit ist für $y \in \gamma^{-1}(w)$, also $g^k(y) = y$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Angenommen, es ist $g^k(y) > g^{k-1}(y)$ und $g^k(y) \in W$. Dieser Jordan Bogen zerlegt die Ebene in ein beschränktes Gebiet G_b und ein unbeschränktes Gebiet G_u. Da L Transversale ist, können Lösungen diese nur in eine Richtung überqueren. Betrachte $\gamma([g^k(y), b])$. Dieses Stück der Transversale liegt entweder in G_b oder in G_u. Sonst müßte ein Orbit den Abschnitt zwischen w und $u(t_w, w)$ in anderer Richtung queren als der Orbit durch $\gamma^{-1}(g^k(w))$. Demzufolge liegt, falls $g^{k+1}(w)$ definiert ist, dieses auch in $[g^k(w), 1]$. Damit ist per Induktion dieses Lemma gezeigt. ☐

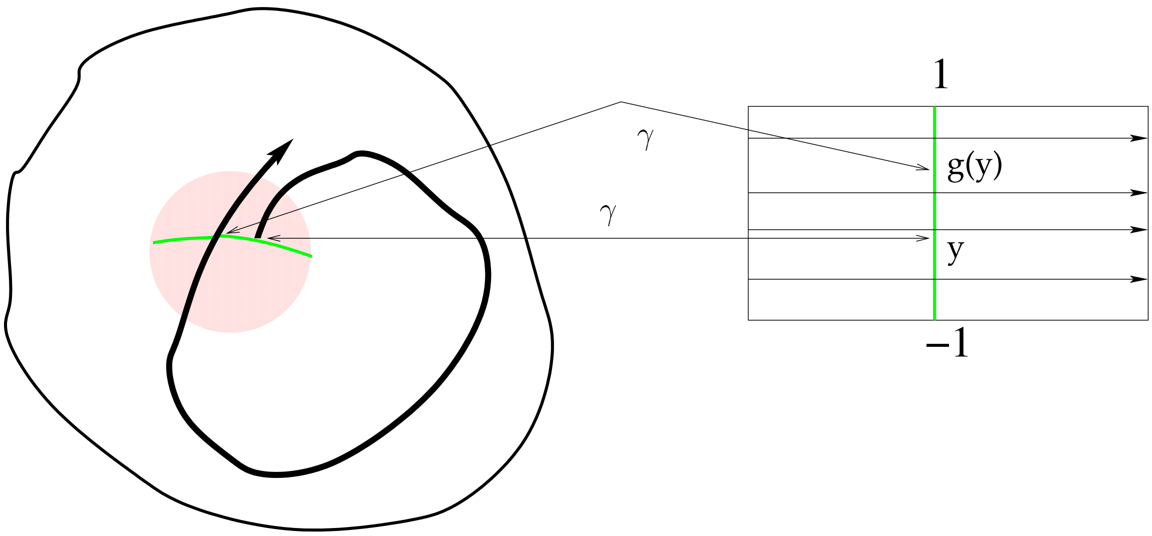

Abbildung 5.2: Konstruktion von g

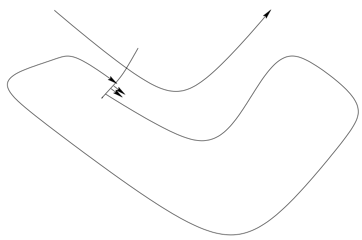

Abbildung 5.3: Transversale und Jordan Bogen

Korollar 5.2.4 *Die ω-Limesmenge eines Orbits kann L_0 (das Innere einer Transversale) in höchstens einem Punkt schneiden. Ist $w_0 \in \omega(\mathcal{O}) \cap L_0$, so ist entweder $\omega(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, also $\mathcal{O}$ geschlossen, oder zu einer Lösung $u(t)$ in $\mathcal{O}$ existiert eine Zeitfolge $t_n \to \infty$ mit $u(t_n) \in L_0$ und $u(t_n) \to w_0$ (monoton, wie zuvor).*

Beweis. Seien $W,\ V,\ \Psi$ wie im Begradigungssatz 5.1.21. Da w_0 Limes einer Folge $u(t_n, u_0)$ ist, gibt es zu jeder Umgebung von w_0 unendlich viele der Punkte $u(t_n, u_0)$. Sei $B_\varepsilon(w_0)$ eine Kugel um w_0, die vollständig in der Umgebung W enthalten ist. Da jede Lösung mit Anfangswert in $B_\varepsilon(w_0)$ sowohl die Umgebung W verläßt, wie auch die Transversale schneiden muß, hat man unendlich viele Schnittpunkte mit L_0, falls $\mathcal{O}_{u_0} \cap \mathcal{O}_{w_0} = \emptyset$. Seien nun $u(t^n, u_0)$ die Schnittpunkte der Lösung u mit L_0. Wegen des vorhergehenden Lemmas hat man die monotone Konvergenz. Daraus folgt auch die Eindeutigkeit. □

Korollar 5.2.5 *Falls der positive Halborbit $\mathcal{O}_u^+$ und $\omega(\mathcal{O}_u^+)$ eines regulären Punktes u einen gemeinsamen Punkt haben, so ist $\mathcal{O}$ geschlossen.*

Beweis. Ist $u_0 \in \mathcal{O}_u^+ \cap \omega(\mathcal{O}_u^+)$, so existiert eine Transversale zu f durch u_0. Wäre $\omega(\mathcal{O}_u^+) \neq \mathcal{O}$, so gäbe es eine Folge $t_k \to_{k\to\infty} \infty$ mit $u(t_k) \in L_0$ und $u(t_k) \to u_0$ (monoton). Da u_0 in $\mathcal{O}_u^+$ liegt, widerspricht dies der monotonen Konvergenz. Damit folgt der Satz aus Korollar 5.2.4. □

Lemma 5.2.6 *Ist M eine beschränkte minimale Menge, so ist M entweder eine periodische Lösung oder eine Ruhelage.*

Beweis. Jeder Orbit in M hat nichtleere Grenzmengen (wegen der Beschränktheit von M). Diese sind kompakt und invariant. Da M minimal ist, fallen sie mit dem Orbit zusammen:

$$\left.\begin{array}{rcl}\alpha(\mathcal{O}) & \subset & M \\ \omega(\mathcal{O}) & \subset & M\end{array}\right\} M \text{ minimal} \Rightarrow \alpha(\mathcal{O}) = M = \omega(\mathcal{O}).$$

Daher ist $\mathcal{O} \subset \omega(\mathcal{O})$. Entweder M enthält einen regulären Punkt, dann ist der zugehörige Orbit periodisch. Im anderen Fall besteht M aus einer einzigen Ruhelage. □

Nun folgt der Satz von Poincaré-Bendixson unmittelbar: Die ω-Limesmenge ist nichtleer, kompakt und invariant und enthält demzufolge eine minimale Menge. Diese hat die gewünschte Gestalt.

Wir wollen noch etwas mehr zeigen, nämlich daß die Limesmenge einer Lösung im Orbit selbst schon (fast) minimal ist. Dies ergibt einen zweiten Beweis, der nicht auf dem Zorn'schen Lemma beruht.

Lemma 5.2.7 *Sei $\mathcal{O}_{\mathbf{U}_0}$ ein Orbit in der Grenzmenge $\omega(u_0)$. Ist w_0 ein regulärer Punkt in $\mathcal{O}_{\mathbf{U}_0}$, so hat man folgende Alternative:*

1. *$\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ enthält einen geschlossenen Orbit $\mathcal{O}_1$. Dann ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{w_0}$.*

2. *$\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ enthält keinen regulären Punkt.*

Beweis. Angenommen v_0 ist ein regulärer Punkt in $\mathcal{O}_{w_0}$. Wir müssen zeigen, daß erstens der Orbit $\mathcal{O}_{v_0}$ geschlossen ist und zweitens mit dem Orbit $\mathcal{O}_{w_0}$ zusammenfällt. Sei L eine abgeschlossene Transversale zu f in v_0 mit Innerem L_0. Dann kann $u(t, w_0)$ die Transversale L_0 wegen Korollar 5.2.4 in höchstens einem Punkt schneiden. Andererseits gibt es eine Folge $t_k \to_{k\to\infty} \infty$, so daß $u(t_k) \to w_0$ konvergiert. Wegen des Begradigungssatzes schneidet jede Lösung, die dem Punkt v_0 nahe kommt auch die Transversale in einem Punkt nahe v_0. Also gibt es ein k_0, so daß aus $k > k_0$ folgt $u(t_k) = v_0$. Damit ist $u(t)$ periodisch und es folgt die erste Aussage. □

Wir bemerken, daß die zweite Möglichkeit noch genauer formuliert werden kann, entweder $\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ besteht aus einer Ruhelage oder unendlich vielen. Dies folgt u.a. aus dem nächsten Korollar, mit dem man genauere Aussagen über die Struktur der Grenzmengen macht. Wir fassen diese in der folgenden Aussage zusammen.

Korollar 5.2.8 (Struktur der Grenzmengen) *Sei f wie im Satz und habe in U nur endlich viele kritische Punkte. Es sei u eine halbseitig beschränkte Lösung. Dann besteht die entsprechende Limesmenge entweder aus*

1. *einer endlichen Anzahl von Ruhelagen $\mathbf{U}_\ell$, $\ell = 1, \ldots, m$ und m Lösungen u_ℓ $\ell = 1, \ldots, m$ mit $u_\ell(t) \to_{t\to-\infty} \mathbf{U}_\ell$ und $u_\ell(t) \to_{t\to\infty} \mathbf{U}_{\ell+1(\mathrm{mod}\, m)}$ und einer nicht bestimmten Zahl von Lösungen $u_{k,\ell}(t, u_0)$ mit $\omega(u_0) = \alpha(u_0) = \mathbf{U}_\ell$, die wir als* Schleifen *bezeichnen wollen, oder*

2. *einem periodischen Orbit.*

Beweis. Dies folgt aus dem Beweis des Satzes 5.2.2. Angenommen, $\mathcal{O}$ ist ein Orbit in $\omega(u_0)$, $u_0 = u(0)$. Entweder dieser korrespondiert zu einer Ruhelage oder einer periodischen Lösung oder er enthält einen regulären Punkt und ist nicht geschlossen. Im zweiten Fall ist der geschlossene Orbit die gesamte Grenzmenge, nach Lemma 5.2.7. Im dritten Fall enthält die Grenzmenge keinen regulären Punkt. Also ist die Grenzmenge in der diskreten Menge der Ruhelagen enthalten und besteht wegen des Zusammenhangs von Grenzmengen aus einer einzigen Ruhelage. Auf diese Weise kann man jedem Orbit mit regulären Punkten genau eine Ruhelage in der ω- und eine in der α-Limesmenge zuordnen. Der Satz ist gezeigt, wenn diese Zuordnung injektiv auf einer Teilmenge ist, d.h. eine Teilmenge der Orbits mit regulären Punkten existiert, so daß je zwei verschiedene Orbits verschiedene Grenzmengen haben. Dies folgt durch die Betrachtung von Transversalen in verschiedenen regulären Punkten. □

Korollar 5.2.9 *Ist $\mathcal{O}^+$ ein beschränkter Halborbit und enthält $\omega(\mathcal{O}^+)$ mindestens einen regulären Punkt und genau eine Ruhelage U_0, so besteht $\omega(\mathcal{O}^+)$ aus mindestens zwei Orbits, nämlich $\{\mathbf{U}_0\}$ und $\mathcal{O}_0$ mit*

$$\alpha(\mathcal{O}_0) = \omega(\mathcal{O}_0) = \{\mathbf{U}_0\}$$

und eventuell weiteren Orbits (Schleifen) wie in Korollar 5.2.8 im Punkt 1.

Definition 5.2.10 *(a) Sind* $\mathbf{U}_1$*,* $\mathbf{U}_2$ *Ruhelagen und ist* $u(t, u_0)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* $\dot{u} = f(u)$ *mit* $\omega(u_0) = \mathbf{U}_2$ *und* $\alpha(u_0) = \mathbf{U}_1$*, so nennt man den zugehörigen Orbit einen heteroklinen Orbit. Man spricht auch von einem verbindenden Orbit (engl. connecting orbit).*
(b) Sind in der Definition des Teils (a) die Punkte $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ *gleich, so wird der in (a) beschriebene Orbit als* homokliner Orbit *bezeichnet.*

Bemerkung 5.2.11 *Mit dieser Terminologie besteht die* ω*-Limesmenge einer beschränkten Lösung eines zweidimensionalen autonomen Systems entweder aus einem periodischen Orbit oder entweder aus einer Ruhelage und homoklinen Orbits oder aus endlich vielen Ruhelagen und einer gleichen Anzahl von heteroklinen Orbits und einer unbestimmten Zahl von homoklinen Orbits (falls nur endlich viele kritische Punkte vorhanden sind).*

Definition 5.2.12 *Eine offene Teilmenge* $U \subset \mathbb{R}^2$ *heißt* einfach zusammenhängend*, wenn sie homöomorph zur offenen Einheitskugel ist.*

Für den Beweis des nächsten Satzes möchte ich ein Ergebnis zitieren, dessen Beweis z.B. in [4] zu finden ist.

Satz 5.2.13 *Jede stetige Abbildung des abgeschlossenen Einheitskreises in sich hat einen Fixpunkt.*

Satz 5.2.14 *Gegeben sei eine Differentialgleichung wie im Satz 5.2.2. Die Menge* $U \subset \mathbb{R}^2$ *sei einfach zusammenhängend. Dann umschließt jeder periodische Orbit eine Ruhelage.*

Bemerkung 5.2.15 Eine periodische Lösung entspricht einem geschlossenen Orbit, dieser wiederum ist eine Jordankurve. Nach dem Jordan'schen Satz zerlegt der Orbit den $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten, von denen eine beschränkt ist. Die Aussage des Satzes ist, daß die beschränkte Komponente einen stationären Punkt enthält. Da U einfach zusammenhängend ist, ist auch die beschränkte Komponente einfach zusammenhängend und damit homöomorph zum offenen Einheitskreis. Diese an sich recht anschauliche Behauptung wird in der Funktionentheorie bewiesen.

Beweis. Sei G_b die beschränkte Komponente, die von dem geschlossenen Orbit nach dem Jordan'schen Kurvensatz definiert wird. Weiter sei H deren Abschluß. Zu jedem $\tau > 0$ betrachten wir die Abbildung $\Phi_\tau : H \to H$. Es ist klar, daß wegen des Eindeutigkeitssatzes die Menge H invariant ist. Da H homöomorph zum abgeschlossenen Einheitskreis ist, hat jede Abbildung Φ_τ einen Fixpunkt u_τ. Ist nun $\{\tau_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine gegen Null konvergierende Folge, und u_m eine Folge von Fixpunkten von Φ_{τ_m}, so kann man o.B.d.A. davon ausgehen, daß die Menge u_m gegen u^* konvergiert (nach Übergang zu einer Teilfolge). Zu jedem $t > 0$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert eine Zahl $k_m(t)$ mit der Eigenschaft $k_m(t)\tau_m \leq t < (k_m(t) + 1)\tau_m$. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} |\Phi_t(u^*) - u^*| &\leq |\Phi_t(u^*) - \Phi_t(u_m)| + |\Phi_t(u_m) - u_m| + |u_m - u^*| \\ &= |\Phi_t(u^*) - \Phi_t(u_m)| + |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - u_m| + |u_m - u^*|. \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Term werden aufgrund der Konvergenz von $u_m \to u^*$ und der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten klein. Für den mittleren Ausdruck brauchen wir eine gewisse Gleichmäßigkeit der Konvergenz von $\Phi_t(\cdot) \to \mathbb{1}$ für $t \to 0$. Wir umgehen dies mit folgender Abschätzung::

$$|\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - u_m| \leq |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - \Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u^*)| + |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u^*) - u^*| + |u^* - u_m|$$

Hier wird wieder der erste und der letzte Ausdruck klein, wegen der Konvergenz $u_m \to u^*$ und der stetigen Abhängigkeit. Der mittlere Ausdruck wird klein, da

$$t - k_m(t)\tau_m \to 0$$

konvergiert. □

5.3 Das Wazewski Prinzip

Der Satz von Poincaré-Bendixson gibt eine Art von topologischem Prinzip, um Lösungen bestimmter Art zu garantieren. Wir wollen hier ein weiteres solches Prinzip kennenlernen. Es gehört eigentlich nicht unter die Überschrift „Autonome Gleichungen“, denn wir können hier auch nichtautonome Gleichungen zulassen. Die Anwendungen betreffen jedoch zumeist autonome Probleme, und deshalb ist es vielleicht gerechtfertigt, dieses Prinzip, das den Namen des polnischen Mathematikers Wazewski[4] trägt, hier im Anschluß an den Satz von Poincaré-Bendixson zu präsentieren. Wir beginnen mit einem Spezialfall einer Definition aus der Topologie.

Definition 5.3.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Menge $V \subset U$ heißt* Retrakt *von U, falls es eine stetige Abbildung $\pi : U \to V$ gibt mit den Eigenschaften $\pi_{|V} : V \to V = \mathbb{1}_{|V}$. Die Abbildung π wird* Retraktion *genannt.*

Beispiel 5.3.2 Jede nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Retrakt. Es reicht den Fall zu betrachten, daß $\mathbb{R}^n$ der lineare Span von Punkten in V ist. Man wählt einen Punkt x_0 in V und definiert die Abbildung $\pi(x) = x$, falls $x \in V$ und $x_0 + \lambda\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$ für x außerhalb V, wobei λ so gewählt ist, daß der Punkt auf ∂V liegt und zwar zwischen x_0 und x.
Ein einfaches Argument zeigt, daß keine nichtleere offene Menge $V \neq \mathbb{R}^n$ Retrakt des $\mathbb{R}^n$ ist.
Der Rand des Einheitskreises ist kein Retrakt der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Gleiches gilt in höheren Dimensionen. Der Beweis dieser Aussage beruht auf dem Brouwer'schen Fixpunktsatz.
Eine nichtzusammenhängende Menge ist kein Retrakt einer zusammenhängenden Menge. Auch dies sollte man sich zur Übung überlegen.

[4]Tadeus Wazewski(24.9.1896-5.9.1972) war wesentlicher Vertreter einer polnischen Schule, die sich topologische Ideen beim Studium von Differentialgleichungen zu Nutze machte. Er litt unter der deutschen Besetzung Polens und wurde für längere Zeit im Konzentrationslager Sachsenhausen interniert.

Definition 5.3.3 *Sei $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f : W \to \mathbb{R}^n$ in der ersten Komponente Lipschitz stetig. Weiter sei W^0 eine offene Teilmenge von W, ∂W^0 der Rand von W^0 und $\overline{W^0}$ der Abschluß von W^0. Ein* Austrittspunkt *von W^0 für die Differentialgleichung $\dot{u} = f(u,t)$ ist ein Paar $(u_0, t_0) \in \partial W^0$, so daß ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $(u(t, t_0, u_0), t)$ für $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ in W^0 enthalten ist. Ein Austrittspunkt wird* echter Austrittspunkt *genannt, falls es ein Intervall $(t_0, t_0 + \delta)$ gibt, so daß für $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ die Lösung $(u(t, t_0, u_0), t)$ außerhalb von $\overline{W^0}$ ist. Mit W^0_a bezeichnen wir die Menge der Austrittspunkte, mit W^0_{sa} die Menge der echten (strikten) Austrittspunkte.*

Satz 5.3.4 *Sei $f : W \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich der ersten Komponente Lipschitz stetig. Jeder Austrittspunkt einer offenen Teilmenge W^0 von W sei echter Austrittspunkt, d.h. $W^0_a = W^0_{sa}$. Sei $S \subset W^0 \cup W^0_a$ nichtleer. Angenommen, $S \cap W^0_a$ ist kein Retrakt von S, aber ein Retrakt von W^0_a. Dann gibt es einen Anfangswert $(u_0, t_0) \in S$, so daß $(u(t, t_0, u_0), t)$ auf dem maximalen (rechtsseitigen) Existenzintervall in W^0 enthalten ist.*

Definition 5.3.5 *Die in diesem Satz dargestellte Existenzaussage wird als* Wazewski Prinzip *bezeichnet.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Widerspruch. Unter der Annahme, daß der Satz falsch ist, konstruieren wir eine Retraktion, d.h. eine Abbildung mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften von S auf $S \cap W^0_a$. Zu jedem Paar $(u_0, t_0) \in S \cap W^0$ existiert ein $t_1 > t_0$, so daß für $t \in (t_0, t_1)$ die Lösung $(u(t, t_0, u_0),) \in W^0$ ist, und für t_1 gilt $(u(t_1, t_0, u_0), t_1) \in \partial W^0$. Insbesondere ist $(u(t_1, t_0, u_0), t_1) \in W^0_a$. Wir definieren eine Abbildung $\pi : S \to W^0_a$ durch $\pi(u_0, t_0) = (u(t_1, t_0, u_0), t_1)$ falls $(u_0, t_0) \notin W^0_a$ und $\pi(u_0, t_0) = (u_0, t_0)$, falls $(u_0, t_0) \in W^0_a$. Dann ist π stetig. Dies folgt, da jeder Austrittspunkt echter Austrittspunkt ist. Sei nun $\tau : W^0_a \to S \cap W^0_a$ eine Retraktion. Dann ist $\tau \circ \pi$ eine Retraktion von S auf $S \cap W^0_a$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Bleibt nur noch zu überlegen, warum $S \cap W^0 \neq \emptyset$ ist. Falls dies leer wäre. so wäre $S \subset W^0_a$ und $S \cap W^0_a = S$ ist ein Retrakt von S im Gegensatz zur Annahme. □

Beispiel 5.3.6 1.) Wir betrachten zunächst ein nichtautonomes Beispiel. Gegeben sei eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in der ersten Komponente Lipschitz stetig sei. Wir nehmen an, daß es zwei Zahlen $u_1 < u_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(u_1, t) < 0 \text{ und } f(u_2, t) > 0.$$

Dann gibt es eine Lösung $u(t)$ von $\dot{u} = f(u,t)$ mit $u_1 < u(t) < u_2 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Sei

$$W^0 = \{(u,t) \mid u_1 < u < u_2\},$$

siehe Abbildung 5.4. Alle Punkte auf den Geraden $u = u_1$, bzw. $u = u_2$ sind Austrittspunkte, sogar echte Austrittspunkte. Sei

$$S = \{(u, 0) \mid u \in [u_1, u_2]\}.$$

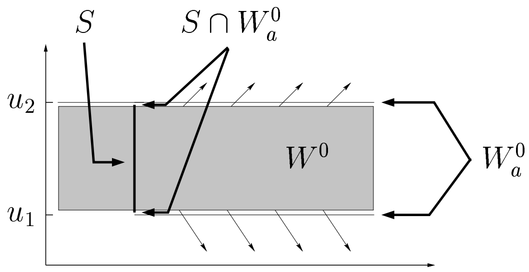

Abbildung 5.4: Wazewski Prinzip: erstes Beispiel

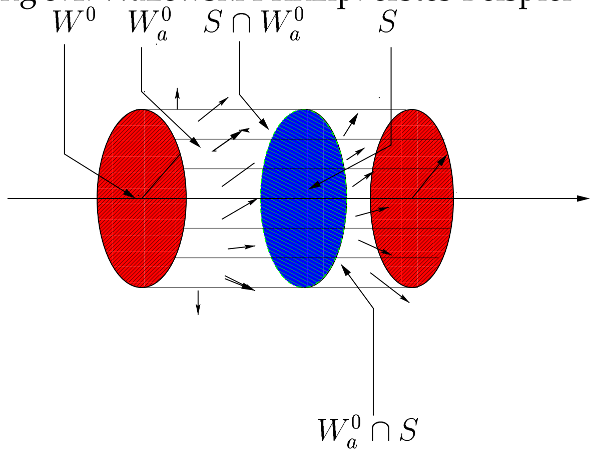

Abbildung 5.5: Das erste Beispiel in höherer Dimension

Dann ist die Menge $S \cap W_a^0 = \{(u_1, 0), (u_2, 0)\}$. Dies ist kein Retrakt von S, aber ein Retrakt von W_a^0. Damit existiert eine Lösung $u(t, u_0)$, mit $u_0 \in (u_1, u_2)$, die für alle positiven Zeiten in W^0 bleibt. Da W^0 negativ invariant ist, bleibt diese Lösung für alle Zeiten in W^0. Ein ähnliches Argument funktioniert, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt. Auch dort ist der Rand einer Kugel nicht Retrakt der Kugel, aber Retrakt des entsprechenden Zylinders, vgl. Abbildung 5.5.
Man kann dies auf die Problemstellung von Aufgabe 3.6.2 anwenden. Wir schauen uns nur die eindimensionale Situation an (in höheren Dimensionen hat man das gleiche Argument). Sei $\dot{u} = \lambda u + f(t)$, $\lambda \neq 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann existieren Zahlen $u_1 < 0 < u_2$ mit $\lambda u_1 + f(t) < 0 < \lambda u_2 + f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das vorstehende Argument ist anwendbar, und man erhält eine beschränkte Lösung. Eine Eindeutigkeitsaussage kann man von einem solchen Prinzip nicht erwarten.

2.) Wir betrachten die Abbildung 5.6. Hier schließt man auf die Existenz einer Lösung, die für positive Zeiten in W^0 bleibt. Offenkundig ist besteht $S \cap W_a^0$ aus zwei Komponenten, während S zusammenhängend ist. Da $W_a^0 = S \cap W_a^0$, ist dies offenkundig ein Retrakt von W_a^0, jedoch kein Retrakt von S. In der angedeuteten zweidimensionalen Situation kann man dann mit dem Satz von Poincaré-Bendixson schließen, daß W^0 sogar eine Ruhelage oder einen geschlossenen Orbit enthält.

3.) Wir erwähnen eine weitere Anwendung, die die Mächtigkeit des Wazewski-Prinzips aufzeigt, jedoch für eine vollständige Begründung mehr Kenntnisse aus der Topologie

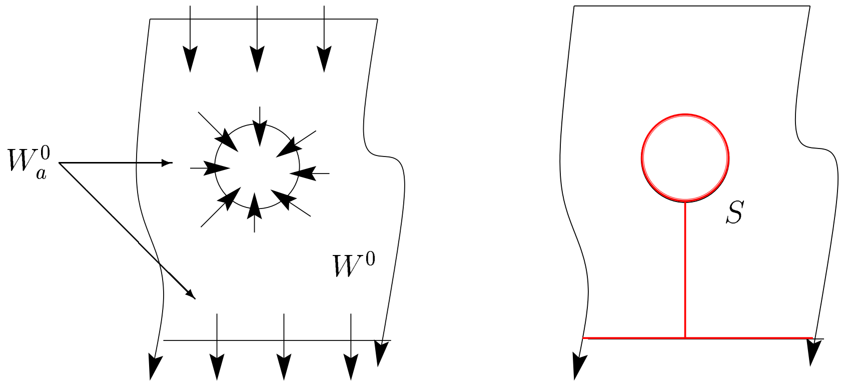

Abbildung 5.6: Wazewski-Prinzip: zweites Beispiel, in der rechten Darstellung die Menge S.

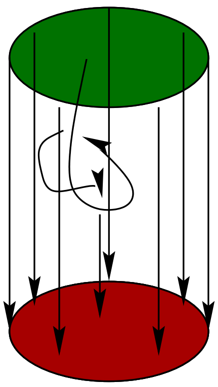

Abbildung 5.7: Ein etwas komplizierteres Beispiel

erfordert, als wir zugrunde legen möchten. Dies ist ein Zylinder mit flußinvariantem Mantel, wobei das Vektorfeld am Boden nach außen gerichtet ist, am Deckel nach innen. Allein die Existenz einer Lösung mit dem angedeuteten Knoten impliziert, daß es eine Lösung gibt, die für alle Zeiten im Inneren bleibt.

5.4 Gradientensysteme

Unter Gradientensystemen versteht man Differentialgleichungen, die durch eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bzw. $F : M \to \mathbb{R}$ im folgenden Sinne gegeben sind: es sei $f = \nabla F$ und

$$\dot{u} = -f(u)$$

die zu untersuchende gewöhnliche Differentialgleichung. Um den Gradienten einer reellwertigen differenzierbaren Funktion auf einer Mannigfaltigkeit erklären zu können, benötigen wir allerdings noch eine zusätzliche Struktur.

Definition 5.4.1 *Eine Mannigfaltigkeit M heißt* Riemannsche Mannigfaltigkeit, *wenn es auf jedem Tangentialraum T_xM ein Skalarprodukt*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_xM}$$

gibt, das in folgendem Sinne differenzierbar ist: für jede Karte (U_x, τ_x) und für je zwei differenzierbare Vektorfelder $X, Y : U_x \to TM|_{U_x}$ bei x ist die Funktion

$$g(X,Y) : U \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle X(x), Y(x) \rangle_{T_xM},$$

differenzierbar.

Definition 5.4.2 *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Es sei df die zugehörige 1-Form und für festes $x \in M$ ist*

$$\nabla f(x)$$

definiert durch

$$\langle \nabla f(x), v \rangle_{T_xM} = df(x)(v)$$

für alle $v \in T_xM$.

Hat man eine Lösung $u(t)$ dieser gewöhnlichen Differentialgleichung, so erhält man für

$$\frac{d}{dt}F(u(t)) = \langle \nabla F(u(t), \dot{u}(t) \rangle = -\langle f(u(t)), f(u(t)) \rangle \leq 0.$$

Genauer wird dieser Ausdruck genau dann null, wenn $f(u(t)) = 0$, d.h. wenn $u(t)$ eine Ruhelage ist. Diese einfache Beobachtung hat weitreichende Konsequenzen.

Satz 5.4.3 *In einem Gradientensystem bestehen die α- und ω-Grenzmengen jeweils aus stationären Lösungen.*

Beweis. Angenommen, $w_1,\ w_2 \in \omega(\mathcal{O})$ sind zwei Punkte in der ω-Grenzmenge des Orbits $\mathcal{O}$ mit $F(w_2) < F(w_1)$. Sei u eine Lösung im Orbit und $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zeitfolge mit $t_n \to \infty$ und $u(t_n) \to w_2$. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so daß $|F(u(t_n)) - F(w_2)| < \frac{1}{2}|F(w_1) - F(w_2)|$. Dann ist für $t > t_n$ wegen der Gradientenstruktur auch $F(u(t)) < F(u(t_n))$, und insbesondere gilt

$$F(u(t)) < F(w_1) - \frac{1}{2}(F(w_1) - F(w_2)) = \frac{1}{2}(F(w_1) + F(w_2)),$$

also ist $F(u(t))$ von $F(w_1)$ wegbeschränkt. Demzufolge gibt es keine Folge mit $t_m \to \infty$ mit $u(t_m) \to w_1$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, daß $F(w_1) \neq F(w_2)$ ist und daher folgt $F(w_1) = F(w_2)$. Längs Trajektorien in der Grenzmenge ist also F konstant, also nach der Vorüberlegung $f = 0$, und daher ist eine solche Trajektorie die einer Ruhelage. $\square$

Definition 5.4.4 *Wir nennen die Mengen $F = const$* Niveaumengen. *Insbesondere sagen wir, zwei Punkte $w_1,\ w_2$ sind von* verschiedenem Niveau, *falls $F(w_1) \neq F(w_2)$.*

Satz 5.4.5 (Charakterisierung der Attraktoren von Gradientensystemen) *Attraktoren in Gradientensystemen bestehen aus Ruhelagen und aus verbindenden Orbits von Ruhelagen unterschiedlichen Niveaus.*

Beweis. Folgt sofort aus dem zuvor gesagten. □

Beispiel 5.4.6 *In diesem Beispiel wollen wir sehen, daß es Attraktoren gibt, die aus mehr als nur Ruhelagen bestehen. Es sei*

$$\dot{x} = x(1 - x^2).$$

Dann ist $[-1, 1]$ ein Attraktor, der aus den Ruhelagen $-1, 0, 1$ besteht und den verbindenden Orbits.

5.5 Hamilton'sche Systeme

Ähnlich wie Gradientensysteme sind auch Hamilton'sche Systeme[5] durch die Angabe einer reellwertigen Funktion bestimmt. Hamilton'sche Systeme spielen vor allem in der Mechanik eine zentrale Rolle, viele Probleme werden in der Sprache Hamilton'scher Systeme formuliert und gelöst. Die Theorie Hamilton'scher Systeme ist bereits seit Euler bei der mathematischen Beschreibung mechanischer Probleme fest etabliert, allerdings auch heute noch von enormer Bedeutung, wenn man auch heute oft die Theorie Hamilton'scher Systeme hinter anderen Begriffen versteckt: z.B. symplektische Geometrie. Die Bedeutung wird vielleicht dadurch ersichtlich, daß beim letzten ICM alle Hauptvorträge zum Thema Differentialgleichungen/Dynamische Systeme mit einer Ausnahme symplektische Geometrie zum Thema hatten. Diese Bedeutung wird untermauert dadurch, daß auch heute noch alle bedeutenden Mathematiker auf dem Gebiet der Differentialgleichungen dieses Gebiet bearbeiten. Wir wollen dieser Bedeutung Rechnung tragen, indem wir diese Systeme definieren und einige wichtige Eigenschaften kennenlernen.

Da in einem Hamilton'schen System immer Impuls- und Ortsvariable gleichberechtigt auftauchen, lebt ein solches System auf natürliche Weise auf dem $\mathbb{R}^{2n}$. Es sei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

[5] William Rowan Hamilton (4.8.1805-2.9.1865), irischer Mathematiker und Physiker, fand 1822 einen Fehler in Laplace's Arbeit „Mécanique céleste". Er arbeitete als Astronom, fand aber viele bedeutende mathematische Ergebnisse, u.a. die Quaternionen und die nach ihm benannten Funktionen und Differentialgleichungen.

Definition 5.5.1 *Eine Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ heißt* Hamilton'sch, *falls es eine Funktion $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = J\nabla H(u)$.*

Bemerkung 5.5.2 *In mechanischen Systemen wird H oft als Energie interpretiert. Der Energieerhaltungssatz für solche Systeme lautet dann*

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = 0.$$

Wie man leicht sieht, gilt in Hamilton'schen Systemen der Energieerhaltungssatz.

Satz 5.5.3 *H bleibt längs Orbits der zugehörigen Differentialgleichung konstant.*

Beweis. Wir schreiben $p = (u_1, \ldots, u_n),\ q = (u_{n+1}, \ldots, u_{2n})$. Damit wird ein Hamilton'sches System zu

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Ableitung und erhalten

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

□

Definition 5.5.4 *Ein Fluß $\Phi_t : U \times \mathbb{R} \to U$ heißt* volumenerhaltend, *wenn für jede meßbare, beschränkte Menge $V \subset U$ gilt, daß $\mu(V) = \mu(\Phi_t(V))$ für alle $t \geq 0$, wobei μ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.*

Satz 5.5.5 *Der Fluß einer Hamilton'schen Differentialgleichung ist volumenerhaltend.*

Beweis. Sei V offen und beschränkt, wir zeigen

$$\mu(\Phi_t(V)) = \mu(V)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dazu zeigen wir $\frac{d}{dt}\mu(\Phi_t(V)) = 0$. Mit der Transformationsformel erhält man

$$\mu(\Phi_t(V)) = \int\limits_{\Phi_t(V)} dx = \int\limits_V |\det D_x\Phi_t(x)| dx.$$

Es gilt

$$\Phi_t(x) = x + tf(X) + O(t^2),$$

also
$$D_x\Phi_t(x) = \mathbb{1} + tD_x f(X) + O(t^2).$$
Zur Berechnung der Determinante bemerkt man
$$\det(1 + tA) = 1 + t\,\mathrm{tr}(A) + O(t^2).$$
Zusammen ergibt sich
$$\det D_x\Phi_t(x) = 1 + t\,\mathrm{tr}(D_x f(x)) + O(t^2) = 1 + t\,\mathrm{div}\, f(x) + O(t^2).$$
Also ist
$$\frac{d}{dt}\mu(\Phi_t(V))_{|t=0} = \int\limits_V \mathrm{div}\, f(x)dx.$$
Hat man $\mathrm{div}\, f = 0$, so ist diese Ableitung null und demzufolge der Fluß volumenerhaltend.

Dazu muß man noch die Divergenz eines Hamilton'schen Vektorfeldes ausrechnen. Man erhält
$$\mathrm{div}\, J\nabla H(u) = \mathrm{div}_p(-\frac{\partial H}{\partial q}) + \mathrm{div}_q(\frac{\partial H}{\partial p}) = 0.$$
□

Korollar 5.5.6 *Ein divergenzfreies Vektorfeld ist volumenerhaltend.*

Definition 5.5.7

1. *Eine Ruhelage x_0 heißt* asymptotisch stabil, *wenn sie stabil ist und es eine Umgebung U von x_0 gibt, mit $x_0 = \omega(u_0)$ für alle $u_0 \in U$.*
2. *Eine periodische Lösung P heißt* asymptotisch stabil, *wenn sie stabil ist und es eine Umgebung U von P gibt, mit $P = \omega(u_0)$ für alle $u_0 \in U$.*

Satz 5.5.8 *In Hamilton'schen Systemen gibt es weder asymptotisch stabile Ruhelagen, noch asymptotisch stabile periodische Lösungen.*

Beweis. Widerspricht dem Volumenerhaltungssatz in einer Umgebung der Ruhelage, bzw. des periodischen Orbits. □

Satz 5.5.9 (Poincaré'scher Wiederkehrsatz) *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\Phi : G \to G$ sei stetig, volumenerhaltend und injektiv. Dann gilt: Für jeden Punkt $y \in G$ und jede Umgebung U von y existiert ein Punkt $x \in U$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Phi^n(x) \in U$.*

Beweis. Wegen des Erhalts des Volumens gilt $\mu(\Phi^n(U)) = \mu(U)$. Sind alle $\Phi^n(U)$ disjunkt, so folgt
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi^n(U) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U) = \infty.$$
Daher ist die Familie der $\Phi^n(U)$ nicht disjunkt. Ist aber $v \in \Phi^n(U) \cap \Phi^j(U)$, so gibt es $x, w \in U$ mit $v = \Phi^m(x) = \Phi^j(w)$, also (o.B.d.A. $n > j$) $U \ni w = \Phi^{m-j}(x)$. □

Korollar 5.5.10 *Ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $g : S^1 \to S^1 : z \mapsto e^{i\alpha} z$, so ist der Orbit eines Punktes $\{e^{in\alpha} z\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in S^1.*

Beweis. g ist Homöomorphismus und volumenerhaltend. Sind $z_1,\ z_2 \in S^1$, $z_2 = e^{i\phi} z_1$, so geht der Orbit $e^{in\alpha z_2}$ durch Multiplikation aus dem von z_1 hervor. Also ist entweder jeder Orbit dicht, oder es ist kein Orbit dicht. Wir zeigen die Dichtheit eines Orbits in zwei Schritten:

1. Jeder Punkt eines Orbits ist Häufungspunkt der anderen Punkte des Orbits. Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(y)$, die keinen weiteren Punkt von des Orbits von y enthält. Betrachte $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y)$. Es gibt darin einen Punkt x und eine Iterierte, die wieder in dieser Umgebung landet. Dann ist aber der Orbit von y der von x um den entsprechenden (kleinen) Winkel gedreht. Also schneidet er die ursprüngliche ε-Umgebung in einem Punkt z. Dann ist $z \neq y$, da ansonsten α rational wäre.

   Insbesondere ist 1 Häufungspunkt des Orbits von 1.

2. Der Orbit von 1 ist dicht in S^1. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt $w \in S^1$ und eine Umgebung $B_\varepsilon(w)$, die vom Orbit von 1 nicht getroffen wird. Sei $y \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(1) \cap \mathcal{O}(1)$. Dann ist jede Potenz von y im Orbit von 1, und zwei benachbarte Punkte sind nicht weiter als $\frac{\varepsilon}{4}$ voneinander entfernt. Dies widerspricht der Konstruktion von w. □

Eine zumindest auf den ersten Blick überraschende Anwendung des Poincaré'schen Wiederkehrsatzes ist das folgende Gedankenexperiment. Das Verhalten eines Gases kann als Vielteilchensystem modelliert werden, so daß für jedes Molekül eine Gleichung für Ort und Impuls aufgeschrieben wird. Bei ca. $6 \cdot 10^{23}$-Teilchen hat man dann $6 \cdot 6 \cdot 10^{23}$ Gleichungen. Es stellt sich heraus, daß diese Gleichungen Hamilton'sch und damit volumenerhaltend im $\mathbb{R}^{6\cdot 6\cdot 10^{23}}$ sind. Stellen wir uns nun einen Behälter vor, der durch eine Wand in zwei Teile geteilt wird, von denen eine mit einem Gas gefüllt ist, und die andere leer ist. Diese Situation ist unsere Anfangsbedingung. Öffnet man nun die Wand, kann sich das Gas ungehindert in beide Teile ausbreiten. Der Poincare'sche Wiederkehrsatz sagt nun, daß es eine Umgebung der Ausgangsbedingung gibt, so daß der Orbit nach einer genügend langen Zeit in diese Umgebung zurückkehrt.

Dieses Ergebnis erscheint widersinnig, denn es entspricht nicht unserer Erfahrung. Allerdings ist die Zeit, die für diese Wiederkehr benötigt wird, länger als die Zeit der Existenz unseres Sonnensystems! Da dieser Zeitraum jenseits unserer erfahrbaren Wirklichkeit liegt, dürfen wir unsere Erfahrung auch nicht zur Grundlagen von diesbezüglichen Aussagen machen.

5.6 Aufgaben

Aufgabe 5.6.1 (a) Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossene Untergruppe* von $\mathbb{R}$, wenn G eine abgeschlossene Teilmenge und gleichzeitig, bezüglich der Addition, eine Untergruppe ist. Man beschreibe alle abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{R}$.

(b) Gegeben sei eine stetige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Eine Zahl $T \in \mathbb{R}$ heißt Periode von x, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $x(t+T) = x(t)$. Man zeige, die Menge

$$P_x = \{T \in \mathbb{R} \mid T \text{ ist Periode von } x\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$.

(c) Man zeige, gibt es für die Lösung $u(t, t_0, u_0)$ des autonomen Anfangswertproblems

$$\dot{u} = f(u),\ u(t_0) = u_0$$

zwei verschiedene Zeitpunkte t_1, t_2 mit $u(t_1, t_0, u_0) = u(t_2, t_0, u_0)$, so existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ und ist periodisch, d.h. es existiert eine Zahl $T > 0$ mit $u(t+T, t_0, u_0) = u(t, t_0, u_0)$.

Aufgabe 5.6.2 (a) Was ist der Phasenraum, bzw. der erweiterte Phasenraum für die Gleichungen $\dot{u} = u$, bzw. $\dot{u} = u(1-u)$ in $\mathbb{R}$. Was sind die Trajektorien, bzw. die Orbits?
(b) Man beantworte die gleichen Fragen für die Gleichung im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -u_2 + u_1(1-r^2) \\ \dot{u}_2 &= u_1 + u_2(1-r^2), \end{aligned}$$

wobei $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ ist.

Aufgabe 5.6.3 Man zeige den Begradigungssatz 5.1.21

Aufgabe 5.6.4 Man überlege sich, ob der Satz von Poincaré-Bendixson für Differentialgleichungen auf der zweidimensionalen Sphäre, bzw. dem zweidimensionalen Torus richtig ist.

Aufgabe 5.6.5 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so daß $\operatorname{div}(f)$ ein konstantes Vorzeichen auf G hat, so gibt es keinen geschlossenen Orbit in G.

Aufgabe 5.6.6 Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und G sei die Stammfunktion definiert durch $G(y) = \int_0^y g(s)ds$.
(a) Man schreibe die Gleichung $\ddot{u} + g(u)\dot{u} + u = 0$ um in ein zweidimensionales autonomes System.
(b) G sei ungerade in y, es gelte $G(y) \to \infty$ für $|y| \to \infty$. Weiterhin nehmen wir an, daß es positive Zahlen $0 < \alpha < \beta$ gibt mit $G(y) < 0$ auf $(0, \alpha)$, $G(\alpha) = 0$ und auf dem Intervall $[\beta, \infty)$ ist $G(y) > 0$ und monoton steigend. Man zeige, daß das in (a) erhaltene System eine periodische Lösung besitzt.

Aufgabe 5.6.7 Man überlege sich ein Beispiel, das zeigt, daß beim Wazewski-Prinzip die Voraussetzung, $W_a^0 \cap S$ ist Retrakt von W_a^0, gebraucht wird.

Aufgabe 5.6.8

1. Man bestimme die linearen Hamilton'schen Systeme.
2. Ist $x \mapsto Ax$ ein Hamilton'sches Vektorfeld, so nennen wir A symplektisch. Man zeige: Für symplektische Matrizen gilt $|\det A| = 1$.
3. Was folgt für die Eigenwerte symplektischer Matrizen?
4. Für eine symplektische Matrix gilt $\det A = 1$.