Kapitel 3

Lineare Differentialgleichungen

3.1 Jordan'sche Normalform

In diesem kurzen Abschnitt wiederholen wir einige Begriffe der linearen Algebra. Sei $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix A (diese wird durch die Wahl einer Basis bestimmt). Wir gehen immer von der kanonischen Basis aus und identifizieren auf diese Weise die lineare Abbildung mit der Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es einen Vektor $u_c \in \mathbb{C}^n$ gibt mit

$$Au_c = \lambda u_c.$$

Dieser Vektor u_c wird *Eigenvektor* genannt. Natürlich müssen wir auch bei reellen Matrizen komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren zulassen. Deshalb arbeiten wir zunächst im komplexifizierten Raum. Die Eigenwerte sind Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0. \tag{3.1.1}$$

Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es (mit Vielfachheiten gerechnet) genau n Wurzeln dieser Gleichung. Jede Wurzel von (3.1.1) ist auch Eigenwert, jedoch gibt es im allgemeinen weniger als n Eigenvektoren. Sei λ ein Eigenwert, so ist

$$K_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

ein A-invarianter Unterraum, der *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ. Sei m die Dimension von K_λ. K_λ ist enthalten im *verallgemeinerten Eigenraum*, der gegeben ist durch

$$E_\lambda = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } (A - \lambda \mathbb{1})^k u = 0\}.$$

Der verallgemeinerte Eigenraum E_λ zum Eigenwert λ ist invariant unter der Abbildung A. Eine weitere Zerlegung in invariante Unterräume ist möglich. Dazu betrachtet man den minimalen Wert k_0, so daß $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^{k_0} = E_\lambda$ ist. So eine Zahl existiert immer. In E_λ existiert eine Basis B, welches die Vereinigung von m Mengen $H_1, \ldots, H_m$ ist, wobei jedes H_k die Form

$$H_k = \{u_{k,1}, \ldots, u_{k,r_k}\} \tag{3.1.2}$$

hat mit

$$(A - \lambda \mathbb{1})u_{k,i+1} = u_{k,i},\ i = 1, \dots, r_k,\ (A - \lambda \mathbb{1})u_{k,1} = 0.$$

Die Einschränkung von A auf E_λ hat in der Basis B dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathcal{B}_m \end{pmatrix}, \tag{3.1.3}$$

wobei jeder dieser $r_k \times r_k$ Blöcke $\mathcal{B}_k$ die einfache Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{3.1.4}$$

hat. Damit haben wir die komplexe Jordan'sche[1] Normalform einer Matrix erhalten. In der reellen Jordan'schen Normalform hat man auch eine Darstellung in Blöcken wie in (3.1.3), jedoch sehen die Blöcke i.a. anders aus. Ist λ reell so bleibt die Form (3.1.4) erhalten. Für komplexe Eigenwerte $\lambda = e^{i\alpha}$, ergibt sich statt (3.1.4) die Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.1.5}$$

Eine einfache Begründung für diese Form ergibt sich aus der komplexen Jordanschen Normalform und der folgenden Überlegung. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein komplexer Eigenwert einer reellen Matrix so ist $\bar{\lambda}$ ebenso ein Eigenwert und es gibt zu dem zur Menge aus Gleichung 3.1.2 $H_k = \{u_{k,1}, \dots, u_{k,r_k}\}$ eine Menge $H_k^* = \{\overline{u}_{k,1}, \dots, \overline{u}_{k,r_k}\}$ konjugiert komplexer Vektoren die eine entsprechende Basis zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ bilden. Wir definieren nun

[1]Camille Marie Ennemond Jordan (5.1.1838-21.1.1922) wurde zunächst zum Bergbauingenieur ausgebildet. Im Jahre 1916 wurde er Präsident der französischen Akademie der Wissenschaften. Sein Werk umfaßt neben der Normalform Beiträge zur Algebra (u.a. zur Galois-Theorie), zur Analysis, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Topologie der Ebene (Kurvensatz).

ein Paar reeller Vektoren

$$\begin{aligned} v_{k,j} &= \frac{1}{2}(u_{k,j} + \overline{u}_{k,j}),\ j = 1, \ldots, r_k \\ w_{k,j} &= \frac{1}{2\mathtt{i}}(u_{k,j} - \overline{u}_{k,j}),\ j = 1, \ldots, r_k. \end{aligned}$$

Nun sehen wir leicht

$$\begin{aligned} Av_{k,j} &= \frac{1}{2}\left(Au_{k,j} + A\overline{u_{k,j}}\right) \\ &= v_{k,j-1} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k,j} \\ w_{k,j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $Aw_{k,j}$ ergibt eine ähnliche Rechnung ein ganz ähnliches Ergebnis. Für die Basis, die immer aus Paaren

$$H_k^{\mathbb{R}} = \{v_{k,1}, w_{k,1}, \ldots, v_{k,r_k}, w_{k,r_k}\}$$

besteht ergibt sich dann die obige Abbildungsmatrix.

Wie sieht der Block für $\lambda = |\lambda|e^{i\alpha}$ aus?

3.2 Die Exponentialabbildung

Definition 3.2.1 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir setzen* $\|A\| = \sup\{|Au| \mid u \in \mathbb{R}^n,\ |u| = 1\}$.

Lemma 3.2.2 *$\|\cdot\|$ ist eine Norm auf dem linearen Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ in sich. Außerdem gilt $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.*

Beweis. Einfaches Nachrechnen! □

Definition 3.2.3 *Sei A eine $n \times n$-Matrix. Die Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei definiert durch*

(3.2.4)
$$E(A, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Wir nennen $E(A,t)$ die Matrixexponentialfunktion *und schreiben dafür auch manchmal*

$$E(A, t) = e^{At}.$$

Lemma 3.2.5 *Die Funktion $E(A,t)$ ist für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ definiert.*

Beweis. Übungsaufgabe! □

Satz 3.2.6 *Die Matrixexponentialfunktion $E(A,t)$ löst das Anfangswertproblem (2.2.22)*

$$\dot{C} = AC, C(0) = \mathbb{1}$$

aus Hilfssatz 2.2.21.

Beweis. Zunächst betrachten wir eine Teilsumme der Reihe $E(A,t)$

$$E_m(A,t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Die Ableitung von $E_m(A,t)$ ist natürlich

$$\dot{E}_m(A,t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = AE_{m-1}(A,t).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der rechten Seite (auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$) ist $E(A,t)$ differenzierbar und $\dot{E}(A,t) = AE(A,t)$. Natürlich ist auch $E(A,0) = \mathbb{1}$. □

Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = Au$, $u(0) = u_0$ erhält man also durch $u(t,u_0) = E(A,t)u_0$.

Hilfssatz 3.2.7 Kommutieren *die beiden Matrizen A, B* miteinander, *d.h. ist $AB = BA$, folgt für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$BE(A,t) = E(A,t)B,$$

und es gilt

$$E(A+B,t) = E(A,t)E(B,t) = E(B,t)E(A,t) \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die erste Eigenschaft ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition, die zweite erhält man aus dem Eindeutigkeitssatz für die Lösung von Anfangswertproblemen, indem man nachprüft, daß $E(A+B,t)$ und $E(A,t)E(B,t)$ das gleiche Anfangswertproblem lösen. □

A kann durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Jordan'sche Normalform gebracht werden. Sei J die Jordan'sche Normalform von A und C die Transformationsmatrix, also $J = CAC^{-1}$. Die allgemeine Form des Verhaltens der Lösungen unter Koordinatentransformation ist in Aufgabe 4, Blatt 5 angegeben. Für den Spezialfall können wir die Lösung des Ausgangsproblems gewinnen, indem wir A in die Jordan'sche Normalform überführen, für diese dann die Gleichung lösen und zurücktransformieren. Wir erhalten

$$u(t,u_0) = E(A,t)u_0 = C^{-1}v(t,Cu_0) = C^{-1}E(J,t)Cu_0.$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt noch

$$E(A,t) = C^{-1}E(CAC^{-1},t)C.$$

Natürlich kann man diese Formel auch unmittelbar aus der Definition von $E(A,t)$ schließen. Zur allgemeinen Lösung linearer Anfangswertprobleme müssen wir noch $E(J,t)$ ausrechnen. Wir gehen von der Gestalt (3.1.3) aus. Natürlich gilt für eine Matrix J in Blockdiagonalgestalt

$$J = \operatorname{diag}(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)),$$

daß die Matrixexponentialfunktion auch Blockdiagonalgestalt annimmt, also

$$E(J,t) = \operatorname{diag}(E(\mathcal{B}_1,t), \ldots, E(\mathcal{B}_m,t)).$$

Ist $\mathcal{B}$ ein Block der Länge 1, also $\mathcal{B} = (\lambda)$, so ist natürlich $E(\mathcal{B},t) = e^{\lambda t}$. Ist $\mathcal{B}$ ein Block der Länge $r > 1$ und der zugehörige Eigenwert λ reell, so ergibt sich die Exponentialreihe aus folgenden Betrachtungen.

Definition 3.2.8 *Eine Matrix N heißt* nilpotent, *wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit $N^r = 0$.*

Lemma 3.2.9 *Ein Block der Gestalt (3.1.4) ist die Summe einer Diagonalmatrix D und einer nilpotenten Matrix N.*

Beweis. Natürlich ist $D = \operatorname{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$. Übrig bleibt die $r \times r$ Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.10}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $N^r = 0$ ist. Damit ist N nilpotent. □

Bemerkung 3.2.11 *Genauer gilt, daß jede Matrix A Summe einer diagonalisierbaren und einer nilpotenten Matrix ist. Unser Beweis zeigt dies zumindest für reelle Matrizen mit ausschließlich reellen Eigenwerten.*

Lemma 3.2.12 *Die Matrixexponentialfunktion $E(\mathcal{B},t)$ eines Jordan-Blocks der Länge r zum Eigenwert λ hat die Gestalt*

$$E(\mathcal{B},t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \ldots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & t^3/6 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2.13}$$

Beweis. Es gilt $DN = ND$ und daher mit dem Hilfssatz 3.2.7

$$E(\mathcal{B}, t) = E(D + N, t) = E(D, t)E(N, t).$$

Nun ergibt $E(D, t) = e^{\lambda t}\mathbb{1}$ und da N nilpotent ist, hat man

$$E(N, t) = \mathbb{1} + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \ldots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}.$$

□

Für einen nichtreellen Eigenwert stellt man die gleiche Betrachtung im Komplexen an und schneidet den Lösungsraum mit dem $\mathbb{R}^n$. Wir wollen die entsprechende Formel im Moment nicht angeben.
Den Lösungsraum linearer autonomer Gleichungen kann man einfach charakterisieren. Dies ist der Inhalt des nächsten Satzes, der im weiteren noch verallgemeinert wird.

Satz 3.2.14 (Algebraische Struktur des Lösungsraumes I) *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.Wir setzen $U = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au\}$. U ist ein linearer Raum. Die Dimension von U ist n.*

Beweis. Offensichtlich ist die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung. Gleiches gilt für das Produkt ξu mit $\xi \in \mathbb{R}$ und $u \in U$. Also bleibt zu zeigen, daß $\dim U = n$ ist. Sei $\mathcal{A} : U \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $\mathcal{A}u = u(0)$. Offensichtlich ist $\mathcal{A}$ linear und wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen injektiv. Wegen des globalen Existenzsatzes ist $\mathcal{A}$ surjektiv. Also gilt $U \simeq \mathbb{R}^n$. □

Als nächsten Schritt betrachten wir die *inhomogene lineare Gleichung*, gegeben durch

$$\dot{u} = Au + f(t), \tag{3.2.15}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung ist. Wir wissen, aufgrund des Existenzsatzes, daß diese Gleichung bei Vorgabe eines Anfangswertes lösbar ist. Die algebraische Struktur ist natürlich etwas anders als vorher. Wie in der linearen Algebra besteht die allgemeine Lösung aus einer speziellen Lösung plus einem beliebigen Element aus U.

Satz 3.2.16 (Algebraische Struktur des Lösungsraumes II) *Sei*

$$U_f = \{u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au + f(t)\}.$$

U_f ist ein n-dimensionaler affiner Unterraum *von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Es existiert also ein $u^0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß*

$$U_f = \{u^0 + u \mid u \in U\}.$$

Beweis. Wie schon bemerkt, hat die Gleichung (3.2.15) immer eine Lösung. Sei u^0 eine solche Lösung. Dann ist natürlich für $u \in U$ auch $u^0 + u$ eine Lösung. Wir müssen noch zeigen, daß jede Lösung diese Form hat. Sei u^1 eine weitere Lösung der Gleichung (3.2.15). Dann ist $u^0 - u^1$ eine Lösung der homogenen linearen Gleichung (einfaches Nachprüfen zeigt dies). Damit ist $u^0 - u^1 \in U$. □

Wir wollen uns noch kurz Gedanken machen, wie man eine spezielle Lösung u^0 findet.

Lemma 3.2.17 (Formel der Variation der Konstanten) *Sei* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *stetig. Sei* $u_0 \in \mathbb{R}^n$. *Dann ist eine spezielle Lösung der Gleichung* $\dot{u} = Au + f(t)$ *gegeben durch*

$$u^0(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds. \tag{3.2.18}$$

Beweis. Differenzieren ergibt

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + [e^{A(t-s)}f(s)]_{|s=t} + \int_0^t \frac{d}{dt}e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

also

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + f(t) + A\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds = Au + f(t).$$

□

3.3 Die nichtautonome lineare Gleichung

In diesem Abschnitt widmen wir uns den Gleichungen

$$\dot{u} = A(t)u \tag{3.3.1}$$

und

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \tag{3.3.2}$$

wobei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind. Natürlich kann man hier nicht erwarten, daß die Konstruktion der Matrixexponentialfunktion zum Ziel führt.

Lemma 3.3.3 *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi,\ \Phi(t_0) = \mathbb{1} \tag{3.3.4}$$

hat für eine stetige Abbildung $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *und* $t_0 \in I$ *eine eindeutige Lösung*

$$\Phi = \Phi(t, t_0) : I \times I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

<u>Beweis:</u> Die Existenz folgt aus den Existenzsätzen (2.1.7) und (2.1.18). □

Definition 3.3.5 *Die Abbildung* $\Phi : I^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : (t, t_0) \mapsto \Phi(t, t_0)$ *heißt* Übergangsmatrix.

Man überlege sich eine anschauliche Begründung für die Terminologie.

Satz 3.3.6 (Eigenschaften der Übergangsmatrix) *Die Übergangsmatrix* $\Phi(t, t_0)$ *ist für jedes Paar* $(t, t_0) \in I^2$ *definiert und hat die Eigenschaften*

- $\Phi(t,t) = \mathbb{1}$;
- $\Phi(t,s)\Phi(s,t_0) = \Phi(t,t_0)\ \forall (t,s,t_0) \in I^3$;
- $\Phi(t,t_0)^{-1} = \Phi(t_0,t)$.

Beweis. Die erste Eigenschaft ist nach Definition gegeben. Für die zweite Aussage betrachtet man die matrixwertige Funktion $\Psi(t) = \Phi(t,s)\Phi(s,t_0)$. Sie genügt der Differentialgleichung

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t)$$

mit dem Anfangswert $\Psi(s) = \mathbb{1}\Phi(s,t_0)$. Offenbar ist $\Phi(.,t_0)$ eine Lösung derselben Differentialgleichung und für $t = s$ hat man den Wert $\Phi(s,t_0)$. Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems liefert die Gleichheit der linken und der rechten Seite. Die dritte Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der zweiten. $\square$

Wie zuvor sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Wir setzen für eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$

$$U_f = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = A(t)u + f\}.$$

Sei $U = U_0$. Wir notieren einige einfache Aussagen.

Lemma 3.3.7 *1.* $u^1 \in U_f,\ u^2 \in U_g \Rightarrow u^1 + u^2 \in U_{f+g}$ *[Superpositionsprinzip];*

2. $\dim U_0 = n$;

3. *Sei* $u_0 \in U_f$ *fest. Dann ist* $U_f = \{u_0 + u \mid u \in U\}$. *[Algebraische Struktur des Lösungsraumes III];*

4. *Jedes* $u \in U$ *hat die Darstellung* $u(t,t_0,u_0) = \Phi(t,t_0)u_0$.

Beweis. Die erste und die dritte Aussage sind trivial. Für die zweite fixieren wir einen Zeitpunkt $t_0 \in I$ und zeigen wie zuvor, daß die Abbildung $\mathcal{A} : U \to \mathbb{R}^n : u \mapsto u(t_0)$ ein Isomorphismus ist. Die letzte Aussage folgt wieder aus der Eindeutigkeit: Sei u Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = Au,\ u(t_0,t_0,u_0) = u_0.$$

Dann ergibt sich für $v(t) = \Phi(t,t_0)u_0$

$$\dot{v} = \dot{\Phi}(t,t_0)u_0 = A\Phi(t,t_0)u_0 = Av,\ v(t_0) = \Phi(t_0,t_0)u_0 = u_0.$$

Also ist $u = v$. $\square$

Wie zuvor erhält man aus der Formel der Variation der Konstanten die Darstellung der Lösung der inhomogenen Gleichung.

Satz 3.3.8 (Variation der Konstanten) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$ seien stetig, $t_0 \in I$. Sei $\Phi : I^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die zugehörige Übergangsmatrix. Dann hat die Lösung $u(t, t_0, u_0)$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{array}{rcl} \dot{u} & = & A(t)u + f(t) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \tag{3.3.9}$$

die Lösung

$$u(t, t_0, u_0) = \Phi(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)f(s)ds.$$

Beweis. Sei

$$v(t) = \Phi(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)f(s)ds.$$

Dann ist $v(t_0) = \mathbb{1}u_0 = u_0$ und

$$\dot{v} = A(t)\Phi(t, t_0)u_0 + f(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\Phi(t, s)f(s)ds = Av + f.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung bringt das gewünschte Resultat.

3.4 Ebene lineare Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir ebene, lineare und autonome Systeme charakterisieren. Wir betrachten also eine Gleichung der Form

$$\dot{u} = Au, \tag{3.4.1}$$

wobei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ eine lineare Abbildung ist. Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A. Wir unterscheiden:

1. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$;
2. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$;
3. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathrm{Re}\lambda_1 > 0$;
4. $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$;
5. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
6. $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = 0$, $\lambda_i \neq 0$;
7. $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$;
8. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$;

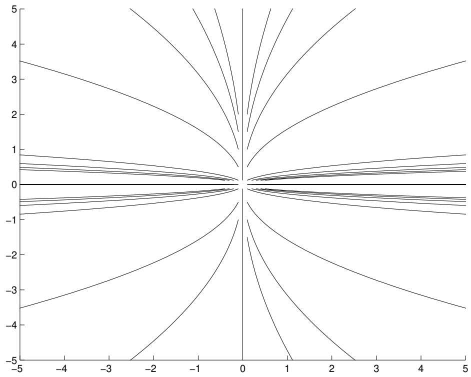

Abbildung 3.1: Die Trajektorien von $E(J,t)$.

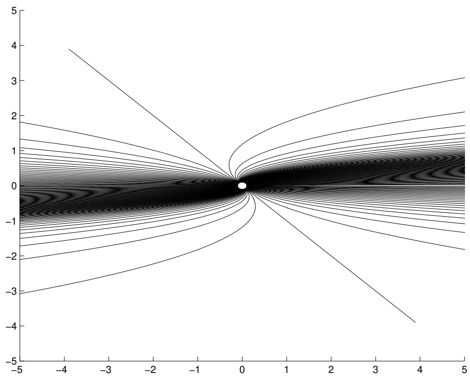

Abbildung 3.2: Die Trajektorien von $E(A,t)$ mit schiefliegenden Eigenräumen.

9. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
10. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathrm{Re}\lambda_1 < 0$;
11. $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$.

1. Fall: Dabei hat die Jordan Normalform die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

Seien e_1, e_2 die Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2}$. Dann konvergieren alle Lösungen für $t \to -\infty$ gegen Null, für $t \to \infty$ verlassen alle Lösungen (außer einer!) jedes Kompaktum. Sie schmiegen sich (für $t \to -\infty$) an die e_2-Achse an.

2. Fall: Wir unterscheiden zwei mögliche Formen des Jordan Blocks (Eigenwerte sind geometrisch einfach oder nicht). Zunächst der Fall der geometrisch einfachen Eigenwerte. Hier hat der entsprechende Jordanblock die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{3.4.3}$$

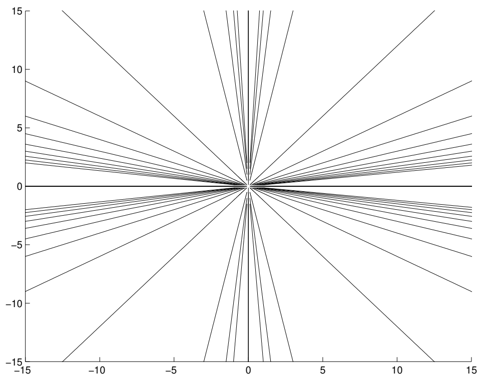

Abbildung 3.3: Die Trajektorien von $E(J,t)$ mit halbeinfachen Eigenwerten.

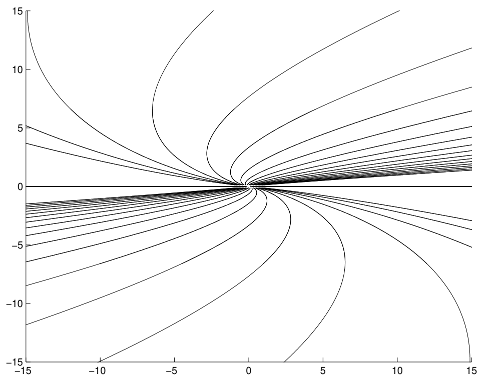

Abbildung 3.4: Die Trajektorien von $E(J,t)$ mit geometrisch einfachem, algebraisch doppelten Eigenwert.

Alle Lösungen haben dieselben Konvergenzeigenschaften wie zuvor. Nur ist die Bewegung längs gerader Linien.
Ist der Eigenwert nicht geometrisch einfach, so hat der Jordanblock die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{3.4.4}$$

Auch hier hat man die Konvergenzeigenschaften wie im ersten Fall, jedoch schaut das Bild wiederum anders aus.

3. Fall: Wieder ergibt sich die gleiche Konvergenz, jedoch erhält man einen Strudel. Sei $\lambda_1 = |\lambda| e^{i\theta}$. Dann ist $\lambda_2 = |\lambda| e^{-i\theta}$ und die reelle Normalform hat die Form

$$J = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.4.5}$$

4. Fall: Für die Jordan Form ergibt sich

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4.6}$$

Längs der e_2-Achse hat man konstante Lösungen (*Ruhelagen*). Alle anderen Lösungen konvergieren für $t \to -\infty$ gegen 0 und verlassen in positiver Zeitrichtung jedes Kompaktum.
5. Fall: In diesem Fall hat die Jordan Form das Aussehen

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4.7}$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4.8}$$

Der erste dieser beiden Fälle liefert ausschließlich konstante Lösungen. Im zweiten hat man eine Bewegung auf Parallelen zur e_1-Achse gegen unendlich.
6. Fall: Unsere Abbildung erhält die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.4.9}$$

Wir erhalten Lösungen, die sich auf Kreislinien um den Ursprung bewegen.
7. Fall: Ein qualitativ neues Bild ergibt sich hier. Auf der einen Achse bewegt man sich für $t \to \infty$ gegen unendlich und für $t \to -\infty$ gegen Null, auf der anderen Achse hat man das gegenteilige Verhalten. Dazwischen sind Lösungen, die für beide Zeitrichtungen jedes Kompaktum verlassen und sich für $t \to \pm\infty$ an die jeweilige Eigenwertachse anschmiegen. (Dies ist die Motivation für den Begriff *hyperbolisch*, den wir noch einführen werden.)
In den anderen Fällen ergeben sich ganz ähnliche Bilder wie bisher, nur die Zeitrichtungen sind anders. Wir geben nur die Normalformen und die Bilder, keine weiteren Kommentare.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.4.10}$$

8. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{3.4.11}$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{3.4.12}$$

9. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.4.13}$$

10. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.4.14}$$

11. Fall:

(3.4.15)
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5 Eigenwerte und Langzeitverhalten

Die Betrachtungen im vorstehenden Abschnitt legen es nahe zu vermuten, daß die Eigenwerte und das Langzeitverhalten für lineare, autonome Systeme eng gekoppelt sind. Wir wollen dieses bestätigen.

Satz 3.5.1 (Spektrum und Stabilität I) *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$\dot{u} = Au.$$

Mit $\sigma(A)$ bezeichnen wir das Spektrum von A, d.h. $\sigma(A)$ ist die Menge aller Eigenwerte von A. Dann hat man folgendes Verhalten:
Haben alle Eigenwerte negativen Realteil, so ist 0 die einzige beschränkte Lösung und alle anderen konvergieren für $t \to \infty$ gegen 0. Für $t \to -\infty$ hat man Konvergenz gegen unendlich.
Gibt es einen Eigenwert mit positivem Realteil, so gibt es eine Lösung, die für $t \to -\infty$ gegen 0 konvergiert und für $t \to \infty$ jedes Kompaktum verläßt.
Gibt es einen Eigenwert mit Realteil 0, so existiert zumindest eine Lösung $u(t, u_0)$, $u_0 \neq 0$, welche für alle Zeiten beschränkt ist.

Beweis. Angenommen, u_0 ist Anfangswert einer beschränkten Lösung $u(t, u_0)$. Jede Lösung der linearen Gleichung hat wegen der Bemerkung nach Satz 3.2.6 die Darstellung $u(t, u_0) = E(A, t)u_0$. Sei C die Matrix, die A in die komplexe Jordan Normalform J transformiert, $v_0 = Cu_0$ ist dann der Anfangswert für eine beschränkte Lösung $v(t) = E(J, t)v_0$. Sei $v_0 = (v_0^1, \ldots, v_0^n)$. Ist $u_0 \neq 0$, so ist $v_0 \neq 0$ und es gibt ein $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ mit $v_0^\mu \neq 0$ und für $m \in \{\mu + 1, \ldots, n\}$ ist $v_0^m = 0$. Sei λ der Eigenwert zum μ-ten Eigenvektor in der Basis zur Jordan Form. So ist die μ-te Komponente von $E(J, t)v_0$ gegeben durch $e^{\lambda t}v_0^\mu$. Dann ist $|e^{\lambda t}v_0| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}|v_0^\mu|$. Für $t \to -\infty$ ist dies unbeschränkt. Um die Konvergenz zu zeigen, betrachten wir $\nu = \max\{\mathrm{Re}(\lambda) | \ \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\nu < 0$ und $E(J, t) = e^{\nu/2\, t}F(t)$. Dabei ist F eine matrixwertige Funktion. Jedes $F(t)$ ist eine obere Dreiecksmatrix, mit Einträgen $e^{\rho t}p(t)$, wobei p ein Polynom ist und $\mathrm{Re}(\rho) < 0$. Dann ist $\|F(t)\|$ beschränkt und $\|E(J, t)\| \to 0$ für $t \to \infty$. Damit konvergiert auch

$$\|E(A, t)\| = \|C^{-1}E(J, t)C\| \leq \|C\|\|E(J, t)\|\|C\|$$

für $t \to \infty$ gegen null.
Die zweite Aussage beweist man ebenso wie die Unbeschränktheit für $u(t, u_0)$ für $t \to -\infty$ im ersten Fall. Man betrachtet hier einfach einen Anfangswert im verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert mit positivem Realteil.

Die dritte Aussage erhält man, indem man einen Eigenvektor als Anfangswert im Eigenraum des Eigenwertes λ mit verschwindendem Realteil betrachtet. Hier unterscheidet man zwei Fälle,
(a) $\lambda = 0$
(b) $\lambda \neq 0$.
Der erste dieser Fälle ist einfach. Ist u_0 im Kern von A, so ist natürlich $E(A,t)u_0 = u_0$ für alle t und damit ist die Lösung $u(t,u_0) = u_0$ eine konstante, und damit beschränkte Lösung.
Im zweiten Fall hat man im Komplexen einen Anfangswert u_0^c, so daß $E(A,t)u_0^c = e^{\lambda t}u_0^c$ ist, also gilt $|E(A,t)u_0^c| = |e^{\lambda t}||u_0^c| = |u_0^c|$. Wir setzen $u_0 = u_0^c + \overline{u_0^c}$. Dies ist ein reeller Vektor. Es gilt $E(A,t)u_0 = e^{\lambda t}u_0^c + e^{-\lambda t}\overline{u_0^c}$. Da $\overline{\lambda} = -\lambda$ ist dies immer reell. Da beide Summanden in der Norm beschränkt sind, folgt dies auch für $E(A,t)u_0$. □

3.6 Aufgaben

Aufgabe 3.6.1 Wir bezeichnen mit A^T die Transponierte einer reellen Matrix A und mit $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A. Man zeige:
(a) $\det E(A,t) = e^{\mathrm{tr}(A)t}$
(b) $E(A^T,t) = (E(A,t))^T$
(c) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A + A^T = 0$, so ist $E(A,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal. (Eine Matrix B heißt orthogonal, wenn $B^TB = BB^T = \mathbb{1}$ ist.)

Aufgabe 3.6.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. A habe keinen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\ \lambda\ ) = 0$.
(a) Man zeige: Die Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ besitzt eine beschränkte Lösung.
(b) Ist diese Lösung eindeutig?
(c) Ist f periodisch mit Periode $T > 0$, so ist auch die in (a) gefundene Lösung T-periodisch.

Aufgabe 3.6.3 Man finde $E(A,t)$ für folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht $E(A,t)u_0$ für verschiedene $u_0 \neq 0$ aus.

Aufgabe 3.6.4 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Gegeben seien n Lösungen $u_1, \ldots, u_n$ der Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$.
(a) Man zeige: Gibt es ein $\tau \in I$, so daß die Vektoren $u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)$ linear unabhängig sind, so sind die Vektoren $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig. Man nennt dann $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ ein *Fundamentalsystem* und die Matrix $Y(t)$, deren Spalten aus den Vektoren $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ besteht, *Fundamentalmatrix*.

(b) Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so nennt man die reellwertige Funktion $w(t) = \det Y(t)$ die *Wronski-Determinante* von A. Man zeige: w löst die Differentialgleichung $\dot{w} = \mathrm{tr}(A)w$.

Aufgabe 3.6.5 Sei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, nichtleere Teilmenge und $t_0 \in I$ sei fest gewählt. Setze

$$U(t) = \{u(t, t_0, u_0) \mid u_0 \in U\},$$

wobei $u(t, t_0, u_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = A(t)u,\ u(t, t_0, u_0) = u_0$ bezeichnet. Mit μ bezeichnen wir das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$. Man gebe eine hinreichende Bedingung an A dafür, daß $\mu(U(t)) = \mu(U)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3.6.6 Man löse die Differentialgleichungen

$$(a) \quad \dot{u} + u\sin(t) = (\sin(t))^3 \qquad (b) \quad (1+t^2)\dot{u} + tu = t.$$