Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vorlesung

Universität Hamburg

Reiner Lauterbach

SS 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Was sind Differentialgleichungen?

In der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ beschäftigt man sich, wie der Name schon besagt, mit Differentialgleichungen und Eigenschaften der Lösungen, sowie mit Methoden, diese zu bestimmen. Was ist aber eine Differentialgleichung? Wir wollen hier keine formale Definition geben. Einfach gesagt ist es eine Gleichung, mit der man eine Funktion u sucht. In dieser Gleichung tritt die Funktion u selbst, Ableitungen von u und vielleicht noch die Variable(n), von denen u abhängt, auf. Bevor wir uns weiter in Allgemeinheiten verlieren, ein Beispiel:

$$u' = u, \tag{1.1}$$

wobei die gesuchte Funktion u von einer unabhängigen Veränderlichen x abhängen soll. Eine Lösung kann man leicht angeben:

$$u(x) = e^x. \tag{1.2}$$

Offensichtlich löst die angegebene Funktion Gleichung (1.1), jedoch ist es nicht die einzige Lösung. Weitere Lösungen findet man leicht. Oft ist man nicht an der gesamten Lösungsvielfalt interessiert, sondern man stellt weitere Forderungen, um eine eindeutige Lösbarkeit zu gewährleisten. Bevor ich exemplarisch typische zusätzliche Anforderungen angebe und motiviere, will ich noch eine weitere Abgrenzung vornehmen. Sucht man Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und gibt eine Relation zwischen u und den Ableitungen von u an, so spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung.** Betrachtet man hingegen Funktionen, die auf einem höherdimensionalen Raum, z.B. dem $\mathbb{R}^n$, definiert sind, und hat man Beziehungen zwischen u und den **partiellen** Ableitungen von u, so handelt es sich um eine **partielle Differentialgleichung**. Das Interesse an Differentialgleichungen ist schon alt, denn sie eignen sich hervorragend zum Modellieren von Problemen der realen Welt. Diese Problemstellungen haben auch die Typen der oft untersuchten Gleichungen und der zusätzlichen Bedingungen, die man an die Lösung stellt um Eindeutigkeit zu erzielen, geprägt. Wir betrachten eine Reihe von Beispielen. Gleichzeitig lernen wir eine Anzahl von Techniken kennen, mit der man explizite Lösungen erhalten kann. Man muß aber sagen, daß die meisten Differentialgleichungen analytisch nicht in geschlossener Form gelöst werden können. Analytische Methoden liefern aber oft, und das aufzuzeigen ist ein Ziel dieser Vorlesung, Aufschluß über qualitatives Verhalten. Darunter wollen wir verstehen, Frage nach dem Langzeitverhalten, Stabilität von Lösungen usw.. Während sich das quantitative

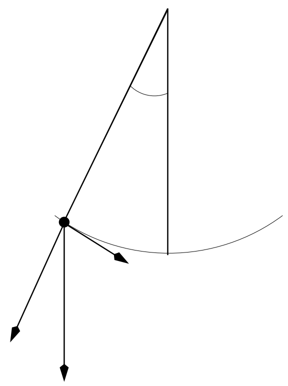

Abbildung 1.1: Am Pendel wirkende Kraft bei einer Auslenkung φ

Verhalten von Lösungen heutzutage recht eindrucksvoll mit dem Computer untersuchen läßt, sind die qualitativen Aussagen fast ausschließlich analytischen Untersuchungen zu verdanken. Moderne Fragestellungen von Anwendern verlangen oft beides. Die Symbiose von analytischem Werkzeug und Rechnern kann zu neuer Einsicht führen. Deshalb wollen wir uns im weiteren Verlauf auch mit numerischen Methoden beschäftigen. Zunächst zu unseren Modellproblemen. Bei einigen dieser Probleme werde ich zur Begründung, warum gerade die angegebene Gleichung untersucht wird, einige physikalische Überlegungen anstellen. Diese sind für das Verstehen der Mathematik nicht notwendig.

- **Das mathematische Pendel**
  Hier hat man es mit folgender Aufgabenstellung zu tun: Ein Pendel der Länge ℓ und Masse M ist an einem festen Punkt P aufgehängt und schwingt in einer Ebene um die untere Ruhelage. Wir wollen den zeitlichen Verlauf dieser Bewegung untersuchen. Zunächst eine Konvention. Da die unabhängige Variable die Zeit ist, werden wir sie, wie allgemein üblich, mit $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen. Bei der zu beschreibenden Bewegung reicht es offensichtlich, die Winkelauslenkung φ zu jedem Zeitpunkt t anzugeben. Wir werden die Bewegung also durch eine (gesuchte) Funktion $\varphi(t)$ beschreiben. Wie erhält man eine Gleichung für φ? Dazu betrachten wir Abbildung 1.1: Mit $-g$ bezeichnen wir die Erdbeschleunigung, dann wirkt auf M die Kraft $-Mg$, wobei der radiale Anteil dafür sorgt, daß die Befestigung gespannt bleibt, während der Winkelanteil für die Winkelbeschleunigung $\ell\varphi''(t)$ sorgt. Also erhält man als radialen Kraftanteil $-Mg\sin\varphi(t)$. Damit ergibt sich als Gleichung (KRAFT=MASSE∗BESCHLEUNIGUNG):

  $$M\ell\varphi''(t) = -Mg\sin\varphi(t)$$

  oder

  $$\varphi''(t) = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi(t). \tag{1.3}$$

  Zur einfacheren Behandlung dieser Gleichung hat man schon früh ausgenutzt, daß zumindest für kleine Auslenkungen φ und $\sin\varphi$ annähernd gleich sind. Eine Näherungsgleichung (der Zusammenhang mit (1.3) bleibt dabei zumindest jetzt offen) ist daher

  $$\varphi''(t) = -\frac{g}{\ell}\varphi(t). \tag{1.4}$$

Setzt man

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

ergibt sich als Lösung dieser Gleichung

$$\varphi(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t), \tag{1.5}$$

wobei $c_{1,2}$ beliebige reelle Konstanten sind. Man erkennt, daß man Eindeutigkeit erhält, wenn man eine Anfangsauslenkung und eine Anfangswinkelgeschwindigkeit vorgibt. Dies ist ein erstes Beispiel eines *Anfangswertproblems*.

- **Der radioaktive Zerfall**
  Beim radioaktiven Zerfall betrachtet man folgenden Vorgang. Man hat zum Zeitpunkt 0 eine gewisse Menge u_0 einer radioaktiven Substanz. Mit $u(t)$ bezeichnen wir den zum Zeitpunkt t verbleibenden Rest der Substanz. Durch Beobachtungen erhält man, daß die Anzahl der Zerfälle proportional zur Menge der Substanz ist. Sei α diese Rate. Dann lautet die zugehörige Gleichung
  (VERÄNDERUNG=ZERFALLSRATE∗MENGE)

$$u'(t) = -\alpha u(t). \tag{1.6}$$

  Wie bei Gleichung (1.1) kann man eine Lösung sofort hinschreiben:

$$u(t) = ce^{-\alpha t}. \tag{1.7}$$

  Nachdem zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten muß, daß $u(0) = u_0$ erhält man $c = u_0$. Aus dieser Beziehung leitet man sofort ab, wielange es dauert, bis sich die Menge der radioaktiven Substanz halbiert hat. Ist nämlich $u(T) = \frac{1}{2}u_0$, so rechnet man aus $T = \ln(2)/\alpha$. Dieser Wert ist unabhängig von u_0 und daher gilt immer

$$u(t + T) = u(t)/2. \tag{1.8}$$

  T wird als **Halbwertszeit** bezeichnet. Sie charakterisiert, wie wir eben gesehen haben, den Zerfallsprozeß. Wiederum haben wir es hier mit einem **Anfangswertproblem** zu tun. Allgemein führen Wachstums- oder Zerfallsprozesse, wo die Veränderung proportional zur gegenwärtigen Größe ist, auf Differentialgleichungen von zu (1.6) ähnlicher Gestalt.

- **Bevölkerungswachstum**

  Das Wachstum einer Bevölkerung ist eine Frage von eminenter Bedeutung, sowohl in der Medizin, in der Zoologie, aber es ist auch eine existentielle Frage für die Menschheit. Hier zunächst einige Daten (Quelle: UN) s. Tabelle 1.1

  Die nächste Tabelle gibt einen Eindruck der weiteren Entwicklung in den nächsten Jahrzehnten s. Tabelle 1.2
  Ein einfaches Modell zur Beschreibung einer Population p ohne natürliche Feinde ist, daß sowohl die Geburtenzahl, wie auch die Sterbezahl proportional zum Stand der Bevölkerung sind. Dann gibt es eine Geburtenrate B (birth rate), eine Sterberate D (death rate) und p genügt der Differentialgleichung

$$p' = Bp - Dp. \tag{1.9}$$

Jahr	Bevölkerung(x10^9)
0	0.30
1000	0.31
1250	0.40
1500	0.50
1750	0.79
1800	0.98
1850	1.26
1900	1.65
1910	1.75
1920	1.86
1930	2.07
1940	2.30
1950	2.52
1960	3.02
1970	3.70
1980	4.44
1990	5.27
1998	5.90

Tabelle 1.1: Das Bevölkerungswachstum seit Christi Geburt, Quelle: UN

Jahr	Bevölkerung(x10^9)
2000	6.06
2010	6.79
2020	7.50
2030	8.11
2040	8.58
2050	8.91

Tabelle 1.2: Das prognostizierte Bevölkerungswachstum in den nächsten Jahrzehnten, Quelle: UN

Aus (1.9) wird natürlich mit $\beta = B - D$ die Gleichung (1.6) mit $\alpha = -\beta$. Ist β positiv, hat man ein Bevölkerungswachstum, ähnlich der Halbwertszeit gibt es nun eine Verdoppelungszeit $T = \ln(2)/\beta$. Beobachtet man in der Realität ein Wachstum, das noch stärker ist (Verkürzung der Verdoppelungszeiten), dann ist (1.9) kein geeignetes Modell. Ein schwerwiegender Nachteil dieses Modells ist die Vorhersage grenzenlosen Wachstums. Dies kann wegen der Endlichkeit aller Dinge nicht vorliegen, so gab es schon lange Versuche die Gleichung (1.9) zu modifizieren. Ein solches Modell ist die Einführung eines Streßfaktors S, der proportional zur Anzahl der Begegnungen von Individuen der Bevölkerung ist. Diese ist proportional zu p^2. Damit erhält man

$$p' = \beta p - Sp^2. \tag{1.10}$$

Mit $p(t) = \beta/S$ hat man eine konstante Lösung. Es ergibt sich sogar, daß jede Lösung sich an diese konstante Lösung annähert. Man erhält dies, indem man zu jedem Anfangswert eine Lösung durch diesen Anfangswert angibt, die diese Eigenschaft hat. Aus der Eindeutigkeit, die wir noch zeigen werden, folgt dann die Behauptung. Man bekommt die Lösung für einen beliebigen Anfangswert mit der Methode der **Trennung der Veränderlichen**. Wir nehmen uns vor, eine Lösung der Gestalt $p(t)$ mit $p(t_0) = p_0 \neq \beta/S$, zu finden und schreiben

$$\frac{dp}{dt} = \beta p - Sp^2. \tag{1.11}$$

Ist $\beta p - Sp^2 \neq 0$ erhält man

$$\frac{dp}{dt}\frac{1}{\beta p - Sp^2} = 1. \tag{1.12}$$

Integration dieser Gleichung von t_0 bis t liefert

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dp(s)}{dt}\frac{ds}{\beta p(s) - Sp(s)^2} = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0. \tag{1.13}$$

Ist $\beta p - Sp^2 \neq 0$, so ist auch $p' \neq 0$ und die linke Seite ergibt mit der Substitutionsregel

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dz}{\beta z - Sz^2}.$$

Dies wird mittels einer Partialbruchzerlegung integriert. Es ergibt sich (wir führen diese Rechnung einmal sehr ausführlich durch) mit $K = \beta/S$

$$\frac{1}{\beta}\int_{p_0}^{p}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{K - z}\right) dz = \frac{1}{\beta}\left(\ln\left(\frac{|p|}{|p-K|}\right) - \ln\left(\frac{|p_0|}{|p_0 - K|}\right)\right).$$

Da die Größe der Population jeweils nicht negativ ist, kann man $p > 0,\ p_0 > 0$ annehmen. Daher hat man

$$\ln\left(\frac{p|p_0 - K|}{|p - K|p_0}\right) = \beta(t - t_0). \tag{1.14}$$

Einsetzen und Auflösen nach p bringt uns die endgültige Gestalt der Lösung

$$\frac{p(p_0 - K)}{(p - K)p_0} = e^{\beta(t - t_0)}. \tag{1.15}$$

Hier beachtet man noch, daß die Annahme, daß $p(s) \neq K$ für alle $s \in [t_0, t]$ dazu führt, daß $p - K$ und $p_0 - K$ gleiches Vorzeichen haben. Daraus erhält man

$$p = \frac{e^{\beta(t-t_0)} p_0}{p_0 - K}(p - K).$$

Bezeichnet man den hier aufgetretenen Bruch mit B so ergibt sich

$$p(1 - B) = -BK$$

und damit

$$p = \frac{BK}{(B-1)}.$$

Einsetzen ergibt

$$p(t) = K \frac{e^{\beta(t-t_0)} p_0}{e^{\beta(t-t_0)} p_0 - p_0 + K}.$$

Multiplikation mit $e^{-\beta(t-t_0)}$ führt auf

$$p(t) = \frac{K p_0}{p_0 - e^{-\beta(t-t_0)}(p_0 - K)}. \tag{1.16}$$

Wie erwartet, liefert das Einsetzen von $t = t_0$ den Wert p_0. Um das Verhalten von p für $t \to \infty$ zu studieren, muß man sich nur anschauen was der Nenner macht. Er konvergiert gegen p_0 und insgesamt ergibt sich der Wert K.
Wir wollen noch die Frage stellen, woher kommen die Lösungen für $t < t_0$, sozusagen fragen wir nach der Vergangenheit. Ist $p_0 \in (0, K)$ so existiert die Lösung für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ und konvergiert für $t \to -\infty$ gegen 0. Ist jedoch $p_0 > K$, so würde formal die Grenzwertbetrachtung $t \to -\infty$ den gleichen Wert ergeben, dies jedoch erscheint absurd. Man überlegt sich, daß der Nenner für ein $t < t_0$ eine Nullstelle $t_1(p_0)$ hat und demzufolge die Lösung nur auf dem Intervall (t_1, ∞) existiert.
Die hier behandelte Gleichung wird oft *logistische Gleichung* genannt. Sie geht auf den belgischen Mathematiker VERHULST[1] zurück.

- **Die schwingende Saite**
  Hier betrachtet man die Aufgabe, die Auslenkung u einer schwingenden Saite zum Zeitpunkt t an der Stelle x zu beschreiben. Ohne Begründung möchte ich im Moment die zugrundeliegende Differentialgleichung angeben. Sie lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.17}$$

Eine Herleitung dieser Gleichung findet man bei Heuser [13, S.291/292]. Üblicherweise befestigt man eine Saite an den Endpunkten und hindert sie damit an der Auslenkung. Wir nehmen an, daß diese Endpunkte $x = 0$ und $x = \pi$ sind. Damit erhält man die Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$.
Hier handelt es sich um eine *partielle Differentialgleichung*. In diesem und im folgenden

[1] Pierre-Francois Verhulst (28.10.1804-15.2.1849) war Professor an der Freien Universität in Brüssel und später an der königlichen Militärschule. Seine Arbeiten zum Bevölkerungswachstum machten ihn zum Begründer der Bevölkerungsstatistik.

Beispiel sehen wir, daß gewöhnliche Differentialgleichungen eine erhebliche Rolle bei der Diskussion von Eigenschaften von Lösungen partieller Differentialgleichungen spielen.
Wir setzen der Einfachheit halber $\lambda = 1$. Mit dem Ansatz

$$u(x,t) = v(x)w(t) \tag{1.18}$$

erhält man die Beziehung

$$v(x)w''(t) = v''(x)w(t). \tag{1.19}$$

Steckt man noch die Annahme rein, daß man sich in einem Punkt (x,t) befindet, wo beide Funktionen nicht verschwinden, so ergibt sich

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}. \tag{1.20}$$

Da die beiden Seiten von verschiedenen Variablen abhängen, müssen diese konstant und gleich sein. Setzen wir diese Konstante $-K,\ K > 0$ so ergibt sich

$$\begin{aligned} w'' &= -Kw \\ v'' &= -Kv. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Das Vorzeichen von K ist physikalisch motiviert. Sonst erhält man keine zeitlich periodische Lösung. Für eine vollständige Lösung muß man zumindest aus mathematischer Sicht auch den anderen Fall diskutieren. Eine Lösung der zweiten Gleichung lautet, wie in (1.5)

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{K}x) + c_2 \sin(\sqrt{K}x).$$

Die Randbedingung $v(0) = 0$ eliminiert den Kosinusterm, die Bedingung $v(\pi) = 0$ ergibt für K die möglichen Werte $K = n^2$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Damit kann man eine Schar von Lösungen der Gleichung (1.17) angeben. Sie lautet

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(d_n^1 \cos(nt) + d_n^2 \sin(nt)\right) \sin(nx). \tag{1.22}$$

Geht man von einer Ausgangsauslenkung mit Ausgangsgeschwindigkeit 0 aus, so verschwindet der Sinusterm und man behält die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(nt) \sin(nx). \tag{1.23}$$

Ausführliche historische Bemerkungen findet man bei Heuser, [13, S. 441-449]. Diese seien allen Hörern anempfohlen. Man erkennt, daß über das Problem der schwingenden Saite viele der großen Mathematiker nachgedacht haben, wir erwähnen Euler[2], Lagrange[3],

[2] Leonhard Euler (15.4.1707–18.9.1783) hinterließ ein äußerst umfangreiches wissenschaftliches Werk und erzielte in allen mathematischen Bereichen bahnbrechende Fortschritte. Er wurde zum Wegbereiter eines modernen Funktionenbegriffes und legte damit den Grundstein zum Studium von Differentialgleichungen. Die Herausgabe seines vollständigen Werkes ist bis heute nicht abgeschlossen. Er verbrachte längere Zeit an der Akademie der Wissenschaften in Potsdam und am Hofe der Zarin in St. Petersburg.

[3] Joseph Louis Lagrange (25.1.1736–10.4.1813) war Mathematiker, Physiker und Astronom. Er arbeitete zunächst über Variationsprobleme. Auf Einladung von Friedrich II verbrachte er 20 Jahre in Berlin und verfaßte hier unter anderem sein Werk *Mécanique analytique*. Neben seinen Beiträgen zur Analysis (nach ihm sind eine Restgliedformel und der Multiplikator benannt) stammen auch algebraische Erkenntnisse von ihm.

BERNOULLI[4], D'ALEMBERT[5] und RIEMANN[6]. Diese Liste ist unvollständig.

- **Die Wärmeleitungsgleichung**
Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, die die Temperaturentwicklung in einem Stab modelliert. Wir nehmen an, wir hätten einen Stab der Länge ℓ. Für $x \in (0, \ell)$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $u(x,t)$ die Temperatur des Stabes zum Zeitpunkt t an der Stelle x. Die Anfangsverteilung der Temperatur sei durch eine Funktion $u_0(x)$ gegeben. An den Enden des Stabes bieten sich verschiedene Randbedingungen an, die physikalisch motiviert sind. Zum einen kann man annehmen, daß man an den Enden eine feste Temperatur τ hat, o.B.d.A. nehmen wir $\tau = 0$ an, oder eine vollständige Isolierung, d.h. keine Temperaturänderung durch den Rand, d.h. $u_x(0,t) = u_x(\ell, t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die erste Randbedingung wird nach DIRICHLET[7] benannt, die zweite nach NEUMANN[8]. An der Stelle (x,t) ist dabei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \tag{1.24}$$

erfüllt. Zur Vereinfachung setzen wir $k = 1$. Wieder macht man den Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$. Dann erhält man

$$\frac{w'}{w} = \frac{v''}{v} = \lambda.$$

Hier lautet eine mögliche Lösung

$$u(x,t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)).$$

Aus der Randbedingung am linken Rand ergibt sich $c_1 = 0$, und die Randbedingung am rechten Rand ergibt $\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$, also

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$$

für eine natürliche Zahl n. Da man beliebige Summen (Reihen) bilden kann, lautet eine sehr allgemeine Lösung

[4] Johann I Bernoulli (6.8.1667-1.1.1748) war jüngerer Bruder von Jakob I Bernoulli, von dem er die Mathematik lernte, sich aber später mit ihm überwarf. Er lehrte in Groningen und Basel und schuf bedeutende Beiträge zur Analysis, insbesondere löste er das Problem der schwingenden Saite und arbeitete zur Variationsrechnung.

[5] Jean-Baptist le Rond d'Alembert (17.11.1717-29.10.1783) war einer der bekanntesten Gelehrten seiner Zeit. Er arbeitete zunächst über Hydrodynamik. Sein Hauptwerk „Traité de dynamique" widmete sich der klassischen Mechanik und ihrer Mathematisierung. Er bemühte sich die physikalische Umwelt mathematisch zu beschreiben und die dabei auftretenden Probleme zu lösen, u.a. beschrieb er die Bewegung der schwingenden Saite durch eine Differentialgleichung.

[6] Bernhard Riemann (17.9.1826-20.7.1866) war Sohn eines Pastors und studierte auch anfänglich Theologie. Seine Dissertation widmete sich den Grundlagen der Funktionentheorie. In seinem Habilitationsvortrag legte er den Grundstein für ein modernes Verständnis der Geometrie. Obwohl er nicht einmal vierzig Jahre alt wurde, hat die Mathematik und Physik grundlegend beeinflußt.

[7] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13.2.1805-5.5.1859) bewies den großen Fermat'schen Satz für $n = 5$. Bekannt sind vor allem die nach ihm benannten Reihen, die in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielen, und sein Beitrag zur Variationsrechnung. Er wurde Nachfolger von Gauß in Göttingen, lehrte und forschte in vielen Gebieten der Mathematik. Herausragend sind seine Leistungen in der Zahltentheorie und in der Theorie der Differentialgleichungen.

[8] Franz Ernst Neumann (11.9.1798-23.5.1895) arbeitete vor allem zur mathematischen Physik.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \tag{1.25}$$

Die Werte für c_n bestimmt man durch Entwicklung von u_0 in eine Fourierreihe, siehe z.B. Dym & McKean[8]

- **Das elektrische Feld**
  Sei **E** ein elektrisches Feld in der Ebene mit Komponenten **E**=(**P**, **Q**). Sei **U** das Potential dieses Feldes. Also **E**= ∇**U** , wobei **U** eine Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y ist. Wir stellen uns die Frage, welches sind die Linien, längs denen das Potential konstant ist. An fast allen Punkten $(x,\ y)$ wird entweder $x = x(y)$ eine Funktion von y sein, oder umgekehrt $y = y(x)$ eine Funktion von x. Wir beschränken uns auf den zweiten Fall, der erste geht daraus durch einfaches Umschreiben hervor. Um die Äquipotentiallinien zu finden, geben wir uns eine, zunächst beliebige, Konstante c vor und stellen die Frage, wo ist **U**= c? Die Annahme, daß diese Linie durch $y = y(x)$ zu beschreiben ist, führt auf

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.26}$$

Dies ist ein Beispiel einer **exakten** Differentialgleichung. Allgemeiner sind diese folgendermaßen definiert:

Definition 1.1.1 *Die Differentialgleichung habe die Form*

$$f(x,y)\frac{dy}{dx} + g(x,y) = 0. \tag{1.27}$$

Gibt es eine Funktion $\mathbf{U}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *so daß*

$$f(x,y) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y},\ g(x,y) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \tag{1.28}$$

so nennt man die Gleichung (1.27) exakt.

Bei exakten Differentialgleichungen sind die Niveaulinien von **U** dann immer aus Trajektorien der Gleichung zusammengesetzt. Hat man die Niveaulinien gefunden, kann man oft auch noch die Trajektorien bestimmen. Aus $U_{xy} = U_{yx}$ erhält man unmittelbar die notwendige Bedingung

$$f_x = g_y$$

für die Exaktheit einer Gleichung. Ist bei einer Gleichung der Form (1.27) die Bedingung (1.28) nicht erfüllt, so ist es manchmal möglich, einen **integrierenden Faktor** zu finden. Dies ist eine Funktion $\mathbf{M}(x,y)$, so daß $\mathbf{M}f$ bzw. $\mathbf{M}g$ die Bedingung (1.28) erfüllen. Eine Diskussion der Gleichung ist dann der Diskussion einer exakten Gleichung ähnlich. Insbesondere führt die Forderung $(Mg)_y = (Mf)_x$ auf die partielle Differentialgleichung

$$M_y g + M g_y = M_x f + M f_x.$$

1.1.1 Die ersten numerischen Schritte

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir die das erste einfache numerische Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen besprechen und auf die genannten Probleme anwenden. Wir betrachten eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = f(t,x), \ x(0) = x_0$$

auf dem $\mathbb{R}^n$ und wollen einen Algorithmus zur Bestimmung einer Näherungslösung entwickeln. Der einfachste Zugang ist die Überlegung

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t,x),$$

und daraus entsteht

$$x(t+h) = x(t) + h * f(x,t).$$

Eine Programmiersprache, die sich speziell eignet, Algorithmen auf einfache Weise in Programme umzuwandeln, ist

`matlab.`

Das zugehörige matlab-Programm sieht wie folgt aus (bei gegebenem $x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R}$, einer Schrittweite $sw > 0$ und einer Endzeit $t_1 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{lll} x = & x_0 & \\ t = & t_0 & \\ h = & sw & \\ \quad \text{while} & t < t_1 & \\ & \quad x = & x + h * f(t,x) \\ & \quad t = & t + h \\ \quad \text{end} & & \end{array}$$

Das angegebene Programm berechnet eine Näherungslösung, jedoch wird diese erst mit Sinn erfüllt, wenn man entweder durch eine graphische Ausgabe oder durch geeignete Aufbereitung der Resultate diese in verständlicher Sprache darstellen kann.

Dabei wird auf natürliche Weise die Frage nach einer graphischen Darstellung der Resultate gestellt. Je nach Fragestellung mag die Antwort unterschiedlich ausfallen, wir präsentieren zwei Beispiele in matlab:

1. Wir initialisieren einen Wert i=0 und fügen in die obige while-Schleife noch die Befehle i=i+1 und y(i)=x (oder im Falle eines Vektors x den Befehl y(i)=x(k) für einen Index k ein. Danach erhält man mit dem einfachen Kommando
   plot(y)
   einen Auftrag zur graphischen Ausgabe der entsprechenden Komponente über der Zeit. Das vollständige Programm sieht dann wie folgt aus, wobei f in einer eigenen Datei abgelegt wird.

```
x = x0
t = t0
h = sw
i = 0
  while t    < t1
        y(i)= x
        x    = x + h * f(t, x)
        t    = t + h
        i    = i + 1
  end

plot y
```

2. Oft will man jedoch eine andere Darstellung: Wir betrachten dies anhand der Pendelgleichung und setzen $x_1(t) = x(t)$ und $x_2(t) = x'(t)$ und stellen nun jeweils den Wert des Vektors $(x_1(t), x_2(t))$ dar. Hier sieht das vollständige Programm wie folgt aus

```
x = x0
t = t0
h = sw
i = 0
  while t    < t1
        y1(i)= x(1)
        y2(i)= x(2)
        x    = x + h * f(t, x)
        t    = t + h
        i    = i + 1
  end

plot(y1,y2)
```

Ein Beispiel für die Pendelgleichung ist das folgende Programm (zu speichern in einer Datei pendel.m (innerhalb des Matlab-Suchpfades):

```
t = 0
t1= 80
x = [0, 1.915]
h = 0.005
i = 1
  while t     < t1
        e1(i) = x(1);
        e2(i) = x(2);
        x     = x + h * h_osc(t, x);
        t     = t + h;
        i     = i + 1;
  end
```

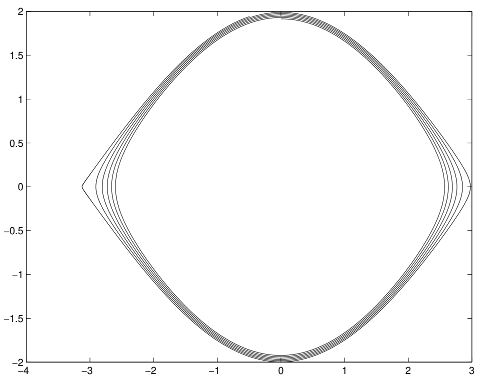

Abbildung 1.2: Das mathematische Pendel, der Anfangswert ist innerhalb der sogenannten Seperatrix gewählt. Die Seperatrix trennt Gebiete von Anfangswerten mit speziellen Eigenschaften. Sie selbst besteht aus Lösungskurven, die jedoch nicht leicht zu finden sind. Die Frage, ob das Bild das wirkliche Lösungsverhalten korrekt widergibt, wird uns noch beschäftigen.

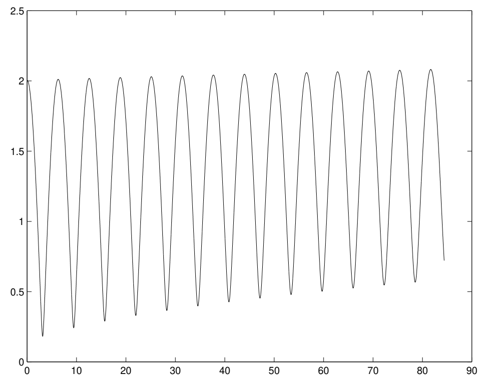

Abbildung 1.3: Das mathematische Pendel mit Anfangswert außerhalb sogenannten Seperatrix.

plot(e1,e2)

dabei wird noch eine Datei mit dem Namen h_osc.m folgendes Inhaltes

```
function v=h_osc(t,x)
v=[x(2),-sin(x(1))];
```

benötigt. Es liefert die Graphik in Abbildung 1.2. Ändert man den Anfangswertert der zweiten Komponente auf $x(2) = 2.005$, so erhält man Abbildung 1.3

Ein interessantes Verhalten liefert der Anfangswert 1.91535, siehe Abbildung 1.4.

1.1.2 Aufgaben

Aufgabe 1.1.2 Man überlege sich, ob ein Zerfallsgesetz $u(t)$, welches der Beziehung (1.8) genügt, auch eine Gleichung der Form (1.6) erfüllt.

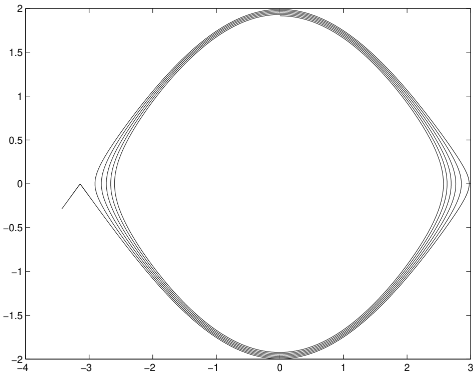

Abbildung 1.4: Die numerisch berechnete Lösung scheint für diesen Anfangswert innerhalb, der Seperatrix zu starten, zu einem späteren Zeitpunkt zeigt sie jedoch das Verhalten der Lösung von außerhalb..

Aufgabe 1.1.3 (a) Man begründe, daß jede Lösung der Gleichung (1.1) die Form Ce^x mit einer reellen Konstante C hat.
(b) Man gebe ein entsprechendes Argument für die Gleichung (1.4) und die Lösungen (1.5) an.

Aufgabe 1.1.4 Man löse die Gleichungen
(a) $u' = u^2 + 1$
(b) $u' = -\frac{x^2}{u^3}$
(c) $u' = e^u \sin(x)$
mit der Methode der *Trennung der Veränderlichen* und diskutiere das Verhalten der Lösungen mit $u(0) = p_0,\ p_0 \in \mathbb{R}$. Darunter verstehen wir die Beantwortung der folgenden Fragen.

- Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung?
- Wie verhält sich die Lösung für $t \to t_+,\ t \to t_-$, wenn (t_-, t_+) das (maximale) Intervall bezeichnet, auf dem die Lösung $u(t)$ existiert?

Aufgabe 1.1.5 Man verifiziere die Aussagen über die logistische Gleichung:
(a) Für $p_0 \in (0, K)$ existiert die Lösung für alle Zeiten und strebt für $t \to \infty$ gegen K, für $t \to -\infty$ gegen Null.
(b) Für $p_0 > K$ existiert die Lösung nicht für alle reellen Zeiten. Man diskutiere das Verhalten.
(c) Man untersuche das Verhalten der Lösungen für $p_0 < 0$!

Aufgabe 1.1.6 Man diskutiere das System (1.21) für $K < 0$.

Aufgabe 1.1.7 Man überprüfe die folgenden Gleichungen auf Exaktheit, bestimme für die nicht exakten Gleichungen einen integrierenden Faktor und bestimme die Lösungen. Man beachte, daß die Gleichungen nicht überall Sinn machen. In diesen Fällen betrachte man eine äquivalente Differentialgleichung für die Funktion $x = x(y)$. Gibt es eine symmetrische Schreibweise?

1. $yy' = x$

2. $xy' = y$

3. $x - y + (-x + 1)y' = 0$

4. $4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$

5. $xy^2 + y - xy' = 0$

Aufgabe 1.1.8 Man programmiere den oben genannten Algorithmus in matlab und stelle die Lösungen zu den oben genannten Modellproblemen für verschiedene Anfangs- und Parameterwerte graphisch dar und interpretiere die Ergebnisse.

1.2 Bezeichnungen

Die folgenden Bezeichnungen sind Standard und werden regelmäßig gebraucht werden. Einige werden erst später erklärt.

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$i\mathbb{R}$	die imaginäre Achse
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler reeller Vektorraum mit üblichen Strukturen
u'	Ableitung einer Funktion die auf $\mathbb{R}$ definiert ist
$\dot{u}$	wie eben, unabhängige Veränderliche ist die Zeit t
$\exp(.)$	Exponentialfunktion
$\lvert . \rvert$	Betrag einer reellen Zahl oder Norm im $\mathbb{R}^n$
$\lVert . \rVert$	Norm in einem Banachraum
X,Y	metrische Räume oder Banachräume
$M,\ N$	Mannigfaltigkeiten
T_xM	Tangentialraum an M in $x \in M$
TM	Tangentialbündel von M
$C(A, B)$	Raum der stetigen Funktionen von $A \to B$
$\mathrm{Lip}(A, B)$	Raum der Lipschitz stetigen Funktionen
∂U	Rand einer Menge U
dist(A,B)	Abstand zweier Mengen: $\inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

1.3 Hilfsmittel aus der Analysis

In diesem Abschnitt wollen wir einige Begriffe einführen, bzw. wiederholen, die für eine einfache und geschlossene Behandlung der Theorie unumgänglich sind.

1.3.1 Der Banach'sche Fixpunktsatz

Definition 1.3.1 *Sei* $\mathbf{X}$ *eine Menge,* $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung. Das Paar* $(\mathbf{X}, d)$ *heißt metrischer Raum, falls* d *den folgenden Forderungen genügt.*
(M1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$
(M2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(M3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$
(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.3.2 *Es sei* $(\mathbf{X}, d)$ *ein metrischer Raum.*
(a) Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{X}$ *nennt man Cauchyfolge*[9]*, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine natürliche Zahl* $N \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$n > N, \ m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(b) Ein metrischer Raum $\mathbf{X}$ *heißt vollständig, wenn zu jeder Cauchyfolge* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *in* $\mathbf{X}$ *ein Element* $\overline{x} \in \mathbf{X}$ *existiert, so daß gilt*

$$\overline{x} = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Dies bedeutet natürlich: Zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $N \in \mathbb{N}$*, so daß gilt*

$$n > N \Rightarrow d(x_n, \overline{x}) < \varepsilon.$$

Eine reiche Klasse von metrischen Räumen sind normierte Vektorräume. Wir werfen einen Blick darauf.

Definition 1.3.3 *Sei* $\mathbf{X}$ *ein reeller Vektorraum.*
(a) Man nennt $(\mathbf{X}, \|.\|)$ *einen normierten Raum, falls* $\|.\|$ *eine Abbildung* $\|.\| : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *ist, so daß*

1. $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{X}$;
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$;
4. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbf{X}$

gilt.

Ohne Beweis geben wir das folgende (triviale) Lemma an.

[9] Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789-22.5.1857) war Sohn eines hohen Beamten und genoß demzufolge eine gute Privatausbildung. Nach einem ingenieurwissenschaftlichen Studium eignete er sich nebenbei Werke von Lagrange an. Im Jahr 1811 löste er ein Problem, das Lagrange formuliert hatte. Er arbeitete über Integrale, Strömungsmechanik und Elastizitätstheorie. Speziell die Arbeiten zum letztgenannten Bereich machten ihn zu einem der bekanntesten Mathematiker seiner Zeit. Im weiteren arbeitete er auf vielen Gebieten, sein Hauptarbeitsgebiet wurde die Analysis mit der Theorie von Differentialgleichungen. Nach Gauß begann er mit komplexen Zahlen und der zugehörigen Analysis zu arbeiten. Cauchy war ungeheuer produktiv und dies sehen wir noch heute an vielen Konzepten, die seinen Namen tragen.

Lemma 1.3.4 *Mit*

$$d(x,y) = \|x-y\| \tag{1.29}$$

wird ein normierter linearer Raum ($\mathbf{X}$, $\|.\|$) *zum metrischen Raum* ($\mathbf{X}$, d).

Definition 1.3.5 *Ist ein normierter, linearer Raum* ($\mathbf{X}$, $\|.\|$) *bezüglich der Metrik aus (1.29) vollständig, so bezeichnet man ihn als Banachraum, nach* BANACH[10].

Definition 1.3.6 *Sei* ($\mathbf{X}$, d) *ein metrischer Raum. Eine Abbildung* $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *heißt* Kontraktion, *falls für alle* $(x,\ y)$ *in* $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ *gilt:*

$$d(Tx,Ty) < d(x,y). \tag{1.30}$$

T nennt man stark kontrahierend, wenn es ein $\lambda \in (0,1)$ *gibt, so daß für alle* $(x,y) \in \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ *gilt*

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y). \tag{1.31}$$

Satz 1.3.7 *[Banach] Jede stark kontrahierende Abbildung* $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *hat einen eindeutig bestimmten Fixpunkt* $\overline{x} \in \mathbf{X}$.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Angenommen $x_1,\ x_2$ sind Fixpunkte. Dann ist

$$d(x_1,x_2) = d(Tx_1,Tx_2) < \lambda d(x_1,x_2).$$

Also ist $d(x_1,x_2) = 0$ und wegen (M2) folgt $x_1 = x_2$. Wir kommen zur Existenz. Sei $x_0 \in \mathbf{X}$ beliebig. Wir konstruieren die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{X}$ durch $x_n = Tx_{n-1}$ und behaupten, daß dies eine Cauchyfolge ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für $m,\ n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 1$ ergibt sich mit (M4)

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x_{m-1}) + \ldots + d(x_{n+1},x_n) = \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1},x_j)$$

Für ein j im angegebenen Bereich schließt man

$$d(x_{j+1},x_j) = d(T^j x_1, T^j x_0) \leq \lambda^j d(x_1,x_0).$$

Also hat man

$$d(x_m,x_n) \leq \sum_{j=n}^{m} \lambda^j d(x_1,x_0) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \lambda^j d(x_1,x_0) < \varepsilon$$

solange nur n genügend groß ist. $\square$

Satz 1.3.8 *[Stetige Abhängigkeit] Sei* ($\mathbf{X}$, d) *ein vollständiger metrischer Raum,* $(\mathbf{Y},d')$ *ein metrischer Raum. Ferner sei für jedes* $y \in \mathbf{Y}$ *eine starke Kontraktion* $T_y : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *mit Kontraktionskonstante* λ_y *gegeben. Es sei* $s = \sup_{y\in\mathbf{Y}} \lambda_y < 1$. *Für jedes* $x \in \mathbf{X}$ *sei die Abbildung*

$$F_x : \mathbf{Y} \to \mathbf{X} : y \mapsto T_y x$$

stetig. Dann ist auch die Abbildung

$$G : \mathbf{Y} \to \mathbf{X} : y \mapsto \overline{x}_y, \tag{1.32}$$

stetig, wobei $\overline{x}_y$ *durch* $T_y\overline{x}_y = \overline{x}_y$ *definiert ist.*

[10]Stefan Banach (30.3.1892-31.8.1945), polnischer Mathematiker, war der Begründer der Theorie linearer, normierter Räume und ihren linearen Abbildungen. Seine Arbeiten sind die Grundlage der modernen Funktionalanalysis. Er und seine Schüler zeigten viele Anwendungen der Funktionalanalysis auf.

Beweis: Fixiere $y_0 \in \mathbf{Y}$. Wir zeigen die Stetigkeit in y_0. Sei $\overline{x}_0$ der zugehörige Fixpunkt von T_{y_0}. Dann gilt für den Fixpunkt $\overline{x}_y$ von T_y,

$$\begin{aligned} d(\overline{x}_y, \overline{x}_0) &= d(T_y\overline{x}_y, T_{y_0}\overline{x}_0) \\ &\leq d(T_y\overline{x}_y, T_y\overline{x}_0) + d(T_y\overline{x}_0, T_{y_0}\overline{x}_0) \\ &\leq \lambda_y d(\overline{x}_y, \overline{x}_0) + d(T_y\overline{x}_0, T_{y_0}\overline{x}_0). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Es folgt

$$(1-s)d(\overline{x}_y, \overline{x}_0) \leq (1-\lambda_y)d(\overline{x}_y, \overline{x}_0) \leq d(T_y\overline{x}_0, T_{y_0}\overline{x}_0).$$

Wegen $s < 1$ darf man durch $(1-s)$ teilen und die Behauptung folgt aus der Stetigkeit von F_{x_0}. □

1.3.2 Mannigfaltigkeiten

In diesem kurzen Abschnitt führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit soweit ein, daß wir Anfangswertprobleme auf Mannigfaltigkeiten diskutieren können. Dies macht die Theorie nicht schwieriger, führt aber oft zu entscheidenden Vereinfachungen der Beschreibung von Lösungen von Differentialgleichungen. Oft ist allein die Geometrie eines Vorgangs so einschränkend, daß es sinnvoll ist, sich diese Einschränkungen zunutze zu machen. Man denke an das Pendel. Die Geometrie zwingt zur Bewegung auf einer Kreislinie. Zur Beschreibung des Zustandes benötigt man zwei Variablen in $S^1 \times \mathbb{R}$, den Winkel (nimmt nur Werte auf der Kreislinie an) und die Winkelgeschwindigkeit, welche Werte in $\mathbb{R}$ annehmen kann. Eine Beschreibung in $\mathbb{R}^2$ würde vier Größen benötigen, zwei Zahlen für den Ort, zwei für die Geschwindigkeit.

Definition 1.3.9 *Es sei (M, d) ein metrischer Raum.*

1. *Sei $\{U_x \subset M | x \in M\}$ eine offene Überdeckung von M. Eine Familie von Homöomorphismen $\tau_x : U_x \to V_x$, wobei $V_x \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist, so daß für je zwei Abbildungen $\tau_x,\ \tau_y$ gilt*

   $$\tau_x \circ \tau_y^{-1} : \tau_y(U_x \cap U_y) \to \tau_x(U_x \cap U_y) \tag{1.34}$$

   ist $r-$mal stetig differenzierbar, nennt man einen C^r-Atlas auf M. Einen Atlas bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$.

2. *Ist $\mathcal{A}$ ein C^r-Atlas, $\tau \in \mathcal{A}$ eine Abbildung mit zugehörigem Definitionsbereich U, so nennen wir τ eine C^r-Karte und das Paar $(\tau,\ U)$ eine C^r-Koordinatenumgebung.*

3. *Zwei C^r-Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sind äquivalent, wenn für zwei Koordinatenumgebungen $(\tau_1,\ U_1)$, (τ_2, U_2) mit $\tau_1 \in \mathcal{A}_1,\ \tau_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt,*

   $$\tau_1 \circ \tau_2^{-1} : \tau_2(U_1 \cap U_2) \to \tau_1(U_1 \cap U_2) \tag{1.35}$$

   ist r-mal stetig differenzierbar.

4. *Eine Äquivalenzklasse Σ von C^r-Atlanten $[\mathcal{A}]$ wird als C^r-* differenzierbare Struktur auf *M bezeichnet.*

5. *Ist Σ eine C^r-differenzierbare Struktur auf M, so nennt man das Paar (M, Σ) eine C^r-* Mannigfaltigkeit.

6. *Ist M zusammenhängend, so sind alle Bilder von Koordinatenumgebungen im gleichen Raum $\mathbb{R}^n$. Die Zahl n heißt die* Dimension *der Mannigfaltigkeit.*

Bemerkung: Die in Punkt 3 definierte Äquivalenz ist, wie man leicht nachprüft, tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Damit wird die Definition in Punkt 4 sinnvoll.

Beispiel 1.3.10

- **Der euklidische Raum**
  Hier definiert man durch eine Koordinatenumgebung $(id, \mathbb{R}^n)$ einen Atlas und dieser gibt eine differenzierbare Struktur. Dieses Beispiel ist natürlich trivial.

- **Sphären**
  Die Einheitssphäre S^n im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist gegeben durch
  $$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}.$$
  Die Definition von Koordinatenumgebungen bleibt dem Leser/ der Leserin überlassen. Hier, wie bereits zuvor, bezeichnet $|.|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^{n+1}$.

- **Tori**
  Die Definition der Tori ist eine erste interessante Konstruktion mit Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ und darin $\mathbb{Z}^n$ als additive Untergruppe. Wir führen auf $\mathbb{R}^n$ eine Äquivalenzrelation ein, indem wir zwei Punkte äquivalent nennen, falls sie sich um einen Vektor in $\mathbb{Z}^n$ unterscheiden. Sei $\mathbf{T}^n$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation. Als Metrik führt man ein
  $$d'([x],[y]) = \inf\{d(x,y) \mid x \in [x], y \in [y]\}, \tag{1.36}$$
  wobei d die euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Das Nachprüfen der ersten drei Eigenschaften einer Metrik ist elementar.

  Die letzte der Eigenschaften einer Metrik erhält man, indem man zwei Punkte $x \in [x]$ und $y \in [y]$ wählt, die den Abstand minimieren (die Existenz ist klar!?). Dann gilt für jedes $z \in [z]$
  $$d'([x],[y]) = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$
  Beim Übergang zum Infimum auf der rechten Seite entsteht das Problem, daß das Infimum in beiden Termen für verschiedene $z \in [z]$ angenommen werden könnte. Sei also $d'([x],[z]) = d(x,z')$ und $d'([y],[z]) = d(y,z)$. Dann erhält man durch Verschieben (die Metrik d ist translationsinvariant!), daß $d'([x],[z]) = d(x',z)$ für ein geeignetes $x' \in [x]$ ist. Dann hat man $d'([x],[z]) = d(x',z)$ und
  $$d'([x],[y]) \leq d(x',y) \leq d(x',z) + d(y,z) = d'([x],[z]) + d'([y],[z]).$$
  Um Koordinatenumgebungen zu definieren, betrachten wir für $x \in \mathbb{R}^n$ die Kugel $K(x)$ mit Radius $1/4$ um x. Sie schneidet jede Äquivalenzklasse höchstens einmal. Sei $\rho_x : K(x) \to \mathbf{T}^n$ gegeben durch die Einschränkung der Abbildung $x \mapsto [x]$. Da jede Klasse höchstens einen Punkt in dieser Kugel besitzt, ist die Abbildung injektiv und deswegen umkehrbar. Für je zwei Punkte $y_1,\ y_2 \in K(x)$ gilt $d'(\rho_x(y_1), \rho_x(y_2)) = d(y_1, y_2)$. Deswegen ist ρ_x ein Homöomorphismus und gleiches gilt natürlich für die Umkehrung $\tau_x = \rho_x^{-1}$. Insgesamt ergibt sich, daß $\mathbf{T}^n$ eine C^∞-differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Definition 1.3.11 *Eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to M$ heißt* differenzierbar *, wenn für jede Karte τ aus einem Atlas in Σ gilt, daß $\tau \circ \gamma$ differenzierbar ist. Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen.*

Allgemeiner definiert man differenzierbare Abbildungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Wir werden dies benötigen, um Differentialgleichungen hinschreiben zu können.

Definition 1.3.12 *Seien (M, Σ), (N, Σ') differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt* differenzierbar*, wenn für je zwei Karten τ, τ' aus Σ, Σ' gilt, daß*

$$\tau' \circ f \circ \tau^{-1} : \tau(U) \to \tau'(U')$$

differenzierbar ist.

Bemerkung 1.3.13 Euklidische Räume seien immer mit der differenzierbaren Struktur versehen, welche durch die Identität definiert wird.

Definition 1.3.14 *Sei (M, Σ) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und $\gamma_{1,2} : \mathbb{R} \to M$ seien differenzierbare Abbildungen (Kurven) mit $x_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Wir sagen, γ_1 und γ_2 sind im Punkt x_0* tangential*, in Zeichen $\gamma_1 \sim_0 \gamma_2$, wenn für jede Koordinatenumgebung (τ, U) von $\gamma_1(0)$ gilt*

$$(\tau \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \gamma_2)'(0).$$

Eine einfache Überlegung liefert:

Lemma 1.3.15 (a) $\sim_0$ ist eine Äquivalenzrelation.
(b) Ist für eine Karte τ die Beziehung $(\tau \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \gamma_2)'(0)$ erfüllt, so ist sie für jede Karte richtig.

Beweis: Durch einfaches Nachprüfen! □

Definition 1.3.16 *Sei $[\gamma]_0$ eine Äquivalenzklasse, der Relation $\sim_0$. Eine Klasse $[\gamma]_0$ wird* Tangentialvektor *an M im Punkt $\gamma(0)$ genannt. Die Menge der Tangentialvektoren bei $x \in M$ bezeichnet man mit T_xM.*

Lemma 1.3.17 *Die Menge T_xM bildet einen reellen Vektorraum, dessen Dimension mit der Dimension der Mannigfaltigkeit zusammenfällt.*

Beweis: Wir müssen zeigen, daß man Tangentialvektoren an M im Punkt $x \in M$ in geeigneter Weise mit Skalaren multiplizieren kann und auch eine Addition möglich ist. Seien dazu $[\gamma]_0$, $[\gamma_{1,2}]_0$ drei Tangentialvektoren an M bei x, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar und (τ, U) eine Koordinatenumgebung von $x \in M$. Die Kurven $\gamma, \gamma_{1,2}$ seien Repräsentanten der Tangentialvektoren $[\gamma]_0$, $[\gamma_1]_0$, bzw. $[\gamma_2]_0$. Wir setzen

$$\lambda[\gamma]_0 = [\tau^{-1}(\lambda(\tau \circ \gamma))]_0 \tag{1.37}$$

und

$$[\gamma_1]_0 + [\gamma_2]_0 = [\tau^{-1}(\tau \circ \gamma_1 + \tau \circ \gamma_2 - \tau(x))]_0. \tag{1.38}$$

Zunächst muß gezeigt werden, daß diese Verknüpfungen unabhängig von den Repräsentanten und unabhängig von der gewählten Koordinatenumgebung (τ, U) ist. Wir führen dies nur in einem, dem einfacheren, Fall aus. Angenommen, $\gamma, \overline{\gamma}$ seien beide Repräsentanten von $[\gamma]_0$. Aufgrund der Definition ist $\gamma(0) = \overline{\gamma}(0) = x$. Wir müssen nun zeigen, daß für jede Karte σ, die bei x definiert ist, gilt

$$\left(\sigma \circ \tau^{-1} (\tau \circ \gamma)\right)' (0) = \left(\sigma \circ \tau^{-1} (\tau \circ \overline{\gamma})\right)' (0).$$

Eine einfache Anwendung der Produktregel liefert als Ergebnis, daß beide Seiten gleich sind. Wählt man in der Konstruktion eine andere Karte $\tilde{\tau}$, so muß wiederum für eine beliebige Karte σ gezeigt werden, daß

$$\sigma \left(\tau^{-1} (\lambda \tau \circ \gamma)\right)' (0) = \sigma \left(\tilde{\tau}^{-1} (\lambda \tilde{\tau} \circ \gamma)\right)' (0)$$

ist. Da die Ableitung linear in λ ist, folgt das Ergebnis wieder aus der Produktregel. Die Dimension erhält man einfach durch Identifizierung von $[\gamma]_0$ mit $(\tau \circ \gamma)'(0)$ für eine feste Karte mit zugehöriger Koordinatenumgebung (τ, U), wobei $\gamma(0) \in U$ liegt. □

Lemma 1.3.18 *Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit M, für $x \in M$ sei T_xM der Tangentialraum. Wir setzen*

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$$

und definieren Karten $\tau_{x,v} : TM \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Hier ist $(x, v) \in TM$, d.h. $x \in M$, $v \in T_xM$. Ferner sei (τ, U) eine Koordinatenumgebung von x. Für $y \in U$ und $w \in T_yM$ setzen wir

$$\tau_{x,v}(y, w) = (\tau_x(y), (\tau_x \circ \gamma)'(0)),$$

wobei γ eine Kurve ist, welche w repräsentiert.
Die Menge $\{\tau_{x,v},\ x \in M,\ v \in T_xM\}$ bildet einen Atlas auf TM. Hat M eine C^k differenzierbare Struktur, so ist TM eine C^{k-1}-differenzierbare Mannigfaltigkeit. Man beachte die Wahl der Topologie auf TM: wir wählen die gröbste Topologie, so daß alle $\tau_{x,v}$ stetig sind.

Beweis: Nachzulesen in Büchern über Differentialtopologie. Siehe z.B. Bröcker & Jänich[11] [4]. □

Man beachte, daß die Konstruktion nicht von v abhängt.

Definition 1.3.19 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Wir definieren die* tangentiale Abbildung *$Tf : TM \to TN$ faserweise durch $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$, indem wir einen Tangentialvektor $v \in T_xM$, der durch eine Kurve γ repräsentiert wird, abbilden auf die Klasse $[f \circ \gamma]_0$.*

Definition 1.3.20 1. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (wir werden in Zukunft auf die Schreibweise als Paar verzichten). Sei $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine Kurve (d.h. eine glatte Abbildung). Wir definieren den* Tangentialvektor *$[\gamma]_t$ für $t \in \mathbb{R}$ im Punkt $\gamma(t)$ durch den Tangentialvektor der Kurve $\gamma_1(s) = \gamma(t + s)$ im Punkt $\gamma_1(0)$.*

[11] T. Bröcker und K. Jänich sind an der Universität Regensburg tätige gegenwärtige Mathematiker.

2. *Eine stetige Abbildung $v : M \to TM$ mit der Eigenschaft $v(x) \in T_xM$ für alle $x \in M$ heißt* Vektorfeld *auf M.*

3. *$w : M \times \mathbb{R} \to TM$ sei eine glatte Abbildung mit der Eigenschaft $w(x,t) \in T_xM$ für alle $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$. Wir nennen w ein* zeitabhängiges Vektorfeld *auf M.*

4. *Gegeben sei ein (zeitabhängiges) Vektorfeld v. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Eine Kurve $\gamma : I \to M$ heißt* Integralkurve *für v, wenn für jedes $t \in I$ der Tangentialvektor $[\gamma]_t$ der Kurve im Punkt $\gamma(t)$ mit $v(\gamma(t))$ bzw. mit $v(\gamma(t), t)$ übereinstimmt.*

Bemerkung 1.3.21 *Ist $M = \mathbb{R}^n$, so ist natürlich $TM = \mathbb{R}^{2n}$. Jedoch identifiziert man üblicherweise die Tangentialvektoren wieder mit Punkten des Raumes und betrachtet dann Vektorfelder als Abbildungen $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bzw. $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Dies macht manchmal die Schreibweise einfacher. Konzeptionell ist jedoch die Trennung einfacher. Im weiteren Verlauf werden wir uns ausschließlich dem Studium von Integralkurven von (zeitabhängigen) Vektorfeldern widmen.*

<u>Bemerkung:</u> Hat man ein Vektorfeld $v : M \to TM$ auf einer Mannigfaltigkeit M, dann ist formal die tangentiale Abbildung Tv eine Abbildung von $TM \to T(TM)$. Im Spezialfall, daß $v(x) = 0 \in T_xM$ ist, kann man jedoch T_xf als Abbildung $T_xM \to T_xM$ auffassen. Das sollte sich jede(r) selbst überlegen! Noch ein Hinweis: Viele Bilder zur Erläuterung der Konzepte findet man im Buch von CHILLINGWORTH *[5] oder bei* ARNOL'D *[3].*

Neben den bisher erwähnten Büchern über gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es noch eine ganze Reihe von Bücher, die teilweise über das hier behandelte Material hinausgehen. Als Beispiele seien genannt: Amann [2], Hale [11], Hartman [12], Knobloch & Kappel [14], Palis & de Melo [15] und Walter [18].

1.3.3 Aufgaben

Aufgabe 1.3.22 Man zeige, daß die Menge $C([0,1], \mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit Werten im $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Norm

$$\|u\| = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|,$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 1.3.23 Wir betrachten die Abbildung

$$T : C([0,1], \mathbb{R}^n) \to C([0,1], \mathbb{R}^n) : u \mapsto \int_0^1 f(.,y)u(y)dy, \tag{1.39}$$

wobei f eine auf $[0,1] \times [0,1]$ stetige, reellwertige Funktion ist. Man zeige, T ist stetig und linear. Ist T eine Kontraktion?

Aufgabe 1.3.24 Man beweise das Lemma 1.3.4.

Aufgabe 1.3.25 Man veranschauliche sich das Tangentialbündel an die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^2$. Wie sehen typische Vektorfelder aus? Wie hat man sich das entsprechende auf dem Torus $\mathbf{T}^2$ vorzustellen.

Kapitel 2

Allgemeine Existenzsätze

Im weiteren Verlauf der Vorlesung beschränken wir uns auf Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Zunächst zeigen wir Existenz von Integralkurven. Dabei betrachten wir nicht den allgemeinsten Fall. Danach zeigen wir, daß, unter gewissen Annahmen, Integralkurven eindeutig sind. Daran anschließend werden stetige bzw. differenzierbare Abhängigkeit von den Parametern des Problems untersucht.

2.1 Nichtautonome Differentialgleichungen

2.1.1 Die Existenz von Integralkurven

Wir beginnen mit der Gleichung

$$\dot{u} = v(u,t), \tag{2.1}$$

wobei $V : M \times \mathbb{R} \to TM$ ein zeitabhängiges Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M ist. Gesucht wird eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to M$, so daß zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ gilt $T\gamma(t) = v(\gamma(t), t)$. Üblicherweise schreibt man $u(t)$ für $\gamma(t)$ und $\dot{u}$ für $T\gamma(t)$. Hier wird stillschweigend vorausgesetzt, daß alle beteiligten Funktionen an der Stelle t ausgewertet werden. Nur wenn von dieser Konvention abgewichen wird, wird das Argument explizit angegeben. Einen wichtigen Spezialfall stellt die Gleichung

$$\dot{u} = f(u,t), \tag{2.2}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dar. Dabei ist f eine stetige, bezüglich *u lokal Lipschitz*[1] *stetige Funktion.* Dies bedeutet, daß f stetig ist und zu jedem Punkt $(u,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und eine Konstante M_U existiert, so daß für je zwei Punkte $(u_1, t),\ (u_2, t) \in U$ gilt

$$|f(u_1,t) - f(u_2,t)| \leq M_U\left(|u_1 - u_2|\right). \tag{2.3}$$

Man nennt die Differentialgleichung (2.2) **nichtautonom**, weil die Variable t explizit in der Gleichung auftritt. Natürlich können wir in den folgenden Ausführungen auch zulassen, daß das Vektorfeld nicht von t abhängt.

[1] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (14.5.1832-7.10.1903) studierte bei Neumann und Dirichlet. Er forschte sowohl in der Zahlentheorie, Differentialgeometrie, über Besselfunktionen, Fourier-Reihen wie auch über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und deren Umfeld.

Sei $(u_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$. Wir suchen ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine Kurve $u : I \to \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften $t_0 \in I$,

$$u(t_0) = u_0 \tag{2.4}$$

und für jedes $t \in I$ gilt $\dot{u}(t) = v(u(t), t)$, d.h. u erfüllt (2.1).

Definition 2.1.1 *Wir nennen M den Phasenraum, $M \times \mathbb{R}$ den erweiterten Phasenraum und den Graphen der Abbildung*

$$\mathbb{R} \to M \times \mathbb{R} : t \mapsto (u(t), t)$$

bezeichnen wir als Integralkurve.

Man beachte den Unterschied der Definition in diesem Spezialfall und der allgemeineren von oben! **Man beachte den Sonderfall $M = \mathbb{R}^n$.** Bezüglich der Existenz von Integralkurven hat man den folgenden Satz, hier betrachten wir zunächst die Situation im $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.1.2 *[Lokaler Existenzsatz] Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz stetig. Dann gibt es zu jedem $u_0 \in W$, $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Zahl $\delta > 0$ und eine auf dem Intervall $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definierte stetige Funktion $u : I_\delta \to W$ mit folgenden Eigenschaften:*

- *u ist auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ stetig differenzierbar;*
- *u genügt der Bedingung (2.4);*
- *u löst die Differentialgleichung (2.2).*

Gibt es ein Intervall I, welches t_0 enthält und eine Funktion $w : I \to W$ mit den Eigenschaften, $w(t_0) = u_0$ und w löst die Differentialgleichung (2.2), so gilt $u = w$ auf $I_\delta \cap I$.

Beweis: Sei U eine Umgebung von (u_0, t_0) in $W \times \mathbb{R}$, so daß auf U die Funktion f die Lipschitz Konstante M_U hat, mit der die Ungleichung (2.3) erfüllt ist, und $|f(u,t)| \leq N_U \ \forall (u,t) \in U$. Sei $\Delta = \inf\{|(x,t) - (u_0, t_0)| \mid (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus U\}$. Ist $\mathbb{R}^{n+1} \setminus U$ leer, so sei Δ eine beliebige positive Zahl. Wähle $\lambda \in (0,1)$. Setze $M = \max\{1, M_U\}$, $N = \max\{1, N_U\}$ und

$$\delta = \frac{1}{3} \min\{\frac{\Delta}{N}, \frac{3\lambda}{M}\}.$$

Mit $C(I_\delta, W)$ bezeichnen wir die Menge der auf I_δ definierten stetigen Funktionen mit Werten in W. Mit der Metrik $d(u,v) = \max\{|u(t) - v(t)| \mid t \in I_\delta\}$ wird $C(I_\delta, W)$ zum vollständigen metrischen Raum. Man prüfe alle Eigenschaften nach! Für $u \in C(I_\delta, W)$ definieren wir eine neue Funktion $Tu \in C(I_\delta, W)$ durch

$$(Tu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s), s) ds. \tag{2.5}$$

Wir zeigen
1.) T ist eine starke Kontraktion auf $C(I_\delta, W)$.
2.) Der Fixpunkt u ist eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.
Zu 1.) Zunächst prüfen wir, ob für $v \in C(I_\delta, W)$ auch Tv wieder in diesem Raum liegt. Die Stetigkeit von Tv ist nahezu offensichtlich. Um einzusehen, daß $Tv(t) \in W$ liegt, zeigen wir, daß sogar $(Tv(t), t) \in U$ gilt. Offensichtlich ist $(Tv(t_0), t_0) = (u_0, t_0) \in U$. Wegen der Stetigkeit von

Tv folgt, daß die Menge $I_U = \{t \in I_\delta \mid (v(t), t) \in U\}$ offen in I_δ ist. Damit gibt es ein Intervall $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ mit $\delta_1 \leq \delta$, so daß für $t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$ gilt $(Tv(t), t) \in U$. Dann ist aber auch $(Tv(t), t) \in U$ für $|t - t_0| = \delta_1$. Dazu schätzen wir die Differenz $|Tv(t) - u_0|$ ab:

$$|(Tv(t), t) - (u_0, t)| \leq |\int_{t_0}^t f(v(s), s)ds| + \delta_1 \leq \int_{t_0}^t |f(v(s), s)|ds + \delta_1 \leq \delta_1 N_U + \delta_1 \leq \delta(1 + N) < \Delta$$

Damit ist $(Tv(t), t) \in U$. Die Menge I_U ist damit offen und abgeschlossen in I_δ. Da $t_0 \in I_U$ liegt, gilt $I_U = I_\delta$.
Wir kommen zur Kontraktionseigenschaft. Seien $v, w \in C(I_\delta, W_1)$, wobei $W_1 = \{u \in W \mid |u - u_0| \leq \Delta\}$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} d(Tv, Tw) &= \max\{|Tv(t) - Tw(t)| \mid t \in I_\delta\} \\ &\leq |\int_{t_0}^t (f(v(s), s) - f(w(s), s))ds| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(v(s), s) - f(w(s), s)|ds \\ &\leq \delta M_U d(v, w) \\ &< \lambda d(v, w). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz 1.3.7 folgt nun die Existenz von genau einem Fixpunkt von T.
Zu 2.) Ist $Tu = u$ so gilt für $t \in I_\delta$

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(u(s), s)ds. \tag{2.7}$$

Damit ist klar, daß u im Inneren des Intervalls stetig differenzierbar ist. Die Ableitung $\dot{u}(t)$ ist nach dem HDI gleich $f(u(t), t)$. Wie schon vorher bemerkt, gilt auch (2.4). □

Korollar 2.1.3 *Seien W, f wie im Satz 2.1.2. Die Konstanten Δ, M, N seien wie im Beweis angegeben. Dann existiert auf jedem Intervall I_δ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.2), (2.4) mit $\delta < \min\{\frac{\Delta}{2N}, \frac{1}{M}\}$.*

Beweis: Bitte selbst einfügen!

□

Der eben bewiesene Satz wird oft nach den Mathematikern *Picard*[2] und *Lindelöf*[3] benannt.

Ohne Beweis möchte ich den Satz von Peano[4] angeben, der eine Verallgemeinerung der Existenzaussage darstellt.

Satz 2.1.4 *Ist $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(u_0, t_0) \in W \times \mathbb{R}$, so besitzt das Anfangswertproblem (2.2), (2.4) eine Lösung (lokal in der Zeit, d.h. es existiert ein Intervall I_δ und eine Funktion $u : I_\delta \to W$ welche (2.2) und (2.4) erfüllt).*

<u>Bemerkung:</u> Man beachte, daß in diesem Satz die Eindeutigkeitsaussage des vorherigen Satzes nicht gemacht wird. Sie ist auch falsch, wie das Beispiel $\dot{x} = \sqrt{x}$ lehrt. Eine genauere Diskussion folgt in den Übungen.

Nun wollen wir die dem obigen lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz entsprechende Aussage für Mannigfaltigkeiten beweisen.

Satz 2.1.5 *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $v : M \times \mathbb{R} \to TM$ ein C^1-glattes Vektorfeld, $x_0 \in M$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, so existiert ein $\delta > 0$ und eine Umgebung U von x_0 in M, so daß eine eindeutig bestimmte Lösung $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to U$ des Anfangswertproblemes $\dot{x} = v(x,t),\ x(t_0) = x_0$ existiert.*

<u>**Beweis:**</u> Zunächst wollen wir nochmals klären, was es genau bedeutet, daß $v : M \times \mathbb{R} \to TM$ C^1-glatt ist. Dazu benötigen wir Karten und Koordinatenumgebungen (τ_x, U_x), bzw. $(\tau_{x,v}, TM \cap p^{-1}(U_x))$, wobei $p : TM \to M$ für $v \in T_xM$ durch $p(v) = x$ definiert ist. Zu überprüfen ist nun die Glattheit der Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$

$$\tau_x(U) \to \tau_x(U) \times \mathbb{R}^n) : (y, v_y) \mapsto (y, (\tau_x \circ \gamma_{v_y})'(0)v_y).$$

Dann ist die Abbidung $f(y,t) = (\tau_x \circ \gamma_{v_y})'(0)v_y$ Lipschitz stetig und es existiert lokal in der Zeit eine Lösung des Anfangswertproblemes

$$\dot{y} = f(y,t),\ \ y(t_0) = \tau_{x_0}(x_0).$$

Durch $\tau_{x_0}^{-1}(y(t))$ wird eine Kurve auf M mit den gewünschten Eigenschaften definiert. Zu zeigen ist noch, daß die angegebene Konstruktion unabhängig von der Wahl der Karten und Koordinatenumgebungen ist. □

[2] Charles Emile Picard (24.71856-11.12.1941) lehrte an der Sorbonne in Paris. Bekannt sind neben dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz in der Theorie der Differentialgleichungen die Sätze zur Werteverteilung holomorpher Funktionen, die den Satz von Casorati-Weierstraß verschärfen. Picard wirkte auch in anderen Bereichen der Mathematik.

[3] Ernst Leonard Lindelöf (7.3.1870-4.6.1946) ist finnischer Mathematiker und Begründer der finnischen Funktionentheorieschule. Seine Hauptarbeitsgebiete sind die Analysis und die Funktionentheorie.

[4] Guiseppe Peano (27.8.1858-20.4.1939) bewies im Jahre 1887, daß die Stetigkeit der rechten Seite hinreichend für die Lösbarkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist. Seine Axiome, die die natürlichen Zahlen charakterisieren, stammen aus dem Jahr 1889. Kurz danach fand er die nach ihm benannte den Raum füllende Kurve. Er beeinflußte die Mengenlehre, reformierte den Mathematikunterricht an italienischen Schulen und war einer der Initiatoren des ersten internationalen Mathematikerkongresses in Zürich im Jahre 1897.

2.1.2 Fortsetzbarkeit

Schon bei der Diskussion der logistischen Gleichung trat das Phänomen auf, daß Lösungen nicht für alle Zeiten existieren müssen. Wir wollen dies nun vertiefen.

Definition 2.1.6 *(a) Wir betrachten das Anfangswertproblem (2.2), (2.4). Sei $u : I \to W$ eine Lösung. Man nennt eine Lösung u_1, welche auf einem Intervall I_1 definiert ist, eine Fortsetzung von u, wenn $I \subset I_1$ gilt und zusätzlich auf I die Funktionen u und u_1 übereinstimmen.*
(b) Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt maximales Existenzintervall, wenn es eine Funktion $u : I \to W$ gibt, welche (2.2), (2.4) löst, so daß aus

$$u_1 : I_1 \to W \text{ ist Fortsetzung von } u$$

folgt, $I = I_1$.

Lemma 2.1.7 [Maximale Existenzintervalle] *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung. Dann gilt für Lösungen des Anfangswertproblems (2.2), (2.4):*
(a) Jede Lösung besitzt eine Fortsetzung auf ein maximales Existenzintervall.
(b) Maximale Existenzintervalle sind offen.
(c) Für das Verhalten von u am Rand des maximalen Existenzintervall (t_1, t_2) des genannten Anfangswertproblems erhält man die folgende Alternative (sei T einer der Randpunkte, d.h. $T \in \{t_1,\ t_2\}$):

- *$T = \infty$ oder $T = -\infty$,*
  $$\lim_{t \to T, t \in (t_1, t_2)} u(t)$$
  existiert oder auch nicht.
- *$|T| < \infty$, dann gilt: Zu jedem Kompaktum $K \subset W$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß*
  $$|t - T| < \delta, t \in (t_1, t_2) \Rightarrow u(t) \notin K.$$

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus den beiden Beobachtungen:
1.) Sind $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des Anfangswertproblems (2.2), (2.4), so gibt es eine Lösung dieses Problems, welche auf $I_1 \cup I_2$ definiert ist. Denn aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des Satzes 2.1.2 stimmen u_1 und u_2 auf $I_1 \cap I_2$ überein. Außerhalb des Durchschnitts setzt man $u(t) = u_1(t)$, falls $t \in I_1$ und $u(t) = u_2(t)$ andernfalls.
2.) Die Vereinigung von allen Intervallen auf denen Lösungen des Anfangswertproblems existieren, ist wieder ein Intervall. An jedem Punkt in diesem Intervall stimmen alle dort definierten Lösungen überein.
Behauptung (b) ist offensichtlich. Warum?
Zum Beweis der dritten Aussage unterscheiden wir die beiden Fälle $|T| = \infty$ und $|T| < \infty$. Im ersten Fall ist nichts zu zeigen. Der zweite Fall bedarf einer Überlegung. Angenommen, es gäbe ein Kompaktum $K \subset W$ und eine Folge $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $t_i \in (t_1, t_2)\ \forall i$ und $\lim_{i \to \infty} t_i = T$ mit $w_i = u(t_i) \in K\ \forall i \in \mathbb{N}$. Dann hat die Folge $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $w_0 \in K \subset W$. Aufgrund des Existenzsatzes 2.1.2 gibt es eine Lösung $w_i : J_i \to W$, wobei $J_i \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist und $w(t_i) = w_i$. Nun sei U eine Umgebung von (w_0, T) mit einer Lipschitzkonstante $M = M_U$. Wir setzen

$$\Delta = \frac{1}{2} \inf\{|(w_0, T) - (w, t)| \mid (w, t) \in \mathbb{R}^n \setminus U\}.$$

Sei $\delta < \frac{1}{M}\min\{\Delta, 1\}$. Dann existiert nach Korollar 2.1.3 jede Lösung mit Anfangswert

$$|(w_a, t_a) - (w_0, T)| < \Delta$$

zumindest auf dem Intervall $(t_a - \delta, t_a + \delta)$. Weiter existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß aus $i > N$ folgt $|(w_i, t_i) - (w_0, T)| < \Delta$ und $|t_i - T| < \delta$. Dann existiert aber die Lösung durch (w_i, t_i) auf dem Intervall $(t_i - \delta, t_i + \delta)$. Dies enthält aber T als inneren Punkt, im Widerspruch zur Annahme, daß T Endpunkt des maximalen Existenzintervalls ist. □

Bemerkung: Die Aussage in Teil (c) kann man folgendermaßen interpretieren. Entweder die Lösung des Anfangswertproblems existiert für alle Zeiten, oder wenn dies nicht der Fall ist, so konvergiert sie bei Annäherung an einen Endpunkt des maximalen Existenzintervalls gegen den Rand ∂W von W oder gegen Unendlich. Es stellt sich die Frage, ob man einfache Bedingungen für *globale Existenz* angeben kann. Darunter verstehen wir die Frage, wann die Lösung des Anfangswertproblems (2.2), (2.4) für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. Eine einfache hinreichende Bedingung wird im nächsten Satz angegeben.

Satz 2.1.8 *[Globale Existenz] Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig mit einer globalen Lipschitzkonstante M. Dann existieren für alle Anfangswerte u_0 die Lösungen des Anfangswertproblems (2.2), (2.4) für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Dies folgt, wenn wir zeigen können, daß für jeden Anfangswert $(u_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ die zugehörige Lösung $u(t)$ auf einem Intervall I_δ existiert mit einem δ, welches nicht von (u_0, t_0) abhängt. (Wie?) Dies ist eine direkte Konsequenz des Korollars 2.1.3, denn Δ ist beliebig, M ist unabhängig vom Paar (u_0, t_0) und N läßt sich durch Δ und M nach oben abschätzen. □

Wir können nun den globalen Existenzsatz für kompakte Mannigfaltigkeiten beweisen.

Satz 2.1.9 *Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, $v : M \times \mathbb{R} \to TM$ ein C^1-glattes Vektorfeld. Dann gibt es zu jedem Paar $x_0 \in M$, $t_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x : \mathbb{R} \to M$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = v(x, t)$, $x(t_0) = x_0$. Diese Lösung bezeichnen wir mit $x(t, t_0, x_0)$.*

Beweis: Dies folgt sofort aus dem Beweis von Lemma 2.1.7. □

2.2 Stetige Abhängigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert und von Parametern untersuchen. Dazu führen wir zunächst die folgenden Schreibweisen ein.

Definition 2.2.1 *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz stetige Abbildung. Eine Lösung $u : I \to W$ des Anfangswertproblems (2.2), (2.4) wollen wir mit $u(t, t_0, u_0)$ bezeichnen, dh.*

$$\frac{du}{dt}(t, t_0, u_0) = f(u(t, t_0, u_0), t)$$

für alle $t \in W$ und

$$u(t_0, t_0, u_0) = u_0.$$

Soll die Abhängigkeit von der rechten Seite f ausgedrückt werden, so schreiben wir $u(t, t_0, u_0, f)$. Hängt f von Parametern $\lambda \in \mathbf{Y}$ ab, wobei $\mathbf{Y}$ ein metrischer Raum ist, so bezeichnen wir diese Abhängigkeit durch $u(t, t_0, u_0, \lambda)$.

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ die Menge aller Lipschitz stetigen Funktionen auf $W \times \mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$. Wir wollen einen Abstandsbegriff auf diesem Funktionenraum einführen. Dazu wählen wir eine abzählbare Familie von offenen Mengen $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Der Abschluß von U_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompakt.
2. $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$
3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = W \times \mathbb{R}$

Damit kann man Pseudo-Metriken (der Begriff wird weiter unten erläutert) auf $\mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ durch

$$d_n(f,g) = \max_{(u,t)\in U_n} |f(u,t) - g(u,t)| \tag{2.8}$$

definieren. Diese wiederum geben uns die Möglichkeit eine Metrik auf $\mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ zu konstruieren. Wir setzen einfach

$$d_L(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)} \tag{2.9}$$

und fassen die notwendigen Beweisschritte im nächsten Lemma zusammen.

Lemma 2.2.2 *1. Es gibt Familien von offenen Mengen $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit den eben angegebenen Eigenschaften.*

2. d_n ist eine Pseudo-Metrik, d.h. es sind alle Axiome einer Metrik außer dem Axiom M.2) erfüllt, stattdessen gilt nur noch die Implikation $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$.

3. d_L ist eine Metrik.

4. Eine Folge $f_n \in \mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann bezüglich der Metrik d_L, wenn sie auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert.

5. Die Konvergenz von Funktionen ist unabhängig von der gewählten Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen.

<u>Beweis:</u> Die erste Aussage beweisen wir durch Angabe einer Familie mit den genannten Eigenschaften. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$U_n = \{(u,t) \mid |(u,t)| < n \text{ und } \mathrm{dist}((u,t), \partial W \times \mathbb{R}) > \frac{1}{n}\}.$$

Man prüft leicht nach, daß diese Wahl zum gewünschten Ergebnis führt.
Die zweite Aussage ist klar. Natürlich ist d_n keine Metrik, stimmen nämlich f, g auf U_n überein und sind auf W verschieden, so ist $d_n(f,g) = 0$, obwohl $f \neq g$ gilt.
Bei der dritten Behauptung sind alle Aussagen bis auf M.2) und die Dreiecksungleichung trivial. Zum Beweis von M.2) überlegt man sich, daß $d_L(f,g) = 0$ impliziert, daß $d_n(f,g) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $f = g$. Andernfalls gäbe es einen Punkt $(u,t) \in W \times \mathbb{R}$ mit $f(u,t) \neq g(u,t)$. Dann gibt es aber auch eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $(u,t) \in U_n$ und $d_n(f,g) \neq 0$.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung betrachten wir zunächst einen der Summanden, schreiben statt d_n einfach d und schätzen die Differenz

$$\frac{d(f,h)}{1+d(f,h)} + \frac{d(h,g)}{1+d(h,g)} - \frac{d(f,g)}{1+d(f,g)} \tag{2.10}$$

ab. Nach Multiplikation mit den drei Nennern ergibt sich aus (2.10)

$$\begin{aligned}
&d(f,h) + d(f,h)(d(h,g) + d(f,g)) + d(f,h)d(h,g)d(g,f)\\
&+d(g,h) + d(g,h)(d(h,f) + d(f,g)) + d(f,h)d(h,g)d(g,f)\\
&-(d(f,g) + d(f,g)(d(h,g) + d(f,h)) + d(f,h)d(h,g)d(g,f))\\
=\ &d(f,h) + d(g,h) - d(f,g) + 2d(f,h)d(h,g) + d(f,h)d(f,g)d(g,h)\\
\geq\ &0
\end{aligned}$$

Die vierte Aussage wollen wir in den Übungen beweisen, vgl. Aufgabe 2.5.2. Multiplizieren und Aufsummieren ändern natürlich nichts an der Eigenschaft einer Metrik.
Die letzte Behauptung folgt aus der vorherigen Aussage. □

Wir kommen nun zur wesentlichen Aussage dieses Abschnitts.

Satz 2.2.3 *[Stetige Abhängigkeit] Die Lösung $u(t, t_0, u_0, f)$ des Anfangswertproblems (2.2), (2.4) ist in allen Variablen stetig.*

Bemerkung: In Wirklichkeit beweisen wir etwas mehr. Wenn wir die Existenzaussage des Satzes von Peano zugrunde legen würden, würden wir sogar die stetige Abhängigkeit von $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ erhalten. Es wäre natürlich, die Stetigkeit auf den parameterabhängigen Fixpunktsatz 1.3.8 von Banach zurückzuführen. Doch dabei treten Probleme auf. Deshalb geben wir hier einen direkten Beweis, ohne auf diese Version des Fixpunktsatzes zurückzugreifen.

Beweis: Setze $\mathbf{Y} = W \times \mathbb{R} \times \mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Als Metrik d' auf $\mathbf{Y}$ setzen wir

$$d'(y_1, y_2) = |w_1 - w_2| + |t_1 - t_2| + d_L(f_1, f_2),$$

wobei $y_k = (w_k, t_k, f_k)$ für $k = 1, 2$ bezeichnet. Ist $u(t)$ Lösung von (2.2), (2.4), so hat u die Form

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s), s)ds.$$

Ist v die Lösung von

$$\dot{v} = g(v, t) \text{ und } v(\tau_0) = v_0, \tag{2.11}$$

so hat man natürlich die entsprechende Formel

$$v(t) = v_0 + \int_{\tau_0}^{t} g(v(s), s)ds.$$

Wir werden zeigen, daß zu jedem $t \in (t_1,\ t_2)$, dem maximalen Existenzintervall der Lösung u des Anfangswertproblems (2.2), (2.4), und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta' > 0$ existiert, so daß

$$d'((u_0, t_0, f), (v_0, \tau_0, g)) < \delta' \tag{2.12}$$

impliziert, daß $[t_0, t]$ (oder $[t, t_0]$) im maximalen Existenzintervall der Lösung v von (2.11) liegt und für alle $s \in [t_0, t]$ (oder für alle $s \in [t, t_0]$) gilt

$$|u(s) - v(s)| < \varepsilon.$$

Wir wollen beides in einem Schritt zeigen. Seien also $t \in (t_1,\ t_2)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. O.B.d.A. nehmen wir an, daß $t > t_0$ ist. U sei eine Umgebung von $G = \{(u(s), s) | s \in [t_0, t]\}$ in $W \times \mathbb{R}$, deren Abschluß kompakt ist und so daß f auf U eine Lipschitz Konstante M_U besitzt. Wir definieren $N = \sup\{|f(w,s)| \mid (w,s) \in U\} + 1$, $M = \max\{1, M_U\}$, $\Delta = \operatorname{dist}(G, \partial U)$ und $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon e^{-M(t-t_0)}$. Ersetzen wir ε durch $\min\{\varepsilon,\ \Delta\}$und zeigen wir, daß für ein $\delta' > 0$ aus (2.12) folgt, daß

$$|u(s) - v(s)| < \varepsilon,\ \forall s \in [t_0, t],$$

so folgt natürlich insbesondere auch die Aussage über das maximale Existenzintervall. Es gibt ein $\varepsilon' > 0$, so daß aus $d_L(f,g) < \varepsilon'$ folgt, daß $|g(w,s)| < N$ für alle $(w,s) \in U$ ist. Wegen der Kompaktheit des Abschlusses von U gibt es ein n_0, so daß $U \subset U_{n_0}$ ist. Da $\overline{U}$ kompakt und $\cup_{n=0}^{\infty} U_n$ eine Überdeckung von $\overline{U}$ ist, kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen. Da die Folge der $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist (siehe Punkt 2 der Konstruktion der Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), genügt dann eine einzelne Menge zum Überdecken. Wir setzen $\delta = \frac{\Delta}{3N}$. Dann gilt die Teilbehauptung: Ist $d_L(f,g) < \varepsilon'$ und $\operatorname{dist}((v_0, \tau_0), G) < \delta$, so existiert die Lösung v des Anfangswertproblems (2.11) zumindest auf dem Intervall $[\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$. Diese Behauptung folgt aus dem Lemma 2.1.8, wenn wir zeigen, daß für $\tau \in [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$, die Integralkurve $(v(\tau), \tau)$ in U verläuft. Dazu berechnen wir den Abstand von $(v(\tau), \tau)$ von G

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(G, (v(\tau), \tau)) &\leq \operatorname{dist}(G, (v_0, \tau_0)) + |(v_0, \tau_0) - (v(\tau), \tau)| < \delta + \int_{\tau_0}^{\tau} |g(v(s), s)| ds + |\tau - \tau_0| \\ &\leq \delta + \delta N + \delta \leq 3N\delta \leq \Delta.\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\delta' = \min\{2^{-n_0-1}, 2^{-n_0-2}\frac{\tilde{\varepsilon}}{|t-t_0|}, \frac{\tilde{\varepsilon}}{4N}, \varepsilon', \delta\}$$

und zeigen, ist $d'((u_0, t_0, f), (v_0, \tau_0, g)) < \delta'$, so existiert die Lösung $v(s)$ für $s \in [t_0, t]$ und es gilt $|u(s) - v(s)| < \varepsilon$.

Zunächst folgern wir aus der Zwischenbehauptung, daß die Lösung v bei t_0 definiert ist, da $d_L(f,g) < \varepsilon'$ und $|t_0 - \tau_0| < \delta$ ist. Für die Differenz $|u_0 - v(t_0)|$ ergibt sich:

$$|u_0 - v(t_0)| \leq |u_0 - v_0| + \int_{\tau_0}^{t_0} |g(v(s), s)| ds < \delta' + N\delta' \leq 2N\delta' \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \tag{2.13}$$

Da sowohl u, wie auch v in t stetig sind, ist das maximale Intervall $I \subset [t_0, t]$ mit den Eigenschaften

- $t_0 \in I$
- $|u(t) - v(t)| < \varepsilon$

offen in $[t_0, t]$. Im nächsten Schritt beweisen wir, daß die Implikation

$$[t_0, \tau) \subset I \Rightarrow [t_0, \tau] \subset I$$

wahr ist. Ist nämlich $[t_0,\tau) \subset I$ so dürfen wir schreiben

$$u(\tau) - v(\tau) = u_0 - v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} f(u(s),s)ds - \int_{t_0}^{\tau} g(v(s),s)ds.$$

Für die Beträge ergibt sich

$$|u(\tau) - v(\tau)| \leq |u_0 - v(t_0)| + |\int_{t_0}^{\tau} f(u(s),s)ds - \int_{t_0}^{\tau} g(v(s),s)ds|.$$

Wir benutzen die Abschätzung bei t_0 und erhalten

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + |\int_{t_0}^{\tau} (f(u(s),s) - g(v(s),s))ds|.$$

Einfügen eines weiteren Termes und eine Anwendung der Dreiecksungleichung liefern:

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \int_{t_0}^{\tau} |f(u(s),s) - f(v(s),s)|ds + \int_{t_0}^{\tau} |f(v(s),s) - g(v(s),s)|ds.$$

Wir formen um (da $(v(s),s) \in U \ \forall s \in [t_0,\tau)$ ist dies möglich)

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \int_{t_0}^{\tau} M|u(s) - v(s)|ds + \int_{t_0}^{\tau} d_{n_0}(f,g)ds$$

$$\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \int_{t_0}^{\tau} M|u(s) - v(s)|ds + (t - t_0)d_{n_0}(f,g). \tag{2.14}$$

Zunächst schätzen wir $d_{n_0}(f,g)$ ab. Da $d_L(f,g) < \delta'$ ist, hat man insbesondere $d_L(f,g) < 2^{-n_0-1}$. Da

$$2^{-n_0}\frac{d_{n_0}(f,g)}{1 + d_{n_0}(f,g)} \leq d_L(f,g)$$

ist, gilt

$$\frac{d_{n_0}(f,g)}{1 + d_{n_0}(f,g)} \leq 2^{n_0} d_L(f,g)$$

und daraus folgt

$$d_{n_0}(f,g)(1 - 2^{n_0} d_L(f,g)) \leq 2^{n_0} d_L(f,g).$$

Wegen der erwähnten Abschätzung für $d_L(f,g)$ ist der Faktor auf der linken Seite immer größer als $1/2$ und man erhält $d_{n_0}(f,g) < 2^{n_0+1} d_L(f,g)$. Also hat man die Abschätzung $d_{n_0}(f,g) \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2|t-t_0|}$. Eingesetzt in (2.14) ergibt dies

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \tilde{\varepsilon} + \int_{t_0}^{\tau} M|u(s) - v(s)|ds.$$

Wir benutzen nun eine Ungleichung, die auf den schwedisch-amerikanischen Mathematiker Gronwall[5] zurückgeht, die im nachfolgenden Lemma bewiesen werden wird und erhalten

$$|u(\tau) - v(\tau)| < \tilde{\varepsilon} e^{M(\tau - t_0)} \leq \varepsilon.$$

□

[5] Thomas Hakon Gronwall (16.1.1877-9.5.1932), gebürtiger Schwede, studierte in Uppsala und Stockholm Mathematik und Ingenieurwesen. Ab 1902 war er für zwei Jahre an der TU Berlin-Charlottenburg. Danach war er in den USA tätig.

Lemma 2.2.4 *[Gronwall] Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $u : I \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion, welche für zwei positive Konstanten α, β, für ein $t_0 \in I$ und alle $t \in I$ der Abschätzung*

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} u(s)ds \tag{2.15}$$

genügt. Dann gilt für alle $t \in I$

$$u(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}. \tag{2.16}$$

Setzt man in (2.15) die strikte Ungleichung voraus, so gilt auch in (2.16) eine echte Ungleichheit.

Beweis: Sei

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} u(s)ds.$$

Damit schreibt sich (2.15) um zu

$$\dot{v} \leq \alpha + \beta v.$$

Setze $w(t) = v(t)e^{-\beta t}$. Differenzieren von w ergibt $\dot{w} \leq \alpha e^{-\beta t}$. Integration dieser Ungleichung (auf beiden Seiten stehen ausschließlich nichtnegative Funktionen) zwischen t_0 und t führt zu (man beachte $w(t_0) = 0$)

$$w(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}|e^{-\beta t} - e^{-\beta t_0}|.$$

Damit ergibt sich für v,

$$v(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}|1 - e^{\beta(t-t_0)}|,$$

oder

$$v(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}e^{\beta|t-t_0|} - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Für $u(t)$ erhält man daraus

$$u(t) \leq \alpha + \beta v(t) = \alpha + \alpha e^{\beta|t-t_0|} - \alpha.$$

Man beachte, daß eine strikte Ungleichung in (2.15) zu einer echten Ungleichheit in jeder dieser Abschätzungen führt. □

Bemerkung: Es gibt allgemeinere Versionen dieses Lemmas, von denen wir später noch einige kennenlernen werden.

Der nächste Schritt besteht darin, eine differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswert, Anfangszeit und Parametern zu beweisen. Dazu zunächst eine einfache Konsequenz des gerade bewiesenen Satzes.

Korollar 2.2.5 *[Stetige Abhängigkeit von Parametern] Sei (Λ, d_Λ) ein metrischer Raum, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : W \times \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ stetig und für festes $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Lambda$ bezüglich u lokal Lipschitz stetig. Dann ist $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ in allen Variablen stetig.*

Beweis: Wir setzen $f^\lambda(u, t) = f(u, t, \lambda)$ und müssen zeigen, daß die Abbildung $\lambda \mapsto f^\lambda$ stetig (bezüglich der Metrik d_L) ist. Seien $\varepsilon > 0$ und $\lambda_0 \in \Lambda$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.17}$$

ist. Sei U_{n_0} das entsprechende Element aus der Familie von Mengen, welche zur Konstruktion von d_L herangezogen wurde. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$d_\Lambda(\lambda_0, \lambda) < \delta \Rightarrow d_{n_0}(f^\lambda, f^{\lambda_0}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wenn dies gezeigt ist, ist der Rest klar. Denn dann ist für $n \leq n_0$ auch $d_n(f^\lambda, f^{\lambda_0}) < \varepsilon/2$ und daher ist

$$\sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} \frac{d_n(f^\lambda, f^{\lambda_0})}{1 + d_n(f^\lambda, f^{\lambda_0})} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.18}$$

und aus (2.17), (2.18) folgt, daß $d_L(f^\lambda, f^{\lambda_0}) < \varepsilon$. Bleibt noch die Existenz von δ zu beweisen. Zu jedem $(u_0, t_0) \in U_{n_0+1}$ gibt es eine Umgebung $Z(u_0, t_0, \lambda_0) \subset W \times \mathbb{R} \times \Lambda$, so daß $|f(u, t, \lambda) - f(u_0, t_0, \lambda_0)| < \varepsilon/2$ist. Dies liegt an der Stetigkeit von f in allen Variablen. Natürlich enthält $Z(u_0, t_0, \lambda_0)$ eine Menge der Form $U'(u_0, t_0) \times Y_{\delta(u_0, t_0)}$, wobei $U'(u_0, t_0) \subset U_{n_0+1}$ eine Umgebung von (u_0, t_0) ist und

$$Y_{\delta(u,t)} = \{\lambda \in \Lambda \mid d_\Lambda(\lambda, \lambda_0) < \delta(u, t)\}$$

ist. Da $\overline{U}_{n_0}$ kompakt ist, überdecken endlich viele Mengen der Form $U'(u_k, t_k)$, $k = 1, \ldots, K$ die Menge U_{n_0}. Sei $\delta = \min\{\delta(u_k, t_k) \mid 1 \leq k \leq K\}$. Dieses δ hat offensichtlich die gewünschten Eigenschaften. □

Als Folgerung hieraus betrachten wir nun differenzierbare Abhängigkeiten. Dazu schränken wir uns auf den Fall ein, daß Λ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist. d_Λ ist dann natürlich die übliche Metrik. Zur Motivation betrachten wir das folgende Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(u, \lambda) = \lambda u$. Dann ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = \lambda u,\ u(0) = 1$ gegeben durch $u(t, 0, 1, \lambda) = e^{\lambda t}$. Diese Lösung ist nach λ differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial u(t, 0, 1, \lambda)}{\partial \lambda} = t e^{\lambda t}.$$

Sei u_λ diese Funktion, dann erfüllt u_λ die Anfangsbedingung $u_\lambda(0) = 0$ und genügt der Differentialgleichung (hier ist $f_\lambda = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$ und $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$)

$$\dot{u}_\lambda = u + \lambda u_\lambda (= f_\lambda + f_u u_\lambda).$$

Die auf diese Weise vermutete Formel kann man auch noch durch eine formale Betrachtung von Differentialquotienten motivieren. Dazu sei $f : W \times \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung, wobei $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge ist. Sei λ_i eine der Variablen in $\mathbb{R}^m$. Die Abbildung f hat in Koordinaten die Form $f = (f^1, \ldots, f^n)$. Mit $f^j_{\lambda_i}$ bezeichnen wir die partielle Ableitung, also

$$f^j_{\lambda_i} = \frac{\partial f^j}{\partial \lambda_i},\ j = 1, \ldots, n,\ i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Wir schreiben f_{λ_i} für die Abbildung

$$f_{\lambda_i} = (f^1_{\lambda_i}, \ldots, f^n_{\lambda_i}).$$

Für die Vorbetrachtung reicht es, sich auf den Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ zu beschränken. Wir wollen uns damit die nachfolgenden Ergebnisse plausibel machen. Nun seien $u(t, t_0, u_0, \lambda_1)$ bzw. $u(t, t_0, u_0, \lambda_2)$ Lösungen des Anfangswertproblems (2.2), (2.4) für zwei verschiedene Werte des Parameters

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Weiter schreiben wir $u_\lambda(t, t_0, u_0, \lambda_i)$ für die Ableitung von $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ nach λ im Punkt $\lambda = \lambda_i$. Für die Differenz der beiden Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t, t_0, u_0, \lambda_1) - \dot{u}(t, t_0, u_0, \lambda_2) &= f(u(t, t_0, u_0, \lambda_1), t, \lambda_1) - f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_2) \\
&= f(u(t, t_0, u_0, \lambda_1), t, \lambda_1) - f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_1) \\
&\quad + f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_1) - f(u(t, t_0, u_0, \lambda_2), t, \lambda_2).
\end{aligned}$$

Wir schreiben nun $u(1)$ für $u(t, t_0, u_0, \lambda_1)$ und entsprechend auch $u(2)$ für $u(t, t_0, u_0, \lambda_2)$. Dividiert man durch $(\lambda_1 - \lambda_2)$, so ergibt sich aus dem obigen

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{\dot{u}(1)-\dot{u}(2)}{\lambda_1-\lambda_2} & = & \frac{f(u(1),t,\lambda_1)-f(u(2),t,\lambda_1)}{u(1)-u(2)} \frac{u(1)-u(2)}{\lambda_1-\lambda_2} & + & \frac{f(u(2),t,\lambda_1)-f(u(2),t,\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \lambda_2 \to \lambda_1. \\
\dot{u}_\lambda(1) & & f_u(u(1), t, \lambda_1) u_\lambda(1) & + & f_\lambda(u(1), t, \lambda_1) & &
\end{array}$$

Man sieht, daß es einiger Überlegungen bedarf um die Vertauschung der entsprechenden Grenzprozesse zu rechtfertigen. Ähnliche Überlegungen kann man für die Ableitungen nach Anfangswert und Anfangszeit anstellen. Statt den Grenzübergang für Differentialquotienten zu rechtfertigen, werden wir Differentialgleichungen herleiten, die von den Ableitungen nach der verschiedenen Variablen erfüllt werden. Existenz- und Eindeutigkeitssätze erlauben uns dann zu schließen, daß die Ableitungen existieren. Zur Herleitung dieser Differentialgleichungen dient ein Hilfssatz. Wir wollen noch folgende Bezeichnung vereinbaren. Seien V_1, V_2 endlichdimensionale Vektorräume. Dann bezeichne $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ die Menge aller linearen Abbildungen von V_1 nach V_2. Ist $V_1 = V_2$ so sei $\mathbb{1}$ die Identität.

Hilfssatz 2.2.6 *Sei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung eines reellen Intervalls I in den Raum der linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich. Dann hat das Anfangswertproblem, wobei eine Funktion $C : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gesucht wird,*

$$\dot{C} = AC, \quad C(t_0) = \mathbb{1} \tag{2.19}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung. Hängt A stetig von Parametern λ in einem metrischen Raum Λ ab, so ist $C(t, \lambda)$ in beiden Variablen stetig.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten die folgenden n Anfangswertprobleme für Funktionen $c_i : I \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$ gegeben durch

$$\dot{c}_i = Ac_i, \ c_i(t_0) = e_i,$$

wobei e_i der i-te kanonische Einheitsvektor ist. Diese Gleichung hat für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine Lösung, welche auf I existiert. Dann ist aber

$$C = (c_1, \ldots, c_n)$$

eine Lösung von (2.19). □

Definition 2.2.7 *Sei $u(t, t_0, u_0)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.2), (2.4). Die Differentialgleichung für eine Funktion $v : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gegeben durch*

$$\dot{v} = D_u f(u(t, t_0, u_0), t) v$$

heißt Variationsgleichung für u. Entsprechendes definiert man auch für parameterabhängige f's.

Bemerkung: Aus dem Hilfssatz 2.2.6 folgt die Lösbarkeit der Variationsgleichung.

Bezeichnung: Mit $D_i u$ wird die Ableitung von $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ nach der i-ten Variablen bezeichnet.

Satz 2.2.8 [Differenzierbare Abhängigkeit] *Seien $W \subset \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : W \times \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ sei k-mal stetig differenzierbar. Dann ist die Lösung $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ des Anfangswertproblems (2.2), (2.4) nach allen Variablen k-mal stetig differenzierbar.*
Die ersten Ableitungen von u genügen den Differentialgleichungen

1. *Die Ableitung von $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ nach der Anfangszeit, die wir, unserer Konvention folgend, mit $D_2 u$ bezeichnen wollen, löst die Gleichung*
$$\dot{z} = \frac{\partial f(u(t), t, \lambda)}{\partial u} z,$$
für eine Abbildung $z : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit Anfangswert $z(t_0) = -f(u_0, t_0, \lambda)$.

2. *Die Ableitung $D_3 u$ nach dem Anfangswert ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und löst die Gleichung*
$$\dot{C} = \frac{\partial f(u(t), t, \lambda)}{\partial u} C,$$
mit Anfangsbedingung $C(t_0) = \mathbb{1}$.

3. *Die Ableitung nach dem Parameter $D_4 u$ ist eine Abbildung in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und löst die Gleichung*
$$\frac{\partial}{\partial t} B = \frac{\partial f(u(t), t, \lambda)}{\partial u} B + f_\lambda(u, t, \lambda).$$
mit Anfangswert $B(t_0) = 0$.

Beweis: Wir beweisen dies durch Induktion nach k. Haben wir die obigen Formeln bewiesen, dann folgt zunächst die einmalige Differenzierbarkeit. Aber diese Abbildungen sind dann nach dem gleichen Schritt wieder differenzierbar. Sei $u(t, t_0, u_0, \lambda)$ die Lösung des Anfangswertproblems (2.2), (2.4). Wir betrachten die Ableitungen nach u_0 und nach λ zusammen. Dazu erweitern wir künstlich das Anfangswertproblem zu

$$\begin{array}{rclr} \dot{u} & = & f(u, t, \lambda), & u(t_0) = u_0 \\ \dot{\lambda} & = & 0, & \lambda(t_0) = \lambda. \end{array} \tag{2.20}$$

Natürlich sind die Lösungen des neuen Systems nichts anderes als die Lösungen des alten Systems, nur, daß die Parameter als Anfangswerte auftreten. Sei
$$w = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$$
und damit
$$\dot{w} = F(w, t), \ w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{2.21}$$
mit den offensichtlichen Identifikationen
$$F(w, t) = \begin{pmatrix} f(u, t, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Differenzierbarkeit nach dem Anfangswert für die neue Gleichung bedeutet natürlich, daß die Lösung der ursprünglichen Gleichung sowohl nach dem Anfangswert, wie auch nach den Parametern differenzierbar ist. Sei $w(t, t_0, w_0)$ die Lösung der Gleichung (2.21). Wir setzen für $h \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$v(t, t_0, w_0, h) = w(t, t_0, w_0 + h) - w(t, t_0, w_0)$$

und

$$V(t, t_0, w_0, h) = \int_0^1 D_w F(w(t, t_0, w_0) + sv(t, t_0, w_0, h), t) ds.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial t}(t, t_0, w_0 + h) - \frac{\partial w}{\partial t}(t, t_0, w_0) \\ &= F(w(t, t_0, w_0 + h), t) - F(w(t, t_0, w_0), t) \\ &= V(t, t_0, w_0, h) v(t, t_0, w_0, h) \end{aligned}$$

Da $v(t_0, t_0, w_0, h) = w_0 + h - w_0 = h$ ist, löst v das Anfangswertproblem

$$\dot{z} = V(t, t_0, w_0, h) z, \; z(t_0) = h.$$

Nach Hilfssatz 2.2.6 hat das Anfangswertproblem

$$\dot{C} = VC, \; C(t_0) = \mathbb{1}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $C(t, t_0, w_0, h)$, die nach Hilfssatz 2.2.6 und Korollar 2.2.5 in allen Variablen stetig ist. Aus der Eindeutigkeit wiederum schließt man, daß v die Form

$$v(t, t_0, w_0, h) = C(t, t_0, w_0, h) h$$

hat. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} |w(t, t_0, w_0 + h) - w(t, t_0, w_0) - C(t, t_0, w_0, 0)h| &\leq |v(t, t_0, w_0, h) - C(t, t_0, w_0, 0)h| \\ &= |C(t, t_0, w_0, h)h - C(t, t_0, w_0, 0)h| \\ &\leq |C(t, t_0, w_0, h) - C(t, t_0, w_0, 0)||h| \\ &= o(|h|). \end{aligned}$$

Man beachte, daß die erste Norm in der letzten Ungleichung eine Norm im Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^{n+m}$ in sich ist. Diese wird wegen der Stetigkeit von C in allen Variablen klein. Aus diesen Überlegungen folgt, daß w nach dem Anfangswert w_0 differenzierbar ist, mit Ableitung $C(t, t_0, w_0, 0)$. Damit haben wir Differenzierbarkeit von u nach Anfangswert und Parameter geklärt. Wir kommen zur Ableitung nach der Anfangszeit. Für den Rest des Beweises unterdrücken wir bei der Lösung u die Abhängigkeit vom Parameter, um die Schreibweise nicht unnötig zu verkomplizieren. Im folgenden sei $h \in \mathbb{R}$. Setzt man

$$v(t, t_0, u_0, h) = u(t, t_0 + h, u_0) - u(t, t_0, u_0)$$

und

$$A(t, t_0, u_0, h) = \int_0^1 f_u(u(t, t_0, u_0) + sv(t, t_0, u_0, h), t) ds,$$

so erhält man für v die Darstellung

$$\begin{aligned}
v(t_0,t_0,u_0,h) &= u(t_0,t_0+h,u_0)-u(t_0,t_0,u_0)\\
&= u(t_0,t_0+h,u_0)-u(t_0+h,t_0+h,u_0)+u(t_0+h,t_0+h,u_0)-u_0\\
&= -(u(t_0+h,t_0+h,u_0)-u(t_0,t_0+h,u_0))\\
&= -h\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(t_0+sh,t_0+h,u_0)ds\\
&= -h\int_0^1 f(u(t_0+sh,t_0+h,u_0),t_0+sh)ds\\
&= -hf(u_0,t_0)+R(t_0,u_0,h)h,
\end{aligned}$$

wobei natürlich gilt

$$R(t_0,u_0,h)=\int_0^1 \left(f(u_0,t_0)-f(u(t_0+sh,t_0+h,u_0),t_0+sh)\right)ds.$$

Die Funktion v löst wieder ein Anfangswertproblem, nämlich

$$\dot z = A(t,t_0,u_0,h)z,\;\; z(t_0)=-hf(u_0,t_0)+R(t_0,u_0,h)h.$$

Man beachte, daß A eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich ist. Also können wir mit dem Hilfssatz 2.2.6 das Anfangswertproblem

$$\dot C = AC,\;\; C(t_0)=\mathbb{1}$$

mit einer matrixwertigen Funktion $C=C(t,t_0,u_0,h)$ lösen. Wiederum ist C in allen Variablen stetig. Aus der Eindeutigkeit folgt wie oben die Darstellung von v durch

$$v(t,t_0,u_0,h)=C(t,t_0,u_0,h)\left(-hf(u_0,t_0)+hR(t_0,u_0,h)\right).$$

Auch das weitere ist dem obigen ganz ähnlich. Man erhält

$$\begin{aligned}
&u(t,t_0+h,u_0)-u(t,t_0,u_0)+C(t,t_0,u_0,0)f(u_0,t_0)h\\
&=((C(t,t_0,u_0,0)-C(t,t_0,u_0,h))f(u_0,t_0)+C(t,t_0,u_0,h)R(t_0,u_0,h))h\\
&=o(|h|).
\end{aligned}$$

Damit ist u stetig nach t_0 differenzierbar und $D_2u(t,t_0,u_0)=-C(t,t_0,u_0,0)f(u_0,t_0)$. Hieraus folgt die Behauptung. □

2.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir eine Verbindung zwischen Differentialgleichungen höherer Ordnung in $\mathbb{R}$ und Gleichungen erster Ordnung im $\mathbb{R}^n$ herstellen. Damit übertragen sich die Existenzsätze für die Lösungen von nichtautonomen Gleichungen auch auf Gleichungen höherer Ordnung. Wir bezeichnen die n-te Ableitung einer Funktion $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $u^{(n)}$. In diesem Abschnitt sei die unabhängige Veränderliche x. Gegeben seien $n-1$ stetige Funktionen $a_i : I\to\mathbb{R}$, wobei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall ist, und eine lokal Lipschitz stetige Funktion $f:\mathbb{R}^n\times I\to\mathbb{R}$. Wir suchen nun eine Funktion $u:I\to\mathbb{R}$, welche der Gleichung

$$Lu=u^{(n)}+a_1(x)u^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)u'+a_n(x)u=f(u,u',\ldots,u^{(n-1)},x) \tag{2.22}$$

genügt. Bevor wir uns über Anfangsbedingungen Gedanken machen, schreiben wir die Gleichung um. Wir setzen $y_i = u^{(i-1)}$. Daraus erhält man dann das System

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n \\
y_n' &= -(a_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)u' + a_n(x)u) + f(y,x).
\end{aligned}$$

Setzt man in die letzte Gleichung noch die neuen Variablen ein, so hat man

$$y_n' = -(a_1(x)y_n + \ldots + a_{n-1}(x)y_2 + a_n(x)y_1) + f(y,x).$$

Dieses System hat die Form

$$y' = A(x)y + F(y,x)$$

mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & \ldots & -a_1 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

und

$$F(y,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(y,x) \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Um hieraus ein Anfangswertproblem zu machen, müssen wir noch Anfangswerte für y vorgeben, also $y(t_0) = y_0$. Solche Anfangswerte übersetzen sich in Anfangswerte für u und die ersten $n-1$ Ableitungen von u. Damit überträgt sich der Existenz und Eindeutigkeitssatz auf solche Gleichungen. Wir notieren:

Satz 2.3.1 *Es seien $u_0^{(k)}$ für $k = 0, \ldots, n-1$ reelle Zahlen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n-1$ seien stetige Funktionen. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sei stetig und bezüglich der ersten Variablen lokal Lipschitz stetig. Dann hat das Anfangswertproblem (vgl. (2.22))*

$$\mathrm{L}u = f(u, u' \ldots, u^{(n-1)}, x),\ \ u^{(k)}(x_0) = u_0^{(k)}\ k = 0, \ldots, n-1,\ \ x_0 \in I$$

eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf einem Intervall $J \subset I$ definiert ist. Genügt f einer Lipschitz Bedingung mit einer globalen Lipschitz Konstante, so existiert die Lösung auf ganz I.

Beweis: Folgt sofort aus den entsprechenden Sätzen für die Anfangswertprobleme (2.2) und (2.4). $\square$

2.4 Ober- und Unterlösungen

Oberlösungen bzw. Unterlösungen dienen dazu die wahre Lösung einzugrenzen und zumindest noch Abschätzungen machen zu können. Sie sind für eine qualitative Diskussion oft äußerst nützlich, wie wir an Beispielen sehen werden. Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung.

Lemma 2.4.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Form $I = [x_0, b), b \leq \infty$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen, die im Inneren von I differenzierbar sind. Ist $f(x_0) < g(x_0)$ so ist entweder*

- *$f(x) < g(x)$ für alle $x \in I$*

oder

- *es gibt eine Stelle $x_1 \in I$ mit $f(x_1) = g(x_1)$ und $f'(x_1) \geq g'(x_1)$.*

Beweis: Angenommen das Lemma wäre falsch. Seien f, g differenzierbare Funktionen für die die Aussage des Lemmas nicht gilt. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, daß $f < g$ auf dem Intervall $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Da wir annehmen, daß für f, g das Lemma nicht gilt, gibt es einen Punkt $y \in I$ mit $f(y) \geq g(y)$. Dann gibt es ein maximales Intervall $J \subset I$ mit $x_0 \in J$ und $f(x) < g(x)$ für alle $x \in J$. Am rechten Endpunkt x_1 von J hat man, daß $f(x_1) = g(x_1)$ ist. Wäre nun $f'(x_1) < g'(x_1)$, so wäre $f - g$ auf einem Intervall $(x_1 - \delta, x_1)$ positiv, im Widerspruch zur Wahl von x_1. (Man führe dieses Argument aus!) $\square$

Definition 2.4.2 *Gegeben sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und das Anfangswertproblem*

$$\dot{u} = f(u, t), u(t_0) = u_0, \tag{2.26}$$

wobei f eine Funktion $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Eine Funktion $v : \mathbb{R} \to I$ heißt Oberlösung von (2.26), falls

- *$v(t_0) \geq u_0$*

und

- *$\dot{v} > f(v, t)$ gilt.*

Sind für eine Funktion w beide Ungleichungen gerade umgekehrt, so sprechen wir von einer Unterlösung.

Aufgrund unseres Lemmas 2.4.1 verlaufen Unterlösungen unterhalb und Oberlösungen oberhalb der wahren Lösung des Anfangswertproblems. Man erhält sie oft durch eine Veränderung von f, die eine explizite Lösung möglich macht. Wir diskutieren diese Möglichkeiten an einem Beispiel.
Beispiel: Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{u} = u^2 + t^2 = f(u, t)$, $u(0) = 1$. Durch die Veränderung der rechten Seite f zu $g(u, t) = u^2$ erhält man das Anfangswertproblem $\dot{v} = v^2$ und $v(0) = 1$. Aufgrund des Lemmas ist v eine Unterlösung. Eine einfache Rechnung lehrt, daß $v(t, 0, 1)$ die Form

$$v(t, 0, 1) = \frac{1}{1 - t}$$

hat. Das maximale Existenzintervall von v ist $(-\infty, 1)$ und daher kann auch die Lösung $u(t, 0, 1)$ höchstens bis zum Punkt $t = 1$ existieren. Bis dort gilt aber $t \leq 1$, also kann man abschätzen $f(u, t) \leq u^2 + 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{w} = 1 + w^2$, $w(0) = 1$ ist daher eine Oberlösung des Ausgangsproblems. $w(t, 0, 1)$ hat die Form

$$w(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Also haben wir auf dem Existenzintervall von w und für $t \geq 0$

$$v(t, 0, 1) < u(t, 0, 1) < w(t, 0, 1).$$

Die Lösung w existiert bis $t^* = \frac{\pi}{4}$. Insbesondere ist auch $[0, \frac{\pi}{4})$ im maximalen Existenzintervall von u enthalten. Ein weiteres Beispiel wollen wir in den Übungen untersuchen.

2.5 Aufgaben

Aufgabe 2.5.1 Man vervollständige den Beweis von Satz 2.1.8.

Aufgabe 2.5.2 Man zeige, daß eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ genau dann in der Metrik d_L konvergiert, wenn die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset W \times \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 2.5.3 (a) Man löse das Anfangswertproblem $\dot{u} = \operatorname{sgn}(u)\sqrt{|u|}$, $u(0) = u_0$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$. Sind die Lösungen eindeutig?

(b) Existieren die Lösungen des Anfangswertproblems $\dot{u} = u^2$, $u(0) = u_0$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.5.4 Man zeige, daß die Lösungen des Anfangswertproblems $p(x)u'' + q(x)u' + c(x) = 0$ und $u(x_0) = a, u'(x_0) = b$ eindeutig auf dem Intervall $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ lösbar sind, sofern p, q, c auf dem Intervall I stetig sind und p dort nicht verschwindet. Wie ist es, wenn p auf dem Rand verschwindet?

Kapitel 3

Lineare Differentialgleichungen

3.1 Jordan'sche Normalform

In diesem kurzen Abschnitt wiederholen wir einige Begriffe der linearen Algebra. Sei $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix A (diese wird durch die Wahl einer Basis bestimmt). Wir gehen immer von der kanonischen Basis aus und identifizieren auf diese Weise die lineare Abbildung mit der Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es einen Vektor $u_c \in \mathbb{C}^n$ gibt mit

$$Au_c = \lambda u_c.$$

Dieser Vektor u_c wird *Eigenvektor* genannt. Natürlich müssen wir auch bei reellen Matrizen komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren zulassen. Deshalb arbeiten wir zunächst im komplexifizierten Raum. Die Eigenwerte sind Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0. \tag{3.1}$$

Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es (mit Vielfachheiten gerechnet) genau n Wurzeln dieser Gleichung. Jede Wurzel von (3.1) ist auch Eigenwert, jedoch gibt es im allgemeinen weniger als n Eigenvektoren. Sei λ ein Eigenwert, so ist

$$K_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

ein A-invarianter Unterraum, der *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ. Sei m die Dimension von K_λ. K_λ ist enthalten im *verallgemeinerten Eigenraum*, der gegeben ist durch

$$E_\lambda = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } (A - \lambda \mathbb{1})^k u = 0\}.$$

Der verallgemeinerte Eigenraum E_λ zum Eigenwert λ ist invariant unter der Abbildung A. Eine weitere Zerlegung in invariante Unterräume ist möglich. Dazu betrachtet man den minimalen Wert k_0, so daß $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^{k_0} = E_\lambda$ ist. So eine Zahl existiert immer. In E_λ existiert eine Basis B, welches die Vereinigung von m Mengen $H_1, \dots, H_m$ ist, wobei jedes H_k die Form

$$H_k = \{u_{k,1}, \dots, u_{k,r_k}\}$$

hat mit

$$(A - \lambda \mathbb{1})u_{k,i+1} = u_{k,i}, \; i = 1, \dots, r_k, \; (A - \lambda \mathbb{1})u_{k,1} = 0.$$

Die Einschränkung von A auf E_λ hat in der Basis B dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathcal{B}_m \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

wobei jeder dieser $r_k \times r_k$ Blöcke $\mathcal{B}_k$ die einfache Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

hat. Damit haben wir die komplexe Jordan'sche[1] Normalform einer Matrix erhalten. In der reellen Jordan'schen Normalform hat man auch eine Darstellung in Blöcken wie in (3.2), jedoch sehen die Blöcke i.a. anders aus. Ist λ reell so bleibt die Form (3.3) erhalten. Für komplexe Eigenwerte $\lambda = e^{i\alpha}$, ergibt sich statt (3.3) die Form

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Wie sieht der Block für $\lambda = |\lambda| e^{i\alpha}$ aus?

3.2 Die Exponentialabbildung

Definition 3.2.1 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\|A\| = \sup\{|Au| \mid u \in \mathbb{R}^n,\ |u| = 1\ \}$.*

Lemma 3.2.2 *$\|.\|$ ist eine Norm auf dem linearen Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ in sich. Außerdem gilt $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.*

[1] Camille Marie Ennemond Jordan (5.1.1838-21.1.1922) wurde zunächst zum Bergbauingenieur ausgebildet. Im Jahre 1916 wurde er Präsident der französischen Akademie der Wissenschaften. Sein Werk umfaßt neben der Normalform Beiträge zur Algebra (u.a. zur Galois-Theorie), zur Analysis, zur Wahrscheinlichkeitsrechung und zur Topologie der Ebene (Kurvensatz).

Beweis: Einfaches Nachrechnen! □

Definition 3.2.3 *Sei A eine $n \times n$-Matrix. Die Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei definiert durch*

$$E(A,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k. \tag{3.5}$$

Wir nennen $E(A,t)$ die Matrixexponentialfunktion *und schreiben dafür auch manchmal*

$$E(A,t) = e^{At}.$$

Lemma 3.2.4 *Die Funktion $E(A,t)$ ist für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ definiert.*

Beweis: Übungsaufgabe! □

Satz 3.2.5 *Die Matrixexponentialfunktion $E(A,t)$ löst das Anfangswertproblem (2.19)*

$$\dot{C} = AC, C(0) = \mathbb{1}$$

aus Hilfssatz 2.2.6.

Beweis: Zunächst betrachten wir eine Teilsumme der Reihe $E(A,t)$

$$E_m(A,t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Die Ableitung von $E_m(A,t)$ ist natürlich

$$\dot{E}_m(A,t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = AE_{m-1}(A,t).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der rechten Seite (auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$) ist $E(A,t)$ differenzierbar und $\dot{E}(A,t) = AE(A,t)$. Natürlich ist auch $E(A,0) = \mathbb{1}$. □

Die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = Au$, $u(0) = u_0$ erhält man also durch $u(t,u_0) = E(A,t)u_0$.

Hilfssatz 3.2.6 Kommutieren *die beiden Matrizen A, B* miteinander*, d.h. ist $AB = BA$, folgt für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$BE(A,t) = E(A,t)B,$$

und es gilt

$$E(A+B,t) = E(A,t)E(B,t) = E(B,t)E(A,t) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Die erste Eigenschaft ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition, die zweite erhält man aus dem Eindeutigkeitssatz für die Lösung von Anfangswertproblemen, indem man nachprüft, daß $E(A+B,t)$ und $E(A,t)E(B,t)$ das gleiche Anfangswertproblem lösen. □

A kann durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Jordan'sche Normalform gebracht werden. Sei J die Jordan'sche Normalform von A und C die Transformationsmatrix, also $J = CAC^{-1}$. Die allgemeine Form des Verhaltens der Lösungen unter Koordinatentransformation ist in Aufgabe 4, Blatt 5 angegeben. Für den Spezialfall können wir die Lösung des Ausgangsproblems gewinnen, indem wir A in die Jordan'sche Normalform überführen, für diese dann die Gleichung lösen und zurücktransformieren. Wir erhalten

$$u(t, u_0) = E(A, t)u_0 = C^{-1}v(t, Cu_0) = C^{-1}E(J, t)Cu_0.$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt noch

$$E(A, t) = C^{-1}E(CAC^{-1}, t)C.$$

Natürlich kann man diese Formel auch unmittelbar aus der Definition von $E(A, t)$ schließen. Zur allgemeinen Lösung linearer Anfangswertprobleme müssen wir noch $E(J, t)$ ausrechnen. Wir gehen von der Gestalt (3.2) aus. Natürlich gilt für eine Matrix J in Blockdiagonalgestalt

$$J = \operatorname{diag}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)),$$

daß die Matrixexponentialfunktion auch Blockdiagonalgestalt annimmt, also

$$E(J, t) = \operatorname{diag}(E(\mathcal{B}_1, t), \dots, E(\mathcal{B}_m, t)).$$

Ist $\mathcal{B}$ ein Block der Länge 1, also $\mathcal{B} = (\lambda)$, so ist natürlich $E(\mathcal{B}, t) = e^{\lambda t}$. Ist $\mathcal{B}$ ein Block der Länge $r > 1$ und der zugehörige Eigenwert λ reell, so ergibt sich die Exponentialreihe aus folgenden Betrachtungen.

Definition 3.2.7 *Eine Matrix N heißt* nilpotent, *wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit $N^r = 0$.*

Lemma 3.2.8 *Ein Block der Gestalt (3.3) ist die Summe einer Diagonalmatrix D und einer nilpotenten Matrix N.*

Beweis: Natürlich ist $D = \operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$. Übrig bleibt die $r \times r$ Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $N^r = 0$ ist. Damit ist N nilpotent. □

Bemerkung: Genauer gilt, daß jede Matrix A Summe einer diagonalisierbaren und einer nilpotenten Matrix ist. Unser Beweis zeigt dies zumindest für reelle Matrizen mit ausschließlich reellen Eigenwerten.

Lemma 3.2.9 Die Matrixexponentialfunktion $E(\mathcal{B},t)$ eines Jordan-Blocks der Länge r zum Eigenwert λ hat die Gestalt

$$E(\mathcal{B},t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & t^3/6 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Beweis: Es gilt $DN = ND$ und daher mit dem Hilfssatz 3.2.6

$$E(\mathcal{B},t) = E(D+N,t) = E(D,t)E(N,t).$$

Nun ergibt $E(D,t) = e^{\lambda t}\mathbb{1}$ und da N nilpotent ist, hat man

$$E(N,t) = \mathbb{1} + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}.$$

□

Für einen nichtreellen Eigenwert stellt man die gleiche Betrachtung im Komplexen an und schneidet den Lösungsraum mit dem $\mathbb{R}^n$. Wir wollen die entsprechende Formel im Moment nicht angeben.
Den Lösungsraum linearer autonomer Gleichungen kann man einfach charakterisieren. Dies ist der Inhalt des nächsten Satzes, der im weiteren noch verallgemeinert wird.

Satz 3.2.10 [Algebraische Struktur des Lösungsraumes I] *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $U = \{u \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au\}$. U ist ein linearer Raum. Die Dimension von U ist n.*

Beweis: Offensichtlich ist die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung. Gleiches gilt für das Produkt ξu mit $\xi \in \mathbb{R}$ und $u \in U$. Also bleibt zu zeigen, daß $\dim U = n$ ist. Sei $\mathcal{A} : U \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $\mathcal{A}u = u(0)$. Offensichtlich ist $\mathcal{A}$ linear und wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen injektiv. Wegen des globalen Existenzsatzes ist $\mathcal{A}$ surjektiv. Also gilt $U \simeq \mathbb{R}^n$. □

Als nächsten Schritt betrachten wir die *inhomogene lineare Gleichung*, gegeben durch

$$\dot{u} = Au + f(t), \tag{3.8}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung ist. Wir wissen, aufgrund des Existenzsatzes, daß diese Gleichung bei Vorgabe eines Anfangswertes lösbar ist. Die algebraische Struktur ist natürlich etwas anders als vorher. Wie in der linearen Algebra besteht die allgemeine Lösung aus einer speziellen Lösung plus einem beliebigen Element aus U.

Satz 3.2.11 [Algebraische Struktur des Lösungsraumes II] *Sei*

$$U_f = \{u \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = Au + f(t)\}.$$

U_f ist ein n-dimensionaler affiner Unterraum *von $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Es existiert also ein $u^0 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß*

$$U_f = \{u^0 + u \mid u \in U\}.$$

Beweis: Wie schon bemerkt, hat die Gleichung (3.8) immer eine Lösung. Sei u^0 eine solche Lösung. Dann ist natürlich für $u \in U$ auch $u^0 + u$ eine Lösung. Wir müssen noch zeigen, daß jede Lösung diese Form hat. Sei u^1 eine weitere Lösung der Gleichung (3.8). Dann ist $u^0 - u^1$ eine Lösung der homogenen linearen Gleichung (einfaches Nachprüfen zeigt dies). Damit ist $u^0 - u^1 \in U$. □

Wir wollen uns noch kurz Gedanken machen, wie man eine spezielle Lösung u^0 findet.

Lemma 3.2.12 [Formel der Variation der Konstanten] *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist eine spezielle Lösung der Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ gegeben durch*

$$u^0(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds. \tag{3.9}$$

Beweis: Differenzieren ergibt

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + [e^{A(t-s)}f(s)]_{|s=t} + \int_0^t \frac{d}{dt}e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

also

$$\frac{d}{dt}u^0(t) = Ae^{At}u_0 + f(t) + A\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds = Au + f(t).$$

□

3.3 Die nichtautonome lineare Gleichung

In diesem Abschnitt widmen wir uns den Gleichungen

$$\dot{u} = A(t)u \tag{3.10}$$

und

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \tag{3.11}$$

wobei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind. Natürlich kann man hier nicht erwarten, daß die Konstruktion der Matrixexponentialfunktion zum Ziel führt.

Lemma 3.3.1 *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \;\; \Phi(t_0) = \mathbb{1} \tag{3.12}$$

hat für eine stetige Abbildung $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $t_0 \in I$ eine eindeutige Lösung

$$\Phi = \Phi(t, t_0) : I \times I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Beweis: Die Existenz folgt aus den Existenzsätzen (2.1.2) und (2.1.8). □

Definition 3.3.2 *Die Abbildung $\Phi : I^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : (t, t_0) \mapsto \Phi(t, t_0)$ heißt* Übergangsmatrix.

Man überlege sich eine anschauliche Begründung für die Terminologie.

Satz 3.3.3 [Eigenschaften der Übergangsmatrix] *Die Übergangsmatrix $\Phi(t, t_0)$ ist für jedes Paar $(t, t_0) \in I^2$ definiert und hat die Eigenschaften*

- $\Phi(t, t) = \mathbb{1}$;
- $\Phi(t, s)\Phi(s, t_0) = \Phi(t, t_0) \ \forall (t, s, t_0) \in I^3$;
- $\Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t)$.

Beweis: Die erste Eigenschaft ist nach Definition gegeben. Für die zweite Aussage betrachtet man die matrixwertige Funktion $\Psi(t) = \Phi(t, s)\Phi(s, t_0)$. Sie genügt der Differentialgleichung

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t)$$

mit dem Anfangswert $\Psi(s) = \mathbb{1}\Phi(s, t_0)$. Offenbar ist $\Phi(., t_0)$ eine Lösung derselben Differentialgleichung und für $t = s$ hat man den Wert $\Phi(s, t_0)$. Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems liefert die Gleichheit der linken und der rechten Seite. Die dritte Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der zweiten. □

Wie zuvor sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Wir setzen für eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$

$$U_f = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} = A(t)u + f\}.$$

Sei $U = U_0$. Wir notieren einige einfache Aussagen.

Lemma 3.3.4

1. *$u^1 \in U_f, \ u^2 \in U_g \Rightarrow u^1 + u^2 \in U_{f+g}$ [Superpositionsprinzip];*
2. *$\dim U_0 = n$;*
3. *Sei $u_0 \in U_f$ fest. Dann ist $U_f = \{u_0 + u | u \in U\}$. [Algebraische Struktur des Lösungsraumes III];*
4. *Jedes $u \in U$ hat die Darstellung $u(t, t_0, u_0) = \Phi(t, t_0)u_0$.*

Beweis: Die erste und die dritte Aussage sind trivial. Für die zweite fixieren wir einen Zeitpunkt $t_0 \in I$ und zeigen wie zuvor, daß die Abbildung $\mathcal{A} : U \to \mathbb{R}^n : u \mapsto u(t_0)$ ein Isomorphismus ist. Die letzte Aussage folgt wieder aus der Eindeutigkeit: Sei u Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = Au, \ u(t_0, t_0, u_0) = u_0.$$

Dann ergibt sich für $v(t) = \Phi(t, t_0)u_0$

$$\dot{v} = \dot{\Phi}(t, t_0)u_0 = A\Phi(t, t_0)u_0 = Av, \ v(t_0) = \Phi(t_0, t_0)u_0 = u_0.$$

Also ist $u = v$. □

Wie zuvor erhält man aus der Formel der Variation der Konstanten die Darstellung der Lösung der inhomogenen Gleichung.

Satz 3.3.5 [Variation der Konstanten] *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$ seien stetig, $t_0 \in I$. Sei $\Phi : I^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die zugehörige Übergangsmatrix. Dann hat die Lösung $u(t, t_0, u_0)$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A(t)u + f(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

die Lösung

$$u(t, t_0, u_0) = \Phi(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)f(s)ds.$$

<u>Beweis:</u> Sei

$$v(t) = \Phi(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)f(s)ds.$$

Dann ist $v(t_0) = \mathbb{1}u_0 = u_0$ und

$$\dot{v} = A(t)\Phi(t, t_0)u_0 + f(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\Phi(t, s)f(s)ds = Av + f.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung bringt das gewünschte Resultat.

3.4 Ebene lineare Systeme

In diesem Abschnitt wollen wir ebene, lineare und autonome Systeme charakterisieren. Wir betrachten also eine Gleichung der Form

$$\dot{u} = Au, \tag{3.14}$$

wobei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ eine lineare Abbildung ist. Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A. Wir unterscheiden:

1. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$;
2. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$;
3. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathrm{Re}\lambda_1 > 0$;
4. $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$;
5. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
6. $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = 0$, $\lambda_i \neq 0$;
7. $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$;
8. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$;
9. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
10. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathrm{Re}\lambda_1 < 0$;

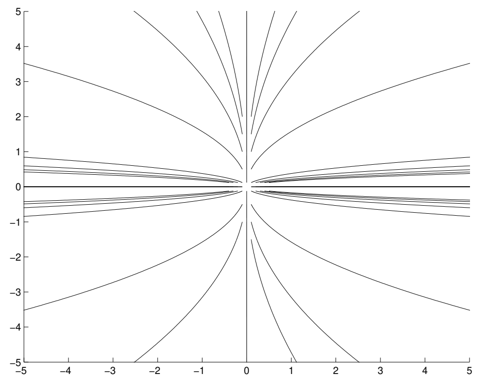

Abbildung 3.1: Die Trajektorien von $E(J,t)$.

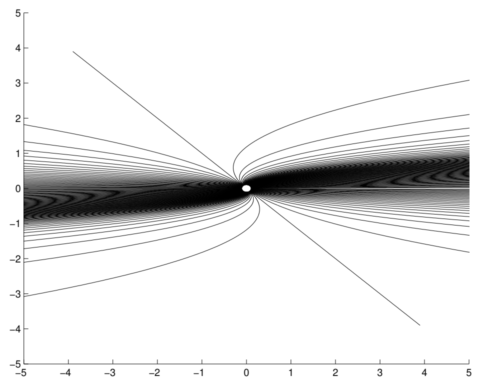

Abbildung 3.2: Die Trajektorien von $E(A,t)$ mit schiefliegenden Eigenräumen.

11. $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$.

1. Fall: Dabei hat die Jordan Normalform die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Seien e_1, e_2 die Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2}$. Dann konvergieren alle Lösungen für $t \to -\infty$ gegen Null, für $t \to \infty$ verlassen alle Lösungen (außer einer!) jedes Kompaktum. Sie schmiegen sich (für $t \to -\infty$) an die e_2-Achse an.

2. Fall: Wir unterscheiden zwei mögliche Formen des Jordan Blocks (Eigenwerte sind geometrisch einfach oder nicht). Zunächst der Fall der geometrisch einfachen Eigenwerte. Hier hat der entsprechende Jordanblock die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Alle Lösungen haben dieselben Konvergenzeigenschaften wie zuvor. Nur ist die Bewegung längs gerader Linien.
Ist der Eigenwert nicht geometrisch einfach, so hat der Jordanblock die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

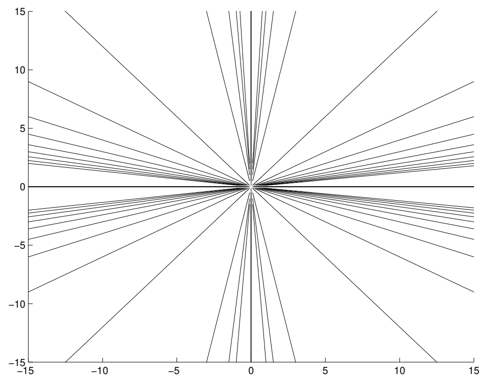

Abbildung 3.3: Die Trajektorien von $E(J,t)$ mit halbeinfachen Eigenwerten.

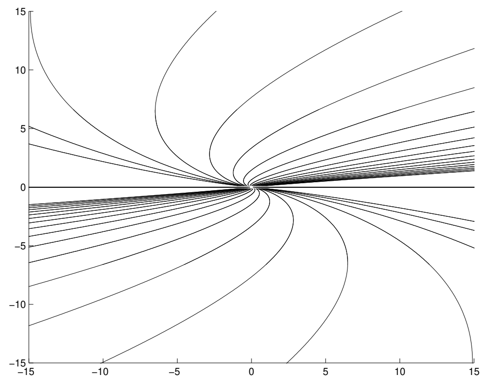

Abbildung 3.4: Die Trajektorien von $E(J,t)$ mit geometrisch einfachem, algebaisch doppelten Eigenwert.

Auch hier hat man die Konvergenzeigenschaften wie im ersten Fall, jedoch schaut das Bild wiederum anders aus.

3. Fall: Wieder ergibt sich die gleiche Konvergenz, jedoch erhält man einen Strudel. Sei $\lambda_1 = |\lambda|e^{i\theta}$. Dann ist $\lambda_2 = |\lambda|e^{-i\theta}$ und die reelle Normalform hat die Form

$$J = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

4. Fall: Für die Jordan Form ergibt sich

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Längs der e_2-Achse hat man konstante Lösungen (*Ruhelagen*). Alle anderen Lösungen konvergieren für $t \to -\infty$ gegen 0 und verlassen in positiver Zeitrichtung jedes Kompaktum.

5. Fall: In diesem Fall hat die Jordan Form das Aussehen

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Der erste dieser beiden Fälle liefert ausschließlich konstante Lösungen. Im zweiten hat man eine Bewegung auf Parallelen zur e_1-Achse gegen unendlich.
6. Fall: Unsere Abbildung erhält die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Wir erhalten Lösungen, die sich auf Kreislinien um den Ursprung bewegen.
7. Fall: Ein qualitativ neues Bild ergibt sich hier. Auf der einen Achse bewegt man sich für $t \to \infty$ gegen unendlich und für $t \to -\infty$ gegen Null, auf der anderen Achse hat man das gegenteilige Verhalten. Dazwischen sind Lösungen, die für beide Zeitrichtungen jedes Kompaktum verlassen und sich für $t \to \pm\infty$ an die jeweilige Eigenwertachse anschmiegen. (Dies ist die Motivation für den Begriff *hyperbolisch*, den wir noch einführen werden.)
In den anderen Fällen ergeben sich ganz ähnliche Bilder wie bisher, nur die Zeitrichtungen sind anders. Wir geben nur die Normalformen und die Bilder, keine weiteren Kommentare.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

8. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

oder

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

9. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

10. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

11. Fall:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

3.5 Eigenwerte und Langzeitverhalten

Die Betrachtungen im vorstehenden Abschnitt legen es nahe zu vermuten, daß die Eigenwerte und das Langzeitverhalten für lineare, autonome Systeme eng gekoppelt sind. Wir wollen dieses bestätigen.

Satz 3.5.1 [Spektrum und Stabilität I] *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$\dot{u} = Au.$$

Mit $\sigma(A)$ bezeichnen wir das Spektrum von A, d.h. $\sigma(A)$ ist die Menge aller Eigenwerte von A. Dann hat man folgendes Verhalten:
Haben alle Eigenwerte negativen Realteil, so ist 0 die einzige beschränkte Lösung und alle anderen konvergieren für $t \to \infty$ gegen 0. Für $t \to -\infty$ hat man Konvergenz gegen unendlich.
Gibt es einen Eigenwert mit positivem Realteil, so gibt es eine Lösung, die für $t \to -\infty$ gegen 0 konvergiert und für $t \to \infty$ jedes Kompaktum verläßt.
Gibt es einen Eigenwert mit Realteil 0, so existiert zumindest eine Lösung $u(t, u_0)$, $u_0 \neq 0$, welche für alle Zeiten beschränkt ist.

Beweis: Angenommen, u_0 ist Anfangswert einer beschränkten Lösung $u(t, u_0)$. Jede Lösung der linearen Gleichung hat wegen der Bemerkung nach Satz 3.2.5 die Darstellung $u(t, u_0) = E(A, t)u_0$. Sei C die Matrix, die A in die komplexe Jordan Normalform J transformiert, $v_0 = Cu_0$ ist dann der Anfangswert für eine beschränkte Lösung $v(t) = E(J, t)v_0$. Sei $v_0 = (v_0^1, \ldots, v_0^n)$. Ist $u_0 \neq 0$, so ist $v_0 \neq 0$ und es gibt ein $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ mit $v_0^\mu \neq 0$ und für $m \in \{\mu + 1, \ldots, n\}$ ist $v_0^m = 0$. Sei λ der Eigenwert zum μ-ten Eigenvektor in der Basis zur Jordan Form. So ist die μ-te Komponente von $E(J, t)v_0$ gegeben durch $e^{\lambda t} v_0^\mu$. Dann ist $|e^{\lambda t} v_0| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t} |v_0^\mu|$. Für $t \to -\infty$ ist dies unbeschränkt. Um die Konvergenz zu zeigen, betrachten wir $\nu = \max\{\mathrm{Re}(\lambda) | \ \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\nu < 0$ und $E(J, t) = e^{\nu/2\, t} F(t)$. Dabei ist F eine matrixwertige Funktion. Jedes $F(t)$ ist eine obere Dreiecksmatrix, mit Einträgen $e^{\rho t} p(t)$, wobei p ein Polynom ist und $\mathrm{Re}(\rho) < 0$. Dann ist $\|F(t)\|$ beschränkt und $\|E(J, t)\| \to 0$ für $t \to \infty$. Damit konvergiert auch

$$\|E(A, t)\| = \|C^{-1} E(J, t) C\| \leq \|C\| \|E(J, t)\| \|C\|$$

für $t \to \infty$ gegen null.
Die zweite Aussage beweist man ebenso wie die Unbeschränktheit für $u(t, u_0)$ für $t \to -\infty$ im ersten Fall. Man betrachtet hier einfach einen Anfangswert im verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert mit positivem Realteil.
Die dritte Aussage erhält man, indem man einen Eigenvektor als Anfangswert im Eigenraum des Eigenwertes λ mit verschwindendem Realteil betrachtet. Hier unterscheidet man zwei Fälle,
(a) $\lambda = 0$
(b) $\lambda \neq 0$.
Der erste dieser Fälle ist einfach. Ist u_0 im Kern von A, so ist natürlich $E(A, t)u_0 = u_0$ für alle t und damit ist die Lösung $u(t, u_0) = u_0$ eine konstante, und damit beschränkte Lösung.
Im zweiten Fall hat man im Komplexen einen Anfangswert u_0^c, so daß $E(A, t)u_0^c = e^{\lambda t} u_0^c$ ist, also gilt $|E(A, t)u_0^c| = |e^{\lambda t}||u_0^c| = |u_0^c|$. Wir setzen $u_0 = u_0^c + \overline{u_0^c}$. Dies ist ein reeller Vektor. Es gilt $E(A, t)u_0 = e^{\lambda t} u_0^c + e^{-\lambda t} \overline{u_0^c}$. Da $\overline{\lambda} = -\lambda$ ist dies immer reell. Da beide Summanden in der Norm beschränkt sind, folgt dies auch für $E(A, t)u_0$. □

3.6 Aufgaben

Aufgabe 3.6.1 Wir bezeichnen mit A^T die Transponierte einer reellen Matrix A und mit $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A. Man zeige:
(a) $\det E(A, t) = e^{\mathrm{tr}(A)t}$

(b) $E(A^T, t) = (E(A,t))^T$
(c) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A + A^T = 0$, so ist $E(A,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal. (Eine Matrix B heißt orthogonal, wenn $B^T B = BB^T = \mathbb{1}$ ist.)

Aufgabe 3.6.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. A habe keinen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\ \lambda\ ) = 0$.
(a) Man zeige: Die Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ besitzt eine beschränkte Lösung.
(b) Ist diese Lösung eindeutig?
(c) Ist f periodisch mit Periode $T > 0$, so ist auch die in (a) gefundene Lösung T-periodisch.

Aufgabe 3.6.3 Man finde $E(A,t)$ für folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht $E(A,t)u_0$ für verschiedene $u_0 \neq 0$ aus.

Aufgabe 3.6.4 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Gegeben seien n Lösungen $u_1, \ldots, u_n$ der Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$.
(a) Man zeige: Gibt es ein $\tau \in I$, so daß die Vektoren $u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)$ linear unabhängig sind, so sind die Vektoren $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig. Man nennt dann $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ ein *Fundamentalsystem* und die Matrix $Y(t)$, deren Spalten aus den Vektoren $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ besteht, *Fundamentalmatrix.*
(b) Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so nennt man die reellwertige Funktion $w(t) = \det Y(t)$ die *Wronski-Determinante* von A. Man zeige: w löst die Differentialgleichung $\dot{w} = \mathrm{tr}(A)w$.

Aufgabe 3.6.5 Sei $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, nichtleere Teilmenge und $t_0 \in I$ sei fest gewählt. Setze

$$U(t) = \{u(t, t_0, u_0) \mid u_0 \in U\},$$

wobei $u(t, t_0, u_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = A(t)u,\ u(t, t_0, u_0) = u_0$ bezeichnet. Mit μ bezeichnen wir das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$. Man gebe eine hinreichende Bedingung an A dafür, daß $\mu(U(t)) = \mu(U)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3.6.6 Man löse die Differentialgleichungen

$$(a) \quad \dot{u} + u\sin(t) = (\sin(t))^3 \qquad\qquad (b) \quad (1 + t^2)\dot{u} + tu = t.$$

Kapitel 4

Berechnung von Lösungen

4.1 Die Euler'sche Polygonzugmethode

Die Grundlage dieser Methode ist die einfache Beobachtung, daß $f(u,t)$ in der Nähe eines Punktes als nahezu konstant angesehen werden kann. Man wählt daher eine (kleine) Schrittweite h und ersetzt $u(t)$ durch die Approximation

$$u_h(t_n) = u_h(t_{n-1}) + hf(u_h(t_{n-1}), t_{n-1})$$

Diese Methode ist einfach durchzuführen. Natürlich kann man keine übermäßig gute Approximation erwarten. Jedoch hat man den folgenden Satz, der zumindest noch theoretische Konvergenz vorhersagt. Man beachte, daß die Näherungslösung nicht für alle t im Existenzintervall definiert ist. Deshalb muß man nach Wahl einer Zahl t im Existenzintervall der Lösung sich auf Schrittweiten

$$h_n = (t - t_0)/n$$

beschränken.

Satz 4.1.1 *Sei $u(t, t_0, u_0)$ Lösung eines Anfangswertproblems der Form (2.2), (2.4) mit einer Lipschitz stetigen Funktion $f : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Es sei $u_{h_n}(t_k, t_0, u_0)$ der Wert, den das Euler'sche Verfahren nach k Schritten liefert. Dann konvergiert $u_{h_n}(t_n, t_0, u_0)$ für $n \to \infty$, d.h.*

$$u_{h_n}(t_n, t_0, u_0) \to_{n\to\infty} u(t, t_0, u_0).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, geben wir noch einen Hilfssatz an, der eine wichtige Abschätzung liefert.

Hilfssatz 4.1.2 *Seien $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, $\alpha \geq 0$ und $\beta > 0$ mit*

$$|\zeta_{n+1}| \leq \alpha + (1+\beta)|\zeta_n| \; n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1}$$

Dann genügt die Folge $\{|\zeta_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Abschätzung

$$|\zeta_n| \leq e^{n\beta}|\zeta_0| + \alpha\frac{e^{n\beta}-1}{\beta}. \tag{4.2}$$

Beweis des Hilfssatzes 4.1.2: Durch eine einfache Induktion erhält man die Aussage

$$|\zeta_n| \leq (1+\beta)^n|\zeta_0| + \alpha\frac{(1+\beta)^n - 1}{\beta}. \tag{4.3}$$

Für $n = 1$ ist dies genau die Voraussetzung (4.1). Angenommen die Gleichung (4.3) ist für n gültig. Dann folgt daraus, daß

$$|\zeta_{n+1}| \leq \alpha + (1+\beta)^{n+1}|\zeta_0| + \alpha(1+\beta)\frac{(1+\beta)^n - 1}{\beta}$$

und daher folgt

$$|\zeta_{n+1}| \leq (1+\beta)^{n+1}|\zeta_0| + \alpha\frac{(1+\beta)^{n+1} - (1+\beta) + \beta}{\beta}.$$

Dies ist (4.3) für $n+1$. Weil $(1+\beta)^n \leq e^{n\beta}$ ist (sogar für $\beta > -1$) folgt aus (4.3) die Aussage des Hilfssatzes. $\square$

Beweis des Satzes 4.1.1: Sei $G = \{(u(s), s) \mid s \in [t_0, t] \text{ (oder } [t, t_0])\}$. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß $t > t_0$ ist. Die Modifikationen für den anderen Fall sind nahezu offensichtlich. Sei U eine Umgebung von G mit kompaktem Abschluß $\overline{U}$, so daß für f bezüglich der ersten Variablen auf U eine Lipschitz Konstante M_U existiert, d.h. eine Konstante mit der die Ungleichung (2.3) erfüllt ist. Wie schon zuvor setzen wir wie schon zuvor $M = \max\{1, M_U\}$, $N = \sup\{|f(u,s)| \mid (u,s) \in U\} + 1$ und $\Delta = \operatorname{dist}(G, \partial U)$. Für $\varepsilon < \frac{\Delta}{2M}$ sei

$$G_\varepsilon = \{(u,t) \in U \mid \operatorname{dist}((u,t), G) < \varepsilon\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $t_k = t_0 + kh_n$ und $(u_1, t_k) \in G_\varepsilon$ mit $|u_1 - u(t_k, t_0, u_0)| < \varepsilon$ berechnen wir die Distanz von $(u_1, t_k) + h_n(f(u_1, t_k), 1)$ zu $u(t_{k+1}, t_0, u_0)$. Sei $u^k = u(t_k, t_0, u_0)$. Damit ist $u^{k+1} = u(t_{k+1}, t_0, u_0) = u(h_n, t_k, u^k)$. Es ergibt sich die Formel

$$u^{k+1} = u^k + \int_{t_k}^{t_k+h_n} f(u(s, t_k, u^k), s)ds = \int_0^{h_n} f(u(t_k + s, t_k, u^k), t_k + s)ds.$$

Für die Differenz erhält man daher

$$\begin{aligned}
|(u_1, t_k) + h_n(f(u_1, t_k), 1) - (u^{k+1}, t_{k+1})| &\leq |u_1 - u^k| \\
&\quad + \int_0^{h_n} |f(u_1, t_k) - f(u(t_k + s, t_k, u^k), t_k + s)|ds \\
&\leq |u_1 - u^k| + h_n|f(u_1, t_k) - f(u^k, t_k)| + h_n s(h_n) \\
&\leq (1 + Mh_n)|u_1 - u^k| + h_n s(h_n),
\end{aligned}$$

wobei $s(.)$ eine Funktion ist, mit der Eigenschaft $s(h) \to 0$ für $h \to 0$. Die Existenz einer solchen Funktion erhält man einfach:

$$\begin{aligned}
\int_0^{h_n} |f(u_1, t_k) - f(u(t_k + s, t_k, u^k), t_k + s)|ds &\leq h_n|f(u_1, t_k) - f(u^k, t_k)| \\
+ \int_0^{h_n} |f(u^k, t_k) - f(u(t_k + s, t_k, u^k), t_k + s)|ds.
\end{aligned}$$

Aus der Differenzierbarkeit von f folgt die Zwischenbehauptung. Ist nun u_1 der Punkt der durch k Schritte des Euler Verfahrens definiert wurde, so gilt für den Abstand $\zeta_k = |u_{h_n}(t_k, t_0, u_0) - u^k|$ eine Abschätzung der Form

$$\zeta_{k+1} \leq (1 + Mh_n)|\zeta_k| + s(h_n)h_n.$$

Mit $\alpha = s(h_n)h_n$ und $\beta = Mh_n$ und dem Hilfssatz 4.1.2 schließt man, daß der Fehler nach k Schritten abzuschätzen ist durch

$$\zeta_k \leq e^{k\beta}\zeta_0 + \alpha\frac{e^{k\beta}-1}{\beta}. \tag{4.4}$$

Da $\zeta_0 = 0$ ist erhält man die Abschätzung

$$\zeta_k \leq \alpha\frac{e^{k\beta}-1}{\beta}.$$

Wir müssen noch zeigen, daß der Ausdruck rechts durch die Wahl von h_n für alle $k \leq n$ kleiner als ε wird. Dann ist der Satz bewiesen. Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß der Ausdruck rechts mit h_n gegen null konvergiert:

$$\begin{aligned}\zeta_k &\leq h_n s(h_n)\frac{e^{kMh_n}-1}{Mh_n}\\ &\leq s(h_n)\frac{e^{nMh_n}-1}{M}\\ &\leq s(h_n)\frac{e^{M(t-t_0)}}{M} \to_{h_n\to 0} 0.\end{aligned}$$

□

In Worten besagt dieser Satz, daß man auf endlichen Zeitintervallen, durch Wahl einer genügend kleinen Schrittweite die Lösung mit dem Euler Verfahren approximieren kann. Leider kann man genötigt werden, die Schrittweite sehr klein zu wählen, wobei man in der Praxis natürlich schnell an die Grenzen stößt. Wir werden dies in der Aufgabe 4.4.3 einsehen. Ein zweiter gewichtiger Nachteil ist, daß gewisse qualitative Phänomene nicht erkannt werden können. Wir werden dies an einem Beispiel sehen, vgl. Aufgabe 4.4.2. Man beachte, daß beim numerischen Rechnen noch zusätzlich Rundungsfehler auftreten.

Trotz dieser wichtigen Aussage, haben wir am Beispiel des harmonischen Oszillators gesehen, daß das Euler'sche Polygonzugverfahen ein falsches qualitatives Verhalten vorhersagt, insbesondere finden wir keine periodischen Lösungen. Wir benötigen daher andere Verfahren.

4.2 Das implizite Euler-Verfahren

Hier wird zumindest eines der beiden genannten Probleme vermieden. Natürlich kann man nicht erwarten, daß alle Mängel bei der Beschreibung gewisser qualitativer Phänomene behoben werden. Hier bestimmt man die Näherungslösung nicht dadurch, daß man tangential um die Schrittweite h weitergeht, sondern man bestimmt die $(k+1)$-Näherung aus der k-ten durch die *implizite Bedingung*

$$y_{k+1} = y_k + hf(y_{k+1}, x_{k+1}).$$

Dies bedeutet, daß man in jedem Schritt ein Gleichungssystem lösen muß. Deswegen ist die praktische Durchführung mit einem wesentlich größeren Rechenaufwand verbunden. Hat man eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so lautet die Bedingung

$$y_{k+1} = y_k + hAy_{k+1}$$

und daraus erhält man

$$(\mathbb{1} - hA)y_{k+1} = y_k.$$

Ist die Schrittweite h genügend klein, so läßt sich die Matrix $\mathbb{1} - hA$ invertieren und die Iteration hat die Darstellung

$$y_{k+1} = (\mathbb{1} - hA)^{-1} y_k.$$

An dieser Darstellung erkennt man, daß dieses Verfahren, zumindest wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, das Verhalten der Lösungen zufriedenstellend wiedergibt. Ist nämlich y_0 Eigenvektor von A zum Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}\lambda < 0$ so lautet die Folge der y_k

$$y_k = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^k y_0.$$

Da der auftretende Bruch betragsmäßig kleiner als 1 ist, konvergiert die Folge der y_k gegen null, wie es auch die wahre Lösung tut.

Definition 4.2.1 *Ein Verfahren heißt* absolut stabil*, wenn für lineare Systeme, deren Eigenwerte alle negativen Realteil besitzen, jede Näherungslösung für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert.*

Lemma 4.2.2 *Das implizite Euler-Verfahren ist absolut stabil*

Beweis: Folgt sofort aus dem zuvor gesagten. □

Tatsächlich hat man Konvergenz gegen Null für manche A mit Eigenwerten mit positiven Realteilen. Konvergenz gegen Null tritt genau dann auf, wenn $\sigma(\mathbb{1} - hA)$ außerhalb des Einheitskreises liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Eigenwerte von A außerhalb eines Kreises vom Radius $1/h$ um den Punkt $(1/h, 0)$ liegen.

4.3 Das Runge-Kutta Verfahren

Das Runge-Kutta Verfahren ist wie das Euler'sche Polygonzugverfahren ein Einschrittverfahren, d.h. von der Form

$$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(y_n, t, h),$$

nur, daß in diesem Fall der Schritt auf relativ komplizierte Weise berechnet wird. Wir wollen zunächst das Verfahren beschreiben und danach theoretische Eigenschaften herleiten. Soll deutlich werden, daß Φ auch von f abhängt, so schreiben wir $\Phi(t, y, h, f)$. Wir setzen

$$\Phi(t, y, h) = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \tag{4.5}$$

wobei die k_i durch

$$\left\{\begin{array}{rcl} k_1 &=& f(t, y) \\ k_2 &=& f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &=& f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &=& f\left(t + h, y + hk_3\right) \end{array}\right. \tag{4.6}$$

definiert werden. Erste Tests zeigen uns, daß man mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens qualitative Eigenschaften, wie z.B. periodische Lösungen beim mathematischen Pendel, gut wiederfindet. Es stellt sich die Frage nach einer theoretischen Begründung dieser angenehmen Eigenschaften.

Dazu brauchen wir ein paar Begriffe und Definitionen. Eine wichtige Rolle spielt die Approximation des Differenzenquotienten der wahren Lösung an einer Stelle durch Φ. Wir setzen

$$\Delta(t,y,h,f) = \begin{cases} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} & h \neq 0 \\ f(t,y) & h = 0 \end{cases}, \tag{4.7}$$

wobei $y(.)$ eine Lösung mit $y(t) = y$ ist.

Definition 4.3.1 *Der* lokale Diskretisierungsfehler *ist die Differenez*

$$\tau(t,y,h) = \Delta(t,y,h,f) - \Phi(t,y,h,f).$$

Offenkundig ist $\lim_{h\to 0} \Delta(t,y,h,f) = f(t,y)$. Also konvergiert $\Phi(t,y,h,f)$ genau dann gegen $f(t,y)$, wenn $\lim_{h\to 0} \tau(t,y,h) = 0$.

Damit sehen wir, daß der lokale Diskretisierungsfehler für die Konvergenz des Verfahrens eine große Rolle spielen wird.

Definition 4.3.2 *Ein Einschrittverfahren heißt* konsistent, *falls* $\lim_{h\to 0} \tau(t,y,h) = 0$ *erfüllt ist.*

Beispiel 4.3.3 *Das Euler'sche Polygonzugverfahren ist konsistent. Dort ist* $\Phi(t,y,h,f) = f(t,y)$, *und wegen der Konvergenz von* Δ *gegen* f *konvergiert* $\tau \to 0$.

Natürlich interessiert nicht nur, ob die Größe τ konvergiert, sondern auch die Konvergenzrate. Um diese auszurechnen, benötigen wir höhere Differenzierbarkeit von f.

Definition 4.3.4 *Wir nennen ein Einschrittverfahren von der* Ordnung $p \in \mathbb{N}$, *wenn für jedes* $f \in C^{p-1}(I \times W, \mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\tau(t,y,h,f) = O(|h|^p).$$

Beispiel 4.3.5 *Wir kehren zum Euler'schen Polygonzugverfahren zurück und berechnen die Ordnung des Verfahrens.*

Dazu bemerken wir, daß für eine Lösung (mit $y(t_0) = y_0$*) gilt*

$$y(t_0 + h) = y_0 + h\dot{y}(t_0) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(t_0) + \dots. \tag{4.8}$$

Wegen $\dot{y}(t_0) = f(t_0, y_0)$ *und* $\dot{y} = f(t, y(t))$ *errechnet sich* $\ddot{y}(t_0)$ *zu*

$$\ddot{y}(t_0) = \frac{d}{dt} f(t, y(t))_{|t=t_0} = f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0)\dot{y}(t_0) = f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0) f(t_0, y_0).$$

Den lokalen Diskretisierungsfehler beim Euler'schen Polygonzugverfahren für $h \neq 0$ erhält man nun durch Entwicklungen von Δ und Φ nach Potenzen von h. Zunächst ergibt sich für $h \neq 0$

$$\begin{aligned}\Delta(t_0, y_0, h, f) &= \frac{1}{h}\left(y(t_0+h) - y(t_0)\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(f(t_0,y_0) + hf(t_0,y_0) + \frac{h^2}{2}(f_t(t_0,y_0) + f_y(t_0,y_0)y_0 + \ldots - f(t_0,y_0)\right) \\ &= f(t_0,y_0) + O(|h|).\end{aligned}$$

Wir notieren Φ bis zur ersten Ordnung in h als

$$\Phi(t_0, y_0, h, f) = f(t_0, h_0) + \frac{h}{2}(f_t(t_0,y_0) + f_y(t_0,y_0)f(t_0,y_0)). \tag{4.9}$$

Wegen $\Phi(t_0, y_0, h, f) = f(t_0, y_0)$ ergibt sich für den lokalen Diskretisierungsfehler $O(|h|)$. Alos ist das Euler Verfahren ein Verfahren erster Ordnung.

$$\begin{aligned}\tau(t_0,y_0,h,f) &= \Delta(t_0,y_0,h,f) - \Phi(t_0,y_0,h,f) \\ &= y_0 + \frac{1}{h}(y_0 + hf(t_0, y_0+)) - f(t_0,y_0).\end{aligned}$$

Satz 4.3.6 *Das Verfahren von Runge-Kutta ist konsistent und von vierter Ordnung.*

<u>Beweis:</u> Aus der Definition von Φ mittels der k_j erhalten wir mit $k_0 = 0 = h_0$

$$\begin{aligned}k_j &= f(t+h_j, y+h_jk_{j-1}) \\ &= f(t,y) + f_t(t,y)h_j + f_y(t,y)h_jk_{j-1} + f_{tt}(t,y)\frac{h_j^2}{2} + \\ &\qquad + f_{ty}(t,y)h_j^2k_{j-1} + \frac{1}{2}h_j^2 f_{yy}(t,y)[k_{j-1}, k_{j-1}] + O(|h|^3).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich unter Ausnutzung, daß jedes der k_j in nullter Ordnung gleich $f(t,y)$ ist

$$\begin{aligned}\Phi(t,y,h,f) &= \frac{1}{6}\Big(f(t,y) + 2f(t,y) + 2f(t,y) + f(t,y) + \frac{h}{2}(2f_t(t,y) + \\ &\qquad +2f_y(t,y)k_1 + 2f_t(t,y) + 2f_y(t,y)k_2 + f_t(t,y) + f_y(t,y)k_3) + O(|h|^2)\Big) \\ &= \frac{h}{6}(3f_t(t,y) + 3f_y(t,y)f(t,y) + O(|h|^2) \\ &= \frac{1}{2}h(f_t(t,y) + f_y(t,y)f(t,y)) + O(|h|^2).\end{aligned}$$

Aufgrund der obigen Formel (4.9) zur Berechnung des (in h) linearen Terms des Differenzenquotienten erhalten wir

$$\tau(t,y,h,f) = O(|h|^2).$$

Eine etwas umfangreichere Rechnung ergibt auch noch die Übereinstimmung der kubischen Terme von Δ und Φ, und damit ist das Runge-Kutta-Verfahren konsistent und von vierter Ordnung. □

Bemerkung 4.3.7 *Verfahren, die in der Praxis Verwendung finden, benutzen eine Schrittweitensteuerung (Verfahren von Runge-Kutta-Fehlberg). Damit läßt sich der Aufwand reduzieren. Der im Matlab-Paket integrierte Löser für gewöhnliche Differentialgleichungen beruht auf dem Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren.*

4.4 Aufgaben

Aufgabe 4.4.1 Man schreibe die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= -u_2\\ \dot{u}_2 &= u_1\end{aligned}$$

in Polarkoordinaten und löse die Gleichung.

Aufgabe 4.4.2 Man schreibe Matlab-Programme die die Gleichung aus Aufgabe 4.4.1 für einen oder mehrere Anfangswerte $u_0 \neq 0$ nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren und dem Verfahren von Runge-Kutta lösen. Man wähle verschiedene Schrittweiten und interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 4.4.3 Man schreibe ein Matlab-Programm das die Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= -u_1\\ \dot{u}_2 &= -au_2\end{aligned}$$

für die Werte $a = 1, 10, 100, 1000$ und $h = 10^{-2}$ für Anfangswerte auf der Winkelhalbierenden nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren löst. Wie sehen die exakten Lösungen aus? wie sieht dies beim impliziten Euler Verfahren aus?

Aufgabe 4.4.4 Man untersuche die logistische Gleichung mit dem Euler'schen Polygonzugverfahren.

Aufgabe 4.4.5 (a) Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossene Untergruppe* von $\mathbb{R}$, wenn G eine abgeschlossene Teilmenge und gleichzeitig, bezüglich der Addition, eine Untergruppe ist. Man beschreibe alle abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{R}$.

(b) Gegeben sei eine stetige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Eine Zahl $T \in \mathbb{R}$ heißt Periode von x, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $x(t + T) = x(t)$. Man zeige, die Menge

$$P_x = \{T \in \mathbb{R} \mid T \text{ ist Periode von } x\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$.

(c) Man zeige, gibt es für die Lösung $u(t, t_0, u_0)$ des autonomen Anfangswertproblems

$$\dot{u} = f(u), \;\; u(t_0) = u_0$$

zwei verschiedene Zeitpunkte t_1, t_2 mit $u(t_1, t_0, u_0) = u(t_2, t_0, u_0)$, so existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ und ist periodisch, d.h. es existiert eine Zahl $T > 0$ mit $u(t + T, t_0, u_0) = u(t, t_0, u_0)$.

Kapitel 5

Anfänge einer geometrischen Theorie

5.1 Autonome Systeme

Jetzt wollen wir beginnen, geometrische Begriffe für die Lösung und das Langzeitverhalten einzuführen. Wir beginnen mit der Gleichung

$$\dot{u} = f(u), \tag{5.1}$$

wobei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetige Funktion sei. Wir wollen voraussetzen, daß die Lösungen $u(t, u_0)$ (O.B.d.A. ist $t_0 = 0$, da die Gleichung als autonom vorausgesetzt wird.) für $u_0 \in U$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert seien.

Definition 5.1.1 *Eine Abbildung $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U$ heißt* Fluß *oder* Phasenfluß *von (5.1), falls für jedes $u_0 \in U$ gilt*

$$\Phi(u_0, t) = u(t, u_0).$$

Lemma 5.1.2 [Eigenschaften eines Flusses] *Ist f in (5.1) Lipschitz stetig und ist Φ der zur Gleichung (5.1) gehörende Fluß, so gilt*

1. *$\Phi(., t) : U \to U$ ist ein Homöomorphismus; ist f differenzierbar, so ist Φ ein Diffeomorphismus.*
2. *$\Phi(u, t + s) = \Phi(\Phi(u, s), t)$.*
3. *$\Phi(u, 0) = u \ \forall u \in U$.*

Notation: Für $\Phi(., t)$ schreiben wir auch $\Phi_t(.) : U \to U$.

Beweis: Die erste Aussage folgt, da $u(t, u_0)$ stetig vom Anfangswert abhängt. Ist f differenzierbar, so ist die Lösung nach dem Anfangswert differenzierbar. Die zweite Aussage ist eine direkte Konsequenz des Eindeutigkeitssatzes. Als direkte Folgerung aus der Definition erhalten wir auch die letzte Aussage. □

Definition 5.1.3 *Sei $u(t, t_0, u_0)$ die Lösung der Differentialgleichung (2.2), d.h. $\dot{u} = f(u,t)$ mit maximalem Existenzintervall I. Dann nennt man die Menge $T = \{(u(t,t_0,u_0),t) \mid t \in I\}$ die* Trajektorie *der Lösung $u(t,t_0,u_0)$. Ein Pfad oder auch* Orbit *ist die Projektion einer Trajektorie auf die erste Komponente.*

Offensichtlich, ist für eine autonome Differentialgleichung der Unterschied zwischen dem Pfad oder Orbit auf der einen Seite und der Trajektorie nicht besonders wichtig.

Lemma 5.1.4 [Trajektorien im erweiterten Phasenraum] *Jeder Punkt (u_0, t_0) liegt auf genau einer Trajektorie.*

Beweis: Folgt sofort aus den Existenz- und Eindeutigkeitssätzen. □

Bemerkung: Daraus wird klar, daß der erweiterte Phasenraum eine disjunkte Vereinigung von Trajektorien ist. Ebenso folgt, daß der Phasenraum einer autonomen Gleichung eine disjunkte Vereinigung von Orbits ist. Man überlege sich dies!

Definition 5.1.5 *Besteht ein Orbit einer Differentialgleichung aus einem einzigen Punkt u_0, so nennt man u_0 eine* Ruhelage *von (2.2), bzw. ein Equilibrium oder auch eine* Gleichgewichtslage*. Eine Gleichgewichtslage einer autonomen Differentialgleichung nennt man auch einen* kritischen Punkt*, alle anderen Punkte werden als* reguläre Punkte *bezeichnet.*

Definition 5.1.6 *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt* Weg *(im $\mathbb{R}^n$). Dann nennt man $\gamma(a)$ den* Anfangspunkt *und $\gamma(b)$ den* Endpunkt*. Die Menge $\{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$ heißt* Kurve *im $\mathbb{R}^n$.*

Definition 5.1.7 *Ist γ ein Homöomorphismus auf dem Intervall (a,b) oder $[a,b]$, so bezeichnet man das Bild $\{\gamma(t) \mid t \in (a,b)\}$ oder $\{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$ als* Bogen.

Definition 5.1.8 *Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ist $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, so wollen wir das Bild von γ als* Jordan Bogen *bezeichnen. Ist ein Orbit $\mathcal{O}$ einer autonomen Gleichung ein Jordan Bogen, so nennt man $\mathcal{O}$ auch einen* geschlossenen Orbit.

Lemma 5.1.9 *Ein Orbit $\mathcal{O}$ ist genau dann geschlossen, wenn er der Orbit einer nichtkonstanten periodischen Lösung ist.*

Beweis: Zunächst nehmen wir, daß $\mathcal{O}$ geschlossen ist. Sei $u_0 \in \mathcal{O}$ ein Punkt auf diesem Orbit. Dann gibt es aber ein $T > 0$ mit $u(T, u_0) = u(0, u_0) = u_0$. Die Lösung $u(t, u_0)$ ist dann periodisch mit Periode T. Für die Umkehrung nehmen wir an, daß $u(t, u_0)$ eine periodische Lösung mit (minimaler) Periode T sei. Dann ist $\{u(t,u_0) \mid t \in [0,T)\}$ ein Bogen im $\mathbb{R}^n$. Identifiziert man im Intervall $[0,T]$ Anfangs- und Endpunkt, so ist dies homöomorph zu S^1. □

Definition 5.1.10 *Sei $\dot{u} = f(u)$ eine autonome Differentialgleichung, mit $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist. Eine Teilmenge $W \subset U$ heißt* invariant*, wenn*

$$u_0 \in W \Longrightarrow u(t, u_0) \in W \;\; \forall t \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

oder anders ausgedrückt, falls

(5.3) $$\Phi_t W \subset W \; \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt. Entsprechend heißt die Menge W positiv invariant *wenn die Bedingung (5.2) oder (5.3), für alle $u_0 \in W$ und für alle $t > 0$ erfüllt ist. Gleichermaßen nennen wir W* negativ invariant, *wenn eine der Bedingungen ((5.2) oder (5.3)) für alle $t < 0$ erfüllt ist.*

Beispiele invarianter Mengen sind Orbits (von Lösungen, die für alle Zeiten definiert sind). Natürlich sind auch beliebige Vereinigungen von Orbits invariante Mengen. Alle invarianten Mengen sind von dieser Gestalt. Trotzdem ist es interessant, spezielle invariante Mengen zu studieren. Wir beginnen mit folgender Definition.

Definition 5.1.11 *Sei $\mathcal{O}$ ein Orbit einer autonomen Differentialgleichung. Mit $\mathcal{O}^+_{u_0}$ bezeichnen wir den* positiven Halborbit *durch $u_0 \in \mathcal{O}$, der für $u_0 \in \mathcal{O}$ definiert ist durch*

$$\mathcal{O}^+_{u_0} = \{u(t, u_0) \mid t \geq 0\}.$$

Entsprechend ist der negative Halborbit *durch die Gleichung*

$$\mathcal{O}^-_{u_0} = \{u(t, u_0) \mid t \leq 0\}.$$

definiert.

Definition 5.1.12 *Sei $\mathcal{O}$ ein Orbit einer autonomen Differentialgleichung und $u(t)$ eine zugehörige Lösung. Mit $\omega(\mathcal{O})$ bezeichnen wir die ω-*Limesmenge *von $\mathcal{O}$. Diese wird definiert als die Menge der Punkte $v \in \mathbb{R}^n$, zu denen eine Folge $\{t_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_\nu \to \infty$ existiert mit $u(t_n) \to v$. Entsprechend definiert man die α-*Limesmenge *$\alpha(\mathcal{O})$ als die Menge der Punkte $w \in \mathbb{R}^n$, zu denen eine Folge $\{t_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, t_\nu \to -\infty$ existiert mit $u(t_\nu) \to w$. Als Synonym für Limesmenge gebrauchen wir oft den Begriff* Grenzmenge.

Lemma 5.1.13 *Die vorstehenden Definitionen hängen nicht von der Wahl der Lösung im Orbit $\mathcal{O}$ ab.*

<u>Beweis:</u> Zwei Lösungen im selben Orbit gehen durch eine Verschiebung auseinander hervor. Gibt es zu $v \in \mathbb{R}^n$ eine Zeitfolge, so daß $u(t_\nu)$ gegen v konvergiert, so konvergiert eine Lösung $\tilde{u}$ die durch eine Zeitverschiebung aus u hervorgeht, d.h. $\tilde{u}(t) = u(t - \tau)$ für die um τ verschobene Zeitfolge gegen v. □

Lemma 5.1.14 [Alternative Charakterisierung der Limesmengen] *Sei $\mathcal{O}$ ein Orbit einer autonomen Differentialgleichung. Dann ist*

$$\omega(\mathcal{O}) = \bigcap_{u \in \mathcal{O}} \overline{\mathcal{O}^+_u}$$

und

$$\alpha(\mathcal{O}) = \bigcap_{u \in \mathcal{O}} \overline{\mathcal{O}^-_u}.$$

<u>Beweis:</u> Einfach nachzuprüfen! □

Definition 5.1.15 *Für $u_0 \in U$ sei $\omega(u_0)$ die ω-*Limesmenge *des eindeutig bestimmten Orbits auf dem u_0 liegt. Entsprechend ist $\alpha(u_0)$ die α-*Limesmenge *des eindeutig bestimmten Orbits von u_0.*

Satz 5.1.16 *Die α- bzw. ω-Limesmengen eines Orbits sind beide abgeschlossen und invariant. Ist der Halborbit $\mathcal{O}_u^+$ (oder $\mathcal{O}_u^-$) beschränkt, so gilt: Die ω-Limesmenge (bzw. die α-Limesmenge) ist*

1. *nichtleer,*
2. *kompakt und*
3. *zusammenhängend.*

Außerdem wird dann der Abstand einer Lösung im Orbit zur Grenzmenge beliebig klein, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(u(t,u_0),\omega(u_0)) = 0$$

bzw.

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(u(t,u_0),\alpha(u_0)) = 0.$$

Beweis: Wegen der alternativen Charakterisierung der Grenzmengen im Lemma 5.1.14 ist eine Limesmenge ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen und somit abgeschlossen. Die Invarianz läßt sich für beide Grenzmengen in ganz ähnlicher Weise zeigen, deshalb beschränken wir uns auf die ω-Limesmenge. Sei $v \in \omega(\mathcal{O})$. Sei weiterhin u eine Lösung im Orbit $\mathcal{O}$. Wie üblich schreiben wir $u(t,v)$ für die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{u} = f(u), u(0) = v$. Nun gibt es eine Folge $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, so daß $\lim_{k\to\infty} u(t_k) = v$ ist. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest. Wir behaupten, daß die Folge $u(t+t_k)$ für $k\to\infty$ gegen $u(t,v)$ konvergiert. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dazu existiert (nach Satz 2.2.3) ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß $|v-u_0| < \delta \Rightarrow |u(t,v)-u(t,u_0)| \le \varepsilon$. Weiter gibt es zu $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $k > N \Rightarrow |u(t_k)-v)| < \delta$. Dann ist aber für $k > N$ wegen $u(t,u(t_k)) = u(t+t_k)$ auch $|u(t+t_k)-u(t,v)| < \varepsilon$. Insbesondere ist $u(t,u_0)$ der Grenzwert der $u(t+t_k)$ und deshalb in $\omega(\mathcal{O})$.
Für die zweite Behauptung beschränken wir uns wieder auf den positiven Halborbit, für den negativen Halborbit geht der Beweis ganz genauso. Sei also $u \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_u^+$ beschränkt. Dann schließt man zunächst, daß für $u \in \mathcal{O}$ der Abschluß des positiven $\overline{\mathcal{O}_u^+}$ nichtleer und kompakt ist. Da offensichtlich je endlich viele der $\overline{\mathcal{O}_u^+}$ nichtleeren Durchschnitt haben, also je endlich viele $\overline{\mathcal{O}_{u_j}^+}$, $u_j \in \mathcal{O}$, nichtleeren Schnitt haben, ist auch der Schnitt

$$\bigcap_{u\in\mathcal{O}} \overline{\mathcal{O}_u^+}$$

nichtleer und natürlich kompakt (man beachte die endliche Durchschnittseigenschaft als Charakterisierung kompakter Mengen.). Der Zusammenhang der Limesmenge folgt unmittelbar (wie?) aus der Konvergenzeigenschaft, die wir zunächst beweisen. Angenommen wir hätten eine Folge $t_k \to \infty$ mit $\operatorname{dist}(u(t_k,u_0),\omega(u_0))$ konvergiert nicht gegen null. Durch Auswahl einer Teilfolge, die wieder mit t_k bezeichnet wird, kann man davon ausgehen, daß

$$\operatorname{dist}(u(t_k,u_0),\omega(u_0)) > \eta \;\forall k \in \mathbb{N}$$

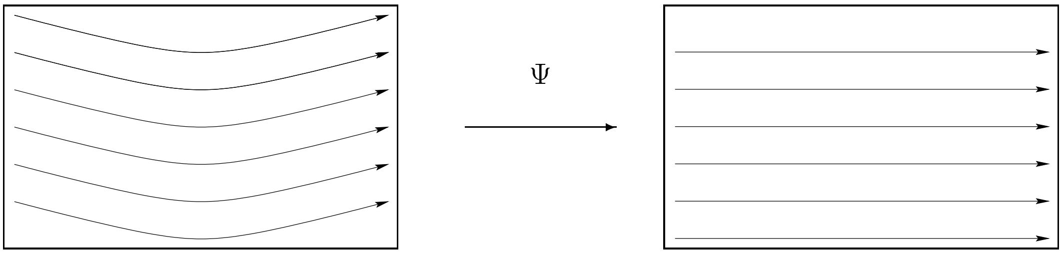

Abbildung 5.1: Begradigung des Vektorfeldes

für eine Zahl $\eta > 0$ gilt. Wegen der Beschränktheit des Semiorbits erhält man eine konvergente Teilfolge, deren Grenzelement natürlich in der Grenzmenge $\omega(u_0)$ enthalten ist. Damit haben wir einen Widerspruch. □

Der folgende Satz beschreibt das Verhalten der Lösungen in der Nähe eines regulären Punktes.

Satz 5.1.17 [Begradigungssatz] *Sei u_0 ein regulärer Punkt der autonomen Differentialgleichung (5.1), wobei f als Lipschitz stetig vorausgesetzt wird. Dann gibt es Umgebungen W von u_0 und V von 0 im $\mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $\Psi : W \to V$ welcher die Orbits der Gleichung (5.1) auf die Orbits der Gleichung*

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

im folgenden Sinne abbildet: Sei $u(t, w_0)$ eine Lösung in W, so ist

$$v(t, \Psi(w_0)) = \Psi(u(t, w_0))$$

Lösung des Anfangswertproblems (5.4) und $v(0, \Psi(w_0)) = \Psi(w_0)$. Dabei kann V in der Form $(-a, a) \times B_\delta^{n-1}(0)$ für ein $a > 0$ und

$$B_\delta^{n-1} = \{(x_2, \ldots, x_n) \mid |(x_2, \ldots, x_n)| < \delta\}$$

gewählt werden. Ist f differenzierbar, so kann Ψ als Diffeomorphismus gewählt werden.

Die Abbildung 5.1 zeigt das begradigte Vektorfeld und den begradigenden Homöomorphismus.

Beweis: Übungsaufgabe! □

Bemerkung: Dies ist der erste Satz, der sozusagen eine Normalform einer Differentialgleichung angibt. Eine allgemeine Normalform in der Nähe singulärer Punkte gibt es nicht. Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann man solche Normalformen angeben. Dabei untersucht man das Spektrum der Linearisierung des Vektorfeldes in der Ruhelage. Das Auffinden von Normalformen in der Nähe der kritischer Punkte von autonomen Differentialgleichungen ist heute eine wichtige Aufgabe der Theorie der Differentialgleichungen. Solche (einfache) Gleichungen, die das Verhalten in der Nähe solcher Punkte dann beschreiben, sind unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bekannt.

Definition 5.1.18 *Das Urbild* $\Psi^{-1}(0 \times B_\delta^{n-1})$ *heißt* Transversale *zu* f *im Punkt* u_0.

Definition 5.1.19 *Eine Teilmenge* M *von* U *heißt* minimal, *wenn sie nichtleer, kompakt und invariant ist und keine echte Teilmenge mit diesen Eigenschaften enthält.*

Satz 5.1.20 [Existenz minimaler Mengen] *Jede nichtleere, kompakte und invariante Menge* M *enthält eine minimale Menge.*

Beweis: Sei F die Familie der nichtleeren, kompakten und invarianten Teilmengen von M. Da $M \in F$ ist $F \neq \emptyset$. Wir definieren eine Ordnung auf F, indem wir setzen $M_1 > M_2$ genau dann wenn $M_1 \subset M_2$. Hat man nun eine vollständig geordnete Kette K bezüglich dieser Ordnung, so gilt für jede endliche Auswahl $M_1, \dots, M_n$, daß $\cap_{j=1}^n M_j \neq \emptyset$. Also ist $M_K = \cap_{M \in K} M$ nichtleer, kompakt und invariant. Also existiert eine obere Schranke in F. Das Zorn'sche Lemma garantiert nun die Existenz eines maximalen Elementes. Dies hat alle gewünschten Eigenschaften. $\square$

Definition 5.1.21 *Eine nichtleere, kompakte und invariante Menge* $K \subset U$ *heißt* stabil, *wenn es zu jeder Umgebung* W *von* K *mit* $K \subset W \subset U$ *eine weitere Umgebung* V *von* K, $V \subset W$ *gibt, so daß*

$$u_0 \in V \Longrightarrow u(t, u_0) \in W \ \forall t \geq 0$$

gilt.

Definition 5.1.22 *Eine Teilmenge* $\mathcal{A} \subset U$ *wird* Attraktor *genannt, wenn* $\mathcal{A}$ *stabil ist und es eine Umgebung* S *von* $\mathcal{A}$ *gibt, so daß*

$$u_0 \in S \Longrightarrow \operatorname{dist}(u(t, u_0), \mathcal{A}) \rightarrow_{t \to \infty} 0$$

gilt.

Eine wichtige Aufgabe der qualitativen Theorie von Differentialgleichungen besteht darin, die Attraktoren zu finden und die Feinstruktur des Phasenflusses auf den Attraktoren. Erst in den letzten Jahren haben seltsame Attraktoren (Lorentz Attraktor) und chaotische Systeme viel Aufmerksamkeit auf sich gelenkt. Auch in der Theorie unendlich dimensionaler dynamischer Systeme spielen *globale Attraktoren* eine wichtige Rolle. Unter sehr allgemeinen Umständen sind diese endlich dimensional, und das Verhalten auf dem Attraktor und nahe bei dem Attraktor kann wieder durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden.

5.2 Der Satz von Poincaré-Bendixson

Im vorigen Abschnitt haben wir Existenz und einige Eigenschaften von Limesmengen kennengelernt. Hier wollen wir einen Satz vorstellen, der zu Beginn unseres Jahrhunderts bewiesen wurde, und nach dem schwedischen Mathematiker Ivar Otto Bendixson[1] und dem französischen Mathematiker Jules Henri Poincaré[2] benannt wurde. Der Satz, mit dem wir uns nun beschäftigen

[1] Ivar Otto Bendixson (1.8.1861-29.11.1935) forschte und lehrte an der Universität Stockholm. Er befaßte sich mit algebraischen Fragen (Auflösung von Gleichungen) wie auch mit Differentialgleichungen

[2] Jules Henri Poincaré (29.4.1854-17.7.1912) war ein Zeitgenosse Hilberts und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, wie auch dieses Jahrhunderts. Er führte topologische Methoden bei der Untersuchung analytischer Probleme ein und wurde damit auch zu einem der Mitbegründer der algebraischen Topologie.

wollen, wurde vor kurzem wiederbelebt, indem eine Verallgemeinerung für bestimmte partielle Differentialgleichungen und auch für sogenannte Funktionaldifferentialgleichungen entdeckt wurde. Zuerst noch ein wichtiges Hilfsmittel, der sogenannte Jordan'sche Kurvensatz.

Satz 5.2.1 *[Jordan] Jeder Jordan Bogen zerlegt den $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten, von denen genau eine beschränkt ist.*

Beweis: s. Deimling [6]. □

Satz 5.2.2 [Poincaré-Bendixson] *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Lipschitz stetig, $\dot{u} = f(u)$ eine autonome Differentialgleichung im $\mathbb{R}^2$ und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung. Sei $u_0 \in \{u(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ist*

1. *$\mathcal{O}^+_{u_0}$ beschränkt, so enthält $\omega(u_0)$ entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit,*
2. *$\mathcal{O}^-_{u_0}$ beschränkt, so enthält $\alpha(u_0)$ entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit.*
3. *Sind sowohl $\mathcal{O}^+_{u_0}$, wie auch $\mathcal{O}^-_{u_0}$ beschränkt, so enthalten beide Grenzmengen jeweils entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit.*

Beweis: Die Beweise sind für die beiden Grenzmengen identisch, wir führen deshalb nur den Beweis für die ω-Limesmenge aus. Sei $\mathbf{U}_0 \in \omega(u_0)$ ein regulärer Punkt. Wegen der Invarianz von Grenzmengen ist auch der Orbit durch $\mathbf{U}_0$ wieder in $\omega(u_0)$ und natürlich dann auch dessen Grenzmenge. Dies sieht man ein, indem man annimmt, daß $\mathbf{U}_1$ ein Punkt in der Grenzmenge $\omega(\mathbf{U}_0)$ ist. Dann gibt es eine Folge $t_n \to \infty$, so daß $u(t_n, \mathbf{U}_0)$ gegen $\mathbf{U}_1$ konvergiert. Für jedes n existiert eine Folge $t_{n_k} \to \infty$ für $k \to \infty$ mit $u(t_{n_k}, u_0) \to u(t_n, \mathbf{U}_0)$ für $k \to \infty$. Dann gibt es eine Folge, $t_{n_{k_j}}$, so daß $u(t_{n_{k_j}}, u_0)$ gegen $\mathbf{U}_1$ konvergiert. Man führe das Argument aus. Wir wollen zeigen, daß entweder der Orbit $\mathcal{O}$ durch $\mathbf{U}_0$ geschlossen ist, oder die Grenzmenge von $\mathcal{O}$ aus Ruhelagen besteht. Die weiteren Schritte des Beweises wollen wir in einige Lemmata aufgliedern. Der Beweis beruht auf dem Existenzsatz für minimale Mengen und ist demzufolge nicht konstruktiv.

Lemma 5.2.3 *Sei w_0 ein regulärer Punkt und L eine abgeschlossene Transversale zu f in w_0. D.h. L ist eine Transversale, die durch eine Abbildung γ beschrieben wird, deren Definitionsbereich ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ ist. Sei $L_0 = \gamma(\text{int } (I))$. Sei $V \subset L_0$ definiert durch*

$$V = \{w \in L_0 \mid \exists t_w > 0 : \; u(t_w, w) \in L_0 \text{ und } u(t, w) \notin L \; \forall t \in (0, t_w)\}.$$

Sei $W = \gamma^{-1}(V) \subset I$ und $g : W \to I$ definiert durch

$$g(y) = \gamma^{-1} u(t_{\gamma(y)}, \gamma(y)).$$

Dann ist

1. *W offen;*
2. *g stetig;*
3. *$g^k(w)$ ist monoton, wobei $g^k(w) = g(g^{k-1}(w))$, solange es definiert ist.*

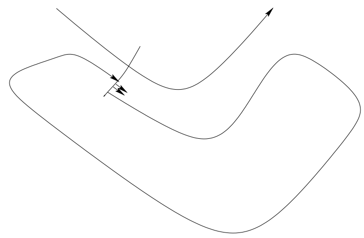

Abbildung 5.2: Transversale und Jordan Bogen

Beweis: Wegen der stetigen Abhängigkeit und der Tatsache, daß L Transversale ist, folgt, daß W offen ist. Ebenso erhält man die Stetigkeit von g. Nun betrachten wir den Jordan Bogen, der für einen Punkt $w \in V$ aus $\{u(t,w) \mid t \in [0,t_w]\}$ und dem Abschnitt in L_0 zwischen w und $u(t_w,w)$ besteht. Ist $w = u(t_w,w)$, so ist diese Lösung periodisch und damit ist für $y \in \gamma^{-1}(w)$, also $g^k(y) = y$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Angenommen, es ist $g^k(y) > g^{k-1}(y)$ und $g^k(y) \in W$. Dieser Jordan Bogen zerlegt die Ebene in ein beschränktes Gebiet G_b und ein unbeschränktes Gebiet G_u. Da L Transversale ist, können Lösungen diese nur in eine Richtung überqueren. Betrachte $\gamma([g^k(y),b])$. Dieses Stück der Transversale liegt entweder in G_b oder in G_u. Sonst müßte ein Orbit den Abschnitt zwischen w und $u(t_w,w)$ in anderer Richtung queren als der Orbit durch $\gamma^{-1}(g^k(w))$. Demzufolge liegt, falls $g^{k+1}(w)$ definiert ist, dieses auch in $[g^k(w),1]$. Damit ist per Induktion dieses Lemma gezeigt. $\square$

Korollar 5.2.4 *Die ω-Limesmenge eines Orbits kann L_0 (das Innere einer Transversale) in höchstens einem Punkt schneiden. Ist $w_0 \in \omega(\mathcal{O}) \cap L_0$, so ist entweder $\omega(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, also $\mathcal{O}$ geschlossen, oder zu einer Lösung $u(t)$ in $\mathcal{O}$ existiert eine Zeitfolge $t_n \to \infty$ mit $u(t_n) \in L_0$ und $u(t_n) \to w_0$ (monoton, wie zuvor).*

Beweis: Seien W, V, Ψ wie im Begradigungssatz 5.1.17. Da w_0 Limes einer Folge $u(t_n,u_0)$ ist, gibt es zu jeder Umgebung von w_0 unendlich viele der Punkte $u(t_n,u_0)$. Sei $B_\varepsilon(w_0)$ eine Kugel um w_0, die vollständig in der Umgebung W enthalten ist. Da jede Lösung mit Anfangswert in $B_\varepsilon(w_0)$ sowohl die Umgebung W verläßt, wie auch die Transversale schneiden muß, hat man unendlich viele Schnittpunkte mit L_0, falls $\mathcal{O}_{u_0} \cap \mathcal{O}_{w_0} = \emptyset$. Seien nun $u(t^n,u_0)$ die Schnittpunkte der Lösung u mit L_0. Wegen des vorhergehenden Lemmas hat man die monotone Konvergenz. Daraus folgt auch die Eindeutigkeit. $\square$

Korollar 5.2.5 *Falls der positive Halborbit $\mathcal{O}_u^+$ und $\omega(\mathcal{O}_u^+)$ einen gemeinsamen Punkt haben, so ist $\mathcal{O}$ geschlossen.*

Beweis: Ist $u_0 \in \mathcal{O}_u^+ \cap \omega(\mathcal{O}_u^+)$, so existiert eine Transversale zu f durch u_0. Wäre $\omega(\mathcal{O}_u^+) \neq \mathcal{O}$, so gäbe es eine Folge $t_k \to_{k\to\infty} \infty$ mit $u(t_k) \in L_0$ und $u(t_k) \to u_0$ (monoton). Da u_0 in $\mathcal{O}_u^+$ liegt, widerspricht dies der monotonen Konvergenz. Damit folgt der Satz aus Korollar 5.2.4. $\square$

Lemma 5.2.6 *Ist M eine beschränkte minimale Menge, so ist M entweder eine periodische Lösung oder eine Ruhelage.*

Beweis: Jeder Orbit in M hat nichtleere Grenzmengen (wegen der Beschränktheit von M). Diese sind kompakt und invariant. Da M minimal ist, fallen sie mit dem Orbit zusammen:

$$\left.\begin{array}{lcl}\alpha(\mathcal{O}) & \subset & M \\ \omega(\mathcal{O}) & \subset & M\end{array}\right\} M \text{ minimal} \Rightarrow \alpha(\mathcal{O}) = M = \omega(\mathcal{O}).$$

Daher ist $\mathcal{O} \subset \omega(\mathcal{O})$. Entweder M enthält einen regulären Punkt, dann ist der zugehörige Orbit periodisch. Im anderen Fall besteht M aus einer einzigen Ruhelage. □

Nun folgt der Satz von Poincaré-Bendixson unmittelbar: Die ω-Limesmenge ist nichtleer, kompakt und invariant und enthält demzufolge eine minimale Menge. Diese hat die gewünschte Gestalt.

Wir wollen noch etwas mehr zeigen, nämlich daß die Limesmenge einer Lösung im Orbit selbst schon (fast) minimal ist. Dies ergibt einen zweiten Beweis, der nicht auf dem Zorn'schen Lemma beruht.

Lemma 5.2.7 *Sei $\mathcal{O}_{\mathbf{U}_0}$ ein Orbit in der Grenzmenge $\omega(u_0)$. Ist w_0 ein regulärer Punkt in $\mathcal{O}_{\mathbf{U}_0}$, so hat man folgende Alternative:*

1. *$\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ enthält einen geschlossenen Orbit $\mathcal{O}_1$. Dann ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{w_0}$.*
2. *$\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ enthält keinen regulären Punkt.*

Beweis: Angenommen v_0 ist ein regulärer Punkt in $\mathcal{O}_{w_0}$. Wir müssen zeigen, daß erstens der Orbit $\mathcal{O}_{v_0}$ geschlossen ist und zweitens mit dem Orbit $\mathcal{O}_{w_0}$ zusammenfällt. Sei L eine abgeschlossene Transversale zu f in v_0 mit Innerem L_0. Dann kann $u(t, w_0)$ die Transversale L_0 wegen Korollar 5.2.4 in höchstens einem Punkt schneiden. Andererseits gibt es eine Folge $t_k \to_{k\to\infty} \infty$, so daß $u(t_k) \to w_0$ konvergiert. Wegen des Begradigungssatzes schneidet jede Lösung, die dem Punkt v_0 nahe kommt auch die Transversale in einem Punkt nahe v_0. Also gibt es ein k_0, so daß aus $k > k_0$ folgt $u(t_k) = v_0$. Damit ist $u(t)$ periodisch und es folgt die erste Aussage. □

Wir bemerken, daß die zweite Möglichkeit noch genauer formuliert werden kann, entweder $\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ besteht aus einer Ruhelage oder unendlich vielen. Dies folgt u.a. aus dem nächsten Korollar, mit dem man genauere Aussagen über die Struktur der Grenzmengen macht. Wir fassen diese in der folgenden Aussage zusammen.

Korollar 5.2.8 [Struktur der Grenzmengen] *Sei f wie im Satz und habe in U nur endlich viele kritische Punkte. Es sei u eine halbseitig beschränkte Lösung. Dann besteht die entsprechende Limesmenge entweder aus*

1. *einer endlichen Anzahl von Ruhelagen $\mathbf{U}_\ell$, $\ell = 1, \ldots, m$ und m Lösungen u_ℓ $\ell = 1, \ldots, m$ mit $u_\ell(t) \to_{t\to-\infty} \mathbf{U}_\ell$ und $u_\ell(t) \to_{t\to\infty} \mathbf{U}_{\ell+1(\mathrm{mod}\, m)}$ und einer nicht bestimmten Zahl von Lösungen $u_{k,\ell}(t, u_0)$ mit $\omega(u_0) = \alpha(u_0) = \mathbf{U}_\ell$ oder*
2. *einem periodischen Orbit.*

Beweis: Dies folgt aus dem Beweis des Satzes 5.2.2. Angenommen, $\mathcal{O}$ ist ein Orbit in $\omega(u_0)$, $u_0 = u(0)$. Entweder dieser korrespondiert zu einer Ruhelage oder einer periodischen Lösung oder er enthält einen regulären Punkt und ist nicht geschlossen. Im zweiten Fall ist der geschlossene

Orbit die gesamte Grenzmenge, nach Lemma 5.2.7. Im dritten Fall enthält die Grenzmenge keinen regulären Punkt. Also ist die Grenzmenge in der diskreten Menge der Ruhelagen enthalten und besteht wegen des Zusammenhangs von Grenzmengen aus einer einzigen Ruhelage. Auf diese Weise kann man jedem Orbit mit regulären Punkten genau eine Ruhelage in der ω- und eine in der α-Limesmenge zuordnen. Der Satz ist gezeigt, wenn diese Zuordnung injektiv auf einer Teilmenge ist, d.h. eine Teilmenge der Orbits mit regulären Punkten existiert, so daß je zwei verschiedene Orbits verschiedene Grenzmengen haben. Dies folgt durch die Betrachtung von Transversalen in verschiedenen regulären Punkten. □

Korollar 5.2.9 *Ist $\mathcal{O}^+$ ein beschränkter Halborbit und enthält $\omega(\mathcal{O}^+)$ mindestens einen regulären Punkt und genau eine Ruhelage U_0, so besteht $\omega(\mathcal{O}^+)$ aus zwei Orbits, nämlich $\{\mathbf{U}_0\}$ und $\mathcal{O}_0$ mit*

$$\alpha(\mathcal{O}_0) = \omega(\mathcal{O}_0) = \{\mathbf{U}_0\}.$$

Definition 5.2.10 *(a) Sind $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ Ruhelagen und ist $u(t, u_0)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ mit $\omega(u_0) = \mathbf{U}_2$ und $\alpha(u_0) = \mathbf{U}_1$, so nennt man den zugehörigen Orbit einen heteroklinen Orbit. Man spricht auch von einem verbindenden Orbit (engl. connecting orbit).*
(b) Sind in der Definition des Teils (a) die Punkte $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ gleich, so wird der in (a) beschriebene Orbit als homokliner Orbit *bezeichnet.*

Bemerkung: Mit dieser Terminologie besteht die ω-Limesmenge einer beschränkten Lösung eines zweidimensionalen autonomen Systems entweder aus einem periodischen Orbit oder entweder aus einer Ruhelage und homoklinen Orbits oder aus endlich vielen Ruhelagen und einer gleichen Anzahl von heteroklinen Orbits und einer unbestimmten Zahl von homoklinen Orbits (falls nur endlich viele kritische Punkte vorhanden sind).

Definition 5.2.11 *Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ heißt* einfach zusammenhängend, *wenn sie homöomorph zur offenen Einheitskugel ist.*

Für den Beweis des nächsten Satzes möchte ich ein Ergebnis zitieren, dessen Beweis z.B. in [4] zu finden ist.

Satz 5.2.12 *Jede stetige Abbildung des abgeschlossenen Einheitskreises in sich hat einen Fixpunkt.*

Satz 5.2.13 *Gegeben sei eine Differentialgleichung wie im Satz 5.2.2. Die Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ sei einfach zusammenhängend. Dann umschließt jeder periodische Orbit eine Ruhelage.*

Bemerkung: Eine periodische Lösung entspricht einem geschlossenen Orbit, dieser wiederum ist eine Jordankurve. Nach dem Jordan'schen Satz zerlegt der Orbit den $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten, von denen eine beschränkt ist. Die Aussage des Satzes ist, daß die beschränkte Komponente einen stationären Punkt enthält. Da U einfach zusammenhängend ist, ist auch die beschränkte Komponente einfach zusammenhängend und damit homöomorph zum offenen Einheitskreis. Diese an sich recht anschauliche Behauptung wird in der Funktionentheorie bewiesen.
Beweis: Sei G_b die beschränkte Komponente, die von dem geschlossenen Orbit nach dem Jordan'schen Kurvensatz definiert wird. Weiter sei H deren Abschluß. Zu jedem $\tau > 0$ betrachten

wir die Abbildung $\Phi_\tau : H \to H$. Es ist klar, daß wegen des Eindeutigkeitssatzes die Menge H invariant ist. Da H homöomorph zum abgeschlossenen Einheitskreis ist, hat jede Abbildung Φ_τ einen Fixpunkt u_τ. Ist nun $\{\tau_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine gegen Null konvergierende Folge, und u_m eine Folge von Fixpunkten von Φ_{τ_m}, so kann man o.B.d.A. davon ausgehen, daß die Menge u_m gegen u^* konvergiert (nach Übergang zu einer Teilfolge). Zu jedem $t > 0$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert eine Zahl $k_m(t)$ mit der Eigenschaft $k_m(t)\tau_m \le t < (k_m(t) + 1)\tau_m$. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} |\Phi_t(u^*) - u^*| &\le |\Phi_t(u^*) - \Phi_t(u_m)| + |\Phi_t(u_m) - u_m| + |u_m - u^*| \\ &= |\Phi_t(u^*) - \Phi_t(u_m)| + |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - u_m| + |u_m - u^*|. \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Term werden aufgrund der Konvergenz von $u_m \to u^*$ und der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten klein. Für den mittleren Ausdruck brauchen wir eine gewisse Gleichmäßigkeit der Konvergenz von $\Phi_t(\cdot) \to \mathbb{1}$ für $t \to 0$. Wir umgehen dies mit folgender Abschätzung::

$$|\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - u_m| \le |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - \Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u^*)| + |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u^*) - u^*| + |u^* - u_m|$$

Hier wird wieder der erste und der letzte Ausdruck klein, wegen der Konvergenz $u_m \to u^*$ und der stetigen Abhängigkeit. Der mittlere Ausdruck wird klein, da

$$t - k_m(t)\tau_m \to 0$$

konvergiert. □

5.3 Das Wazewski Prinzip

Der Satz von Poincaré-Bendixson gibt eine Art von topologischem Prinzip, um Lösungen bestimmter Art zu garantieren. Wir wollen hier ein weiteres solches Prinzip kennenlernen. Es gehört eigentlich nicht unter die Überschrift „Autonome Gleichungen“, denn wir können hier auch nichtautonome Gleichungen zulassen. Die Anwendungen betreffen jedoch zumeist autonome Probleme, und deshalb ist es vielleicht gerechtfertigt, dieses Prinzip, das den Namen des polnischen Mathematikers Wazewski[3] trägt, hier im Anschluß an den Satz von Poincaré-Bendixson zu präsentieren. Wir beginnen mit einem Spezialfall einer Definition aus der Topologie.

Definition 5.3.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Menge $V \subset U$ heißt* Retrakt *von U, falls es eine stetige Abbildung $\pi : U \to V$ gibt mit den Eigenschaften $\pi_{|V} : V \to V = \mathbb{1}_{|V}$. Die Abbildung π wird* Retraktion *genannt.*

Beispiele: Jede nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Retrakt. Es reicht den Fall zu betrachten, daß $\mathbb{R}^n$ der lineare Span von Punkten in V ist. Man wählt einen Punkt x_0 in V und definiert die Abbildung $\pi(x) = x$, falls $x \in V$ und $x_0 + \lambda\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$ für x außerhalb V, wobei λ so gewählt ist, daß der Punkt auf ∂V liegt und zwar zwischen x_0 und x.
Ein einfaches Argument zeigt, daß keine nichtleere offene Menge $V \neq \mathbb{R}^n$ Retrakt des $\mathbb{R}^n$ ist.

[3] Tadeus Wazewski(24.9.1896-5.9.1972) war wesentlicher Vertreter einer polnischen Schule, die sich topologische Ideen beim Studium von Differentialgleichungen zu Nutze machte. Er litt unter der deutschen Besetzung Polens und wurde für längere Zeit im Konzentationslager Sachsenhausen interniert.

Der Rand des Einheitskreises ist kein Retrakt der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Gleiches gilt in höheren Dimensionen. Der Beweis dieser Aussage beruht auf dem Brouwer'schen Fixpunktsatz.
Eine nichtzusammenhängende Menge ist kein Retrakt einer zusammenhängenden Menge. Auch dies sollte man sich zur Übung überlegen.

Definition 5.3.2 *Sei $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f : W \to \mathbb{R}^n$ in der ersten Komponente Lipschitz stetig. Weiter sei W^0 eine offene Teilmenge von W, ∂W^0 der Rand von W^0 und $\overline{W^0}$ der Abschluß von W^0. Ein* Austrittspunkt *von W^0 für die Differentialgleichung $\dot{u} = f(u,t)$ ist ein Paar $(u_0, t_0) \in \partial W^0$, so daß ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $(u(t, t_0, u_0), t)$ für $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ in W^0 enthalten ist. Ein Austrittspunkt wird* echter Austrittspunkt *genannt, falls es ein Intervall $(t_0, t_0 + \delta)$ gibt, so daß für $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ die Lösung $(u(t, t_0, u_0), t)$ außerhalb von $\overline{W^0}$ ist. Mit W^0_a bezeichnen wir die Menge der Austrittspunkte, mit W^0_{sa} die Menge der echten (strikten) Austrittspunkte.*

Satz 5.3.3 *Sei $f : W \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich der ersten Komponente Lipschitz stetig. Jeder Austrittspunkt einer offenen Teilmenge W^0 von W sei echter Austrittspunkt, d.h. $W^0_a = W^0_{sa}$. Sei $S \subset W^0 \cup W^0_a$ nichtleer. Angenommen, $S \cap W^0_a$ ist kein Retrakt von S, aber ein Retrakt von W^0_a. Dann gibt es einen Anfangswert $(u_0, t_0) \in S$, so daß $(u(t, t_0, u_0), t)$ auf dem maximalen (rechtsseitigen) Existenzintervall in W^0 enthalten ist.*

<u>Beweis:</u> Wir beweisen den Satz durch Widerspruch. Unter der Annahme, daß der Satz falsch ist, konstruieren wir eine Retraktion, d.h. eine Abbildung mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften von S auf $S \cap W^0_a$. Zu jedem Paar $(u_0, t_0) \in S$ existiert ein $t_1 > t_0$, so daß für $t \in (t_0, t_1)$ die Lösung $(u(t, t_0, u_0),) \in W^0$ ist, und für t_1 gilt $(u(t_1, t_0, u_0), t_1) \in \partial W^0$. Insbesondere ist $(u(t_1, t_0, u_0), t_1) \in W^0_a$. Wir definieren eine Abbildung $\pi : S \to W^0_a$ durch $\pi(u_0, t_0) = (u(t_1, t_0, u_0), t_1)$ falls $(u_0, t_0) \notin W^0_a$ und $\pi(u_0, t_0) = (u_0, t_0)$, falls $(u_0, t_0) \in W^0_a$. Dann ist π stetig. Dies folgt, da jeder Austrittspunkt echter Austrittspunkt ist. Sei nun $\tau : W^0_a \to S \cap W^0_a$ eine Retraktion. Dann ist $\tau \circ \pi$ eine Retraktion von S auf $S \cap W^0_a$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

<u>Beispiele:</u> 1.) Wir betrachten zunächst ein nichtautonomes Beispiel. Gegeben sei eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in der ersten Komponente Lipschitz stetig sei. Wir nehmen an, daß es zwei Zahlen $u_1 < u_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(u_1, t) < 0 \text{ und } f(u_2, t) > 0.$$

Dann gibt es eine Lösung $u(t)$ von $\dot{u} = f(u,t)$ mit $u_1 < u(t) < u_2$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Sei

$$W^0 = \{(u,t) \mid u_1 < u < u_2\},$$

siehe Abbildung 5.3. Alle Punkte auf den Geraden $u = u_1$, bzw. $u = u_2$ sind Austrittspunkte, sogar echte Austrittspunkte. Sei

$$S = \{(u, 0) \mid u \in [u_1, u_2]\}.$$

Dann ist die Menge $S \cap W^0_a = \{(u_1, 0), (u_2, 0)\}$. Dies ist kein Retrakt von S, aber ein Retrakt von W^0_a. Damit existiert eine Lösung $u(t, u_0)$, mit $u_0 \in (u_1, u_2)$, die für alle positiven Zeiten in W^0 bleibt. Da W^0 negativ invariant ist, bleibt diese Lösung für alle Zeiten in W^0. Ein ähnliches

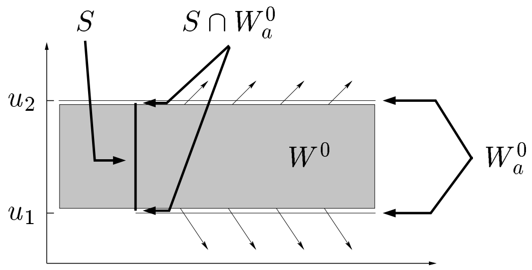

Abbildung 5.3: Wazewski Prinzip: erstes Beispiel

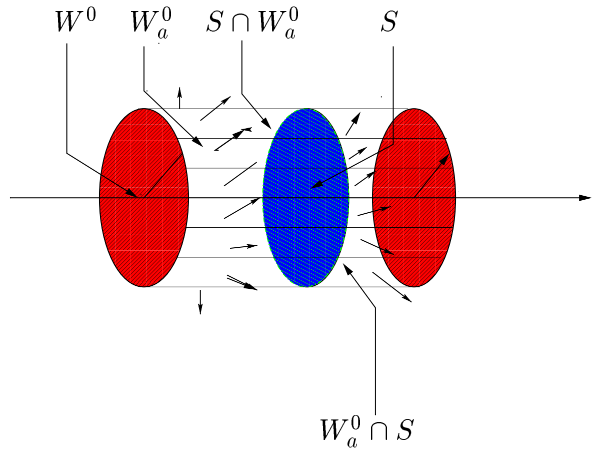

Abbildung 5.4: Das erste Beispiel in höherer Dimension

Argument funktioniert, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt. Auch dort ist der Rand einer Kugel nicht Retrakt der Kugel, aber Retrakt des entsprechenden Zylinders, vgl. Abbildung 5.4.
Man kann dies auf die Problemstellung von Aufgabe 3.6.2 anwenden. Wir schauen uns nur die eindimensionale Situation an (in höheren Dimensionen hat man das gleiche Argument). Sei $\dot{u} = \lambda u + f(t)$, $\lambda \neq 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann existieren Zahlen $u_1 < 0 < u_2$ mit $\lambda u_1 + f(t) < 0 < \lambda u_2 + f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das vorstehende Argument ist anwendbar, und man erhält eine beschränkte Lösung. Eine Eindeutigkeitsaussage kann man von einem solchen Prinzip nicht erwarten.

2.) Wir betrachten die Abbildung 5.5. Hier schließt man auf die Existenz einer Lösung, die für positive Zeiten in W^0 bleibt. Offenkundig ist besteht $S \cap W_a^0$ aus zwei Komponenten, während S zusammenhängend ist. Da $W_a^0 = S \cap W_a^0$, ist dies offenkundig ein Retrakt von W_a^0, jedoch kein Retrakt von S. In der angedeuteten zweidimensionalen Situation kann man dann mit dem Satz von Poincaré-Bendixson schließen, daß W^0 sogar eine Ruhelage oder einen geschlossenen Orbit enthält.

3.) Wir erwähnen eine weitere Anwendung, die die Mächtigkeit des Wazewski-Prinzips aufzeigt, jedoch für eine vollständige Begründung mehr Kenntnisse aus der Topologie erfordert, als wir zugrunde legen möchten. Dies ist ein Zylinder mit flußinvariantem Mantel, wobei das Vektorfeld am Boden nach außen gerichtet ist, am Deckel nach innen. Allein die Existenz einer Lösung mit dem angedeuteten Knoten impliziert, daß es eine Lösung gibt, die für alle Zeiten im Inneren bleibt.

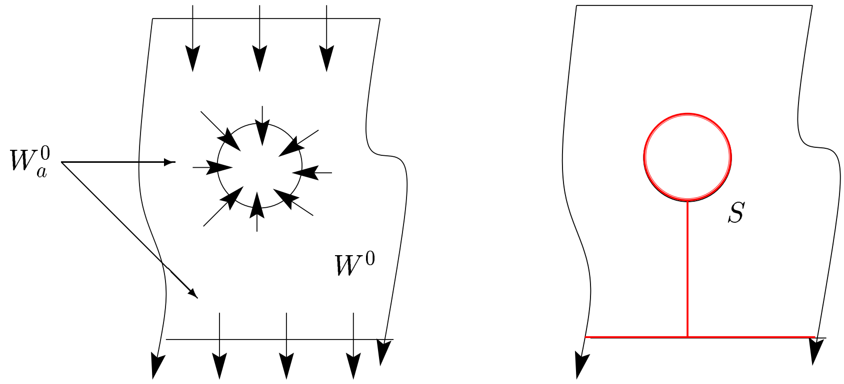

Abbildung 5.5: Wazewski-Prinzip: zweites Beispiel, in der rechten Darstellung die Menge S.

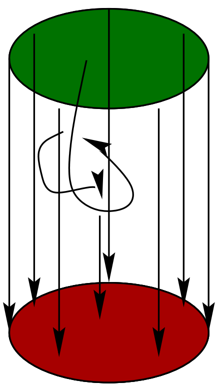

Abbildung 5.6: Ein etwas komplizierteres Beispiel

5.4 Gradientensysteme

Unter Gradientensystemen versteht man Differentialgleichungen, die durch eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, bzw. $F : M \to \mathbb{R}$ im folgenden Sinne gegeben sind: es sei $f = \nabla F$ und

$$\dot{u} = -f(u)$$

die zu untersuchende gewöhnliche Differentialgleichung. Hat man eine Lösung $u(t)$ dieser gewöhnlichen Differentialgleichung, so erhält man für

$$\frac{d}{dt}F(u(t)) = \langle \nabla F(u(t), \dot{u}(t) \rangle = -\langle f(u(t)), f(u(t)) \rangle \leq 0.$$

Genauer wird dieser Ausdruck genau dann null, wenn $f(u(t)) = 0$, d.h. wenn $u(t)$ eine Ruhelage ist. Diese einfache Beobachtung hat weitreichende Konsequenzen.

Satz 5.4.1 *In einem Gradientensystem bestehen die α- und ω-Grenzmengen jeweils aus stationären Lösungen.*

Beweis: Angenommen, $w_1,\ w_2 \in \omega(\mathcal{O})$ sind zwei Punkte in der ω-Grenzmenge des Orbits $\mathcal{O}$ mit $F(w_2) < F(w_1)$. Sei u eine Lösung im Orbit und $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zeitfolge mit $t_n \to \infty$ und $u(t_n) \to w_2$. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so daß $|F(u(t_n)) - F(w_2)| < \frac{1}{2}|F(w_1) - F(w_2)|$. Dann ist für $t > t_n$ wegen der Gradientenstruktur auch $F(u(t)) < F(u(t_n))$, und insbesondere gilt

$$F(u(t)) < F(w_1) - \frac{1}{2}(F(w_1) - F(w_2)) = \frac{1}{2}(F(w_1) + F(w_2)),$$

also ist $F(u(t))$ von $F(w_1)$ wegbeschränkt. Demzufolge gibt es keine Folge mit $t_m \to \infty$ mit $u(t_m) \to w_1$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, daß $F(w_1) \neq F(w_2)$ ist und daher folgt $F(w_1) = F(w_2)$. Längs Trajektorien in der Grenzmenge ist also F konstant, also nach der Vorüberlegung $f = 0$, und daher ist eine solche Trajektorie die einer Ruhelage. □

Definition 5.4.2 *Wir nennen die Mengen $F = const$* Niveaumengen. *Insbesondere sagen wir, zwei Punkte $w_1,\ w_2$ sind von* verschiedenem Niveau, *falls $F(w_1) \neq F(w_2)$.*

Satz 5.4.3 (Charakterisierung der Attraktoren von Gradientensystemen) *Attraktoren in Gradientensystemen bestehen aus Ruhelagen und aus verbindenden Orbits von Ruhelagen unterschiedlichen Niveaus.*

Beweis: Folgt sofort aus dem zuvor gesagten. □

Beispiel 5.4.4 *In diesem Beispiel wollen wir sehen, daß es Attraktoren gibt, die aus mehr als nur Ruhelagen bestehen. Es sei*

$$\dot{x} = x(1 - x^2).$$

Dann ist $[-1, 1]$ ein Attraktor, der aus den Ruhelagen $-1, 0, 1$ besteht und den verbindenden Orbits.

5.5 Hamilton'sche Systeme

Ähnlich wie Gradientensysteme sind auch Hamilton'sche Systeme[4] durch die Angabe einer reellwertigen Funktion bestimmt. Hamilton'sche Systeme spielen vor allem in der Mechanik eine zentrale Rolle, viele Probleme werden in der Sprache Hamilton'scher Systeme formuliert und gelöst. Die Theorie Hamilton'scher Systeme ist bereits seit Euler bei der mathematischen Beschreibung mechanischer Probleme fest etabliert, allerdings auch heute noch von enormer Bedeutung, wenn man auch heute oft die Theorie Hamilton'scher Systeme hinter anderen Begriffen versteckt: z.B. symplektische Geometrie. Die Bedeutung wird vielleicht dadurch ersichtlich, daß beim letzten ICM alle Hauptvorträge zum Thema Differentialgleichungen/Dynamische Systeme mit einer Ausnahme symplektische Geometrie zum Thema hatten. Diese Bedeutung wird untermauert dadurch, daß auch heute noch alle bedeutenden Mathematiker auf dem Gebiet der Differentialgleichungen dieses Gebiet bearbeiten. Wir wollen dieser Bedeutung Rechnung tragen, indem wir diese Systeme definieren und einige wichtige Eigenschaften kennenlernen.

Da in einem Hamilton'schen System immer Impuls- und Ortsvariable gleichberechtigt auftauchen, lebt ein solches System auf natürliche Weise auf dem $\mathbb{R}^{2n}$. Es sei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 5.5.1 *Eine Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ heißt* Hamilton'sch, *falls es eine Funktion $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = J\nabla H(u)$.*

Bemerkung 5.5.2 *In mechanischen Systemen wird H oft als Energie interpretiert. Der Energieerhaltungssatz für solche Systeme lautet dann*

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = 0.$$

Wie man leicht sieht, gilt in Hamilton'schen Systemen der Energieerhaltungssatz.

Satz 5.5.3 *H bleibt längs Orbits der zugehörigen Differentialgleichung konstant.*

<u>**Beweis:**</u> Wir schreiben $p = (u_1, \ldots, u_n),\ q = (u_{n+1}, \ldots, u_{2n})$. Damit wird ein Hamilton'sches System zu

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Ableitung und erhalten

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

□

[4] William Rowan Hamilton (4.8.1805-2.9.1865), irischer Mathematiker und Physiker, fand 1822 einen Fehler in Laplace's Arbeit „Mécanique céleste". Er arbeitete als Astronom, fand aber viele bedeutende mathematische Ergebnisse, u.a. die Quaternionen und die nach ihm benannten Funktionen und Differentialgleichungen.

Definition 5.5.4 *Ein Fluß $\Phi_t : U \times \mathbb{R} \to U$ heißt* volumenerhaltend, *wenn für jede meßbare, beschränkte Menge $V \subset U$ gilt, daß $\mu(V) = \mu(\Phi_t(V))$ für alle $t \geq 0$, wobei μ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.*

Satz 5.5.5 *Der Fluß einer Hamilton'schen Differentialgleichung ist volumenerhaltend.*

Beweis: Sei V offen und beschränkt, wir zeigen

$$\mu(\Phi_t(V)) = \mu(V)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dazu zeigen wir $\frac{d}{dt}\mu(\Phi_t(V)) = 0$. Mit der Transformationsformel erhält man

$$\mu(\Phi_t(V)) = \int\limits_{\Phi_t(V)} dx = \int\limits_V |\det D_x\Phi_t(x)| dx.$$

Es gilt

$$\Phi_t(x) = x + tf(X) + O(t^2),$$

also

$$D_x\Phi_t(x) = \mathbb{1} + tD_xf(X) + O(t^2).$$

Zur Berechnung der Determinante bemerkt man

$$\det(1 + tA) = 1 + t\,\mathrm{tr}(A) + O(t^2).$$

Zusammen ergibt sich

$$\det D_x\Phi_t(x) = 1 + t\,\mathrm{tr}(D_xf(x)) + O(t^2) = 1 + t\,\mathrm{div}\, f(x) + O(t^2).$$

Also ist

$$\frac{d}{dt}\mu(\Phi_t(V))_{|t=0} = \int\limits_V \mathrm{div}\, f(x) dx.$$

Hat man $\mathrm{div}\, f = 0$, so ist diese Ableitung null und demzufolge der Fluß volumenerhaltend.

Dazu muß man noch die Divergenz eines Hamilton'schen Vektorfeldes ausrechnen. Man erhält

$$\mathrm{div}\, J\nabla H(u) = \mathrm{div}_p(-\frac{\partial H}{\partial q}) + \mathrm{div}_q(\frac{\partial H}{\partial p}) = 0.$$

$\square$

Korollar 5.5.6 *Ein divergenzfreies Vektorfeld ist volumenerhaltend.*

Definition 5.5.7
1. *Eine Ruhelage x_0 heißt* asymptotisch stabil, *wenn sie stabil ist und es eine Umgebung U von x_0 gibt, mit $x_0 = \omega(u_0)$ für alle $u_0 \in U$.*
2. *Eine periodische Lösung P heißt* asymptotisch stabil, *wenn sie stabil ist und es eine Umgebung U von P gibt, mit $P = \omega(u_0)$ für alle $u_0 \in U$.*

Satz 5.5.8 *In Hamilton'schen Systemen gibt es weder asymptotisch stabile Ruhelagen, noch asymptotisch stabile periodische Lösungen.*

Beweis: Widerspricht dem Volumenerhaltungssatz in einer Umgebung der Ruhelage, bzw. des periodischen Orbits. □

Satz 5.5.9 (Poincaré'scher Wiederkehrsatz) *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\Phi : G \to G$ sei stetig, volumenerhaltend und injektiv. Dann gilt: Für jeden Punkt $y \in G$ und jede Umgebung U von y existiert ein Punkt $x \in U$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Phi^n(x) \in U$.*

Beweis: Wegen des Erhalts des Volumens gilt $\mu(\Phi^n(U)) = \mu(U)$. Sind alle $\Phi^n(U)$ disjunkt, so folgt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi^n(U) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U) = \infty.$$

Daher ist die Familie der $\Phi^n(U)$ nicht disjunkt. Ist aber $v \in \Phi^n(U) \cap \Phi^j(U)$, so gibt es $x, w \in U$ mit $v = \Phi^m(x) = \Phi^j(w)$, also (o.B.d.A. $n > j$) $U \ni w = \Phi^{m-j}(x)$. □

Korollar 5.5.10 *Ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $g : S^1 \to S^1 : z \mapsto e^{i\alpha}z$, so ist der Orbit eines Punktes $\{e^{in\alpha}z\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in S^1.*

Beweis: g ist Homöomorphismus und volumenerhaltend. Sind $z_1,\ z_2 \in S^1$, $z_2 = e^{i\phi}z_1$, so geht der Orbit $e^{in\alpha z_2}$ durch Multiplikation aus dem von z_1 hervor. Also ist entweder jeder Orbit dicht, oder es ist kein Orbit dicht. Wir zeigen die Dichtheit eines Orbits in zwei Schritten:

1. Jeder Punkt eines Orbits ist Häufungspunkt der anderen Punkte des Orbits.
   Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(y)$, die keinen weiteren Punkt von des Orbits von y enthält. Betrachte $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y)$. Es gibt darin einen Punkt x und eine Iterierte, die wieder in dieser Umgebung landet. Dann ist aber der Orbit von y der von x um den entsprechenden (kleinen) Winkel gedreht. Also schneidet er die ursprüngliche ε-Umgebung in einem Punkt z. Dann ist $z \neq y$, da ansonsten α rational wäre.

   Insbesondere ist 1 Häufungspunkt des Orbits von 1.

2. Der Orbit von 1 ist dicht in S^1.
   Angenommen, dies wäre nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt $w \in S^1$ und eine Umgebung $B_\varepsilon(w)$, die vom Orbit von 1 nicht getroffen wird. Sei $y \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(1) \cap \mathcal{O}(1)$. Dann ist jede Potenz von y im Orbit von 1, und zwei benachbarte Punkte sind nicht weiter als $\frac{\varepsilon}{4}$ voneinander entfernt. Dies widerspricht der Konstruktion von w. □

Eine zumindest auf den ersten Blick überraschende Anwendung des Poincaré'schen Wiederkehrsatzes ist das folgende Gedankenexperiment. Das Verhalten eines Gases kann als Vielteilchensystem modelliert werden, so daß für jedes Molekül eine Gleichung für Ort und Impuls aufgeschrieben wird. Bei ca. $6 \cdot 10^{23}$-Teilchen hat man dann $6 \cdot 6 \cdot 10^{23}$ Gleichungen. Es stellt sich heraus, daß diese Gleichungen Hamilton'sch und damit volumenerhaltend im $\mathbb{R}^{6\cdot 6\cdot 10^{23}}$ sind. Stellen wir uns nun einen Behälter vor, der durch eine Wand in zwei Teile geteilt wird, von denen eine mit einem Gas gefüllt ist, und die andere leer ist. Diese Situation ist unsere Anfangsbedingung. Öffnet man nun die Wand, kann sich das Gas ungehindert in beide Teile ausbreiten. Der Poincare'sche Wiederkehrsatz sagt nun, daß es eine Umgebung der Ausgangsbedingung gibt, so daß der Orbit nach einer genügend langen Zeit in diese Umgebung zurückkehrt.

Dieses Ergebnis erscheint widersinnig, denn es entspricht nicht unserer Erfahrung. Allerdings ist die Zeit, die für diese Wiederkehr benötigt wird, länger als die Zeit der Existenz unseres Sonnensystems! Da dieser Zeitraum jenseits unserer erfahrbaren Wirklichkeit liegt, dürfen wir unsere Erfahrung auch nicht zur Grundlagen von diesbezüglichen Aussagen machen.

5.6 Aufgaben

Aufgabe 5.6.1 (a) Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossene Untergruppe* von $\mathbb{R}$, wenn G eine abgeschlossene Teilmenge und gleichzeitig, bezüglich der Addition, eine Untergruppe ist. Man beschreibe alle abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{R}$.

(b) Gegeben sei eine stetige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Eine Zahl $T \in \mathbb{R}$ heißt Periode von x, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $x(t+T) = x(t)$. Man zeige, die Menge

$$P_x = \{T \in \mathbb{R} \mid T \text{ ist Periode von } x\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$.

(c) Man zeige, gibt es für die Lösung $u(t, t_0, u_0)$ des autonomen Anfangswertproblems

$$\dot{u} = f(u), \;\; u(t_0) = u_0$$

zwei verschiedene Zeitpunkte t_1, t_2 mit $u(t_1, t_0, u_0) = u(t_2, t_0, u_0)$, so existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ und ist periodisch, d.h. es existiert eine Zahl $T > 0$ mit $u(t+T, t_0, u_0) = u(t, t_0, u_0)$.

Aufgabe 5.6.2 (a) Was ist der Phasenraum, bzw. der erweiterte Phasenraum für die Gleichungen $\dot{u} = u$, bzw. $\dot{u} = u(1-u)$ in $\mathbb{R}$. Was sind die Trajektorien, bzw. die Orbits?
(b) Man beantworte die gleichen Fragen für die Gleichung im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -u_2 + u_1(1-r^2) \\ \dot{u}_2 &= u_1 + u_2(1-r^2), \end{aligned}$$

wobei $r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ ist.

Aufgabe 5.6.3 Man zeige den Begradigungssatz 5.1.17

Aufgabe 5.6.4 Man überlege sich, ob der Satz von Poincaré-Bendixson für Differentialgleichungen auf der zweidimensionalen Sphäre, bzw. dem zweidimensionalen Torus richtig ist.

Aufgabe 5.6.5 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so daß $\mathrm{div}(f)$ ein konstantes Vorzeichen auf G hat, so gibt es keinen geschlossenen Orbit in G.

Aufgabe 5.6.6 Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und G sei die Stammfunktion definiert durch $G(y) = \int_0^y g(s)ds$.
(a) Man schreibe die Gleichung $\ddot{u} + g(u)\dot{u} + u = 0$ um in ein zweidimensionales autonomes System.
(b) G sei ungerade in y, es gelte $G(y) \to \infty$ für $|y| \to \infty$. Weiterhin nehmen wir an, daß es positive Zahlen $0 < \alpha < \beta$ gibt mit $G(y) < 0$ auf $(0, \alpha)$, $G(\alpha) = 0$ und auf dem Intervall $[\beta, \infty)$ ist $G(y) > 0$ und monoton steigend. Man zeige, daß das in (a) erhaltene System eine periodische Lösung besitzt.

Aufgabe 5.6.7 Man überlege sich ein Beispiel, das zeigt, daß beim Wazewski-Prinzip die Voraussetzung, $W_a^0 \cap S$ ist Retrakt von W_a^0, gebraucht wird.

Aufgabe 5.6.8

1. Man bestimme die linearen Hammilton'schen Systeme.
2. Ist $x \mapsto Ax$ ein Hamilton'sches Vektorfeld, so nennen wir A symplektisch. Man zeige: Für symplektische Matrizen gilt $|\det A| = 1$.
3. Was folgt für die Eigenwerte symplektischer Matrizen?
4. Für eine symplektische Matrix gilt $\det A = 1$.

Kapitel 6

Stabilität

6.1 Die Stabilität einer Ruhelage

In diesem Abschnitt sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz stetige Abbildung. Wir betrachten die Differentialgleichung (5.1) $\dot{u} = f(u)$.

Definition 6.1.1 *Eine Ruhelage u_0 der Gleichung (5.1) heißt* stabil, *wenn die Menge $\{u_0\}$ im Sinne der Definition 5.1.21 stabil ist. Die Ruhelage wird asymptotisch stabil genannt, wenn sie stabil ist und zusätzlich die Menge $\{u_0\}$ ein Attraktor im Sinne der Definition 5.1.22 ist. Ist u_0 nicht stabil, so nennen wir u_0 instabil.*

Ein hinreichendes Stabilitätskriterium geht auf den russischen Mathematiker Ljapunov[1] zurück, das er in seiner Habilitationsschrift im Jahre 1892 bewies. Zwei Hilfssätze wollen wir vorab bereitstellen.

Hilfssatz 6.1.2 *(a) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\alpha > \max\{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ eine Konstante $M_\alpha \geq 1$, so daß für alle $t \geq 0$ gilt*

$$\|E(A,t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t}.$$

(b) Entsprechend gibt es zu jedem $\beta < \min\{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ eine Konstante $N_\beta \geq 1$ mit

$$\|E(A,t)\| \leq N_\beta e^{\beta t} \ \forall t \leq 0.$$

<u>Beweis:</u> Es reicht (a) zu beweisen. Die Aussage (b) folgt dann in gleicher Weise. Die Aussage folgt im wesentlichen aus dem Beweis des Satzes über Spektrum und Stabilität I, d.h. Satz 3.5.1. Sei α wie im Hilfssatz angegeben. Wir schreiben $A = A - \alpha\mathbb{1} + \alpha\mathbb{1}$. Da $\mathbb{1}$ mit jeder anderen Matrix kommutiert, erhält man

$$\|E(A,t)\| \leq e^{\alpha t}\|E(A - \alpha\mathbb{1}, t)\|.$$

[1] Aleksandr Michailowitsch Ljapunov (6.6.1857-3.11.1918) leistete in seiner Habilitationsschrift fundamentale Beiträge zur Stabilitätstheorie. Weitere Ergebnisse in der Theorie der Differentialgleichungen betreffen die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, ein Problem das von Riemann studiert worden war und bis heute aktuell ist.

Da alle Eigenwerte von $A - \alpha \mathbb{1}$ in der linken Halbebene sind, ist nach dem Beweis von Satz 3.5.1 $E(A - \alpha\mathbb{1}, t)$ für $t \geq 0$ beschränkt. Das heißt also, es gibt eine Konstante $M_\alpha > \|E(A - \alpha\mathbb{1}, t)\|$ und damit $\|E(A,t)\| < M_\alpha e^{\alpha t}$, wie behauptet. □

Hilfssatz 6.1.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung der Null, $g : U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$. Dann existiert zu jedem $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ mit*

$$|u_1| < \eta,\ |u_2| < \eta \Rightarrow |g(u_1) - g(u_2)| < L|u_1 - u_2|.$$

Beweis: Da die Ableitung $Dg(u)$ stetig in U ist, läßt sich zu jeder Konstante $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ finden, so daß $\|Dg(u)\| < L$ für $|u| < \eta$ ist. Wegen des Mittelwertsatzes läßt sich die Lipschitz Konstante auf einer Umgebung durch die maximale Norm der Ableitung abschätzen. □

Satz 6.1.4 (Ljapunov) [Spektrum und Stabilität II] *Gegeben sei eine autonome Differentialgleichung (5.1) mit einer Ruhelage w_0. Die Abbildung f sei in einer Umgebung von w_0 stetig differenzierbar und $A = Df(u_0)$ sei die Linearisierung (Ableitung) von f im Punkt w_0. Dann gilt:*

1. *Haben alle Eigenwerte von A negative Realteile, so ist w_0 asymptotisch stabil.*
2. *Gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil positiv ist, so ist w_0 instabil.*

Beweis: Wir beweisen zunächst die Stabilitätsaussage. O.B.d.A. dürfen wir davon ausgehen, daß $w_0 = 0$ ist. Zur Erleichterung der Schreibweise wollen wir dies auch tun. Da $A = Df(0)$ ist, kann man die Abbildung f in der Form $f(u) = Au + g(u)$ schreiben, wobei g bei 0 stetig differenzierbar ist und $Dg(0) = 0$ ist. Also hat die zu betrachtende Gleichung die Form

$$\dot{u} = Au + g(u) \tag{6.1}$$

Wir müssen die Stabilität und die Attraktivität von $w_0 = 0$ zeigen. Die Stabilität kann man auch so formulieren: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$|u_0| < \delta \Longrightarrow |u(t, u_0)| < \varepsilon\ \forall t \geq 0.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $u_0 \in U$. Die Lösung $u(t, u_0)$ von (6.1) genügt der Integralgleichung

$$u(t) = E(A,t)u_0 + \int_0^t E(A, t-s) g(u(s)) ds,$$

da natürlich nach Einsetzen der Lösung $u(t, u_0)$ in die Gleichung (6.1) daraus mit $h(t) = g(u(t, u_0))$ die äquivalente Gleichung

$$\dot{u} = Au + h(t)$$

entsteht. Sei $\mu = \max\{\text{Re}\ (\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\mu < 0$ und die Norm von $E(A,t)$ kann für jedes $\alpha \in (\mu, 0)$ abgeschätzt werden durch

$$\|E(A,t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t},$$

wobei M_α die reelle Konstante ist, deren Existenz der Hilfssatz 6.1.2 gewährleistet. Wir finden auch eine positive Konstante $L > 0$ mit

$$M_\alpha L < \frac{1}{2}\min\{-\alpha, 1\}.$$

Nach Hilfssatz 6.1.3 gibt es ein $\eta > 0$, $\eta < \varepsilon$, so daß auf $B_\eta(0)$ die Funktion g die Lipschitz Konstante L hat. Sei $\delta = \frac{1}{2}\frac{\eta}{M_\alpha}$. Nun hat man für $|u_0| < \delta$ die Abschätzung

$$|u(t,u_0)| \leq \|E(A,t)\|\ |u_0| + \int_0^t \|E(A,t-s)\|\ |f(u(s,u_0))|ds. \tag{6.2}$$

Einsetzen ergibt (jedenfalls solange $|u(s,u_0)| < \eta$ ist)

$$\begin{aligned} |u(t,u_0)| &\leq M_\alpha e^{\alpha t}\delta + M_\alpha L\eta \int_0^t e^{\alpha(t-s)}ds \\ &< \frac{1}{2}\eta + M_\alpha L\eta\frac{1}{|\alpha|}(1-e^{\alpha t}) \\ &< \frac{1}{2}\eta + M_\alpha L\eta\frac{1}{|\alpha|} \\ &< \eta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit hat man die Stabilität, denn angenommen es gäbe eine Zahl $t^* > 0$ mit $|u(t^*,u_0)| = \eta$, dann kann man o.B.d.A. davon ausgehen, daß t^* minimal gewählt wurde. Dann ist für $t \in (0,t^*)$ $|u(t,u_0)| < \eta$. Unsere Abschätzung garantiert, daß auch noch für $t = t^*$ die Lösung $u(t,u_0)$ in $B_\eta(0)$ enthalten ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Um die asymptotische Stabilität zu zeigen, nutzen wir die Formel (6.2) und schätzen etwas anders ab:

$$|u(t,u_0)| \leq M_\alpha e^{\alpha t}\delta + M_\alpha L \int_0^t e^{\alpha(t-s)}|u(s,u_0)|ds. \tag{6.3}$$

Multiplikation mit $e^{-\alpha t}$ liefert für die Funktion $v(t) = e^{-\alpha t}|u(t,u_0)|$ die Abschätzung

$$v(t) \leq M_\alpha\delta + M_\alpha L\int_0^t v(s)ds.$$

Hier verwenden wir das Lemma von Gronwall (Lemma 2.2.4)

und erhalten

$$v(t) \leq M_\alpha \delta e^{M_\alpha L t}.$$

Damit ergibt sich für $u(t,u_0)$ die Abschätzung

$$|u(t,u_0)| \leq M_\alpha\delta e^{(M_\alpha L+\alpha)t}.$$

Da $M_\alpha L + \alpha < 0$ ist, konvergiert dies gegen Null. Damit ist die asymptotische Stabilität gezeigt.

Wir nehmen nun an, daß die Linearisierung einen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt. Wir zeigen, daß es eine nichttriviale Lösung $u(t)$ gibt mit $u(t) \to w_0$ für $t \to -\infty$. Daraus folgt dann die Behauptung. Zunächst wollen wir uns überlegen, wie die Aussage des Satzes aus dieser Tatsache folgt. Dann werden wir dies als eigenes Lemma formulieren. Sei $u(t)$ eine Lösung mit $u(t) \to w_0 = 0$ für $t \to -\infty$. Sei $\varepsilon = |u(0)| > 0$. (Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß 0 im maximalen Existenzintervall enthalten ist.) Angenommen, es existiere ein $\delta > 0$, so daß aus $|u_0| < \delta$ folgen würde, daß für alle $t \geq 0$ gilt $|u(t,u_0)| < \varepsilon$, so könnte man schließen, daß $|u(t)| > \delta\ \forall t \leq 0$. Dies ist ein Widerspruch. Wie angekündigt wollen wir die Existenz von $u(t)$ getrennt zeigen. □

Definition 6.1.5 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann bezeichnen wir mit E^+ die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit positivem Realteil, entsprechend mit E^- die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit negativem Realteil, und E^0 entsprechend mit Realteil 0. P^+, P^-, P^0 schreiben wir für die Projektoren auf diese Räume mit Kern $E^0 \oplus E^-$ bzw. $E^+ \oplus E^-$ bzw. $E^0 \oplus E^+$. Weiter seien $Q^+ = I - P^+$, $Q^- = I - P^-$ die entsprechenden komplementären Operatoren. Weiterhin wollen wir vereinbaren, daß $\sigma^+(A)$ für $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ steht und ganz entsprechend $\sigma^0(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$, bzw. $\sigma^-(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$ definiert sind.*

Lemma 6.1.6 *Die Räume E^+, E^- und E^0 sind invariante Unterräume für A, d.h. $AE^+ \subset E^+$, $AE^- \subset E^-$ und schließlich $AE^0 \subset E^0$.*

Beweis: Folgt sofort aus der Definition der Räume. □

Definition 6.1.7 *Die Einschränkungen von A auf die verschiedenen Unterräume wollen wir folgendermaßen bezeichnen:*

$$\begin{aligned} A_u &= A_{|E^+} \\ A_s &= A_{|E^-} \\ A_c &= A_{|E^0} \\ A_{cu} &= A_{|E^0 \oplus E^+} \\ A_{cs} &= A_{|E^0 \oplus E^-} \end{aligned}$$

Lemma 6.1.8 *(a) Die jeweiligen Spektren dieser lineare Abbildungen sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned} \sigma(A_u) &= \sigma^+(A) \\ \sigma(A_s) &= \sigma^-(A) \\ \sigma(A_c) &= \sigma^0(A) \\ \sigma(A_{cu}) &= \sigma^0(A) \cup \sigma^+(A) \\ \sigma(A_{cs}) &= \sigma^0(A) \cup \sigma^-(A). \end{aligned}$$

(b) Die Matrixexponentialfunktionen der Einschränkungen A_u, A_{cs} genügen den Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \forall \beta < \frac{1}{3} \min\{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma^+(A)\} \quad \exists N_{3\beta} \geq 1 \quad \|E(A_u, t)\| &\leq N_{3\beta} e^{3\beta t} \ \forall t \leq 0 \\ \forall \alpha > 0 \quad \exists M_\alpha \geq 1 \quad \|E(A_{cs}, t)\| &\leq M_\alpha e^{\alpha t} \ \forall t > 0. \end{aligned}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Hilfssatz 6.1.2. □

Bemerkung: Ähnliche Abschätzungen gelten natürlich auch für die anderen Teile von A.

Außerdem kann man eine solche Dreiteilung auch an anderen Achsen als der imaginären Achse vornehmen.

Satz 6.1.9 *Sei $\dot{u} = Au + g(u)$ eine autonome Differentialgleichung mit stetig differenzierbarem $g : U \to \mathbb{R}^n$ und $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$. Hat A Eigenwerte mit positivem Realteil, so existiert eine Umgebung $B_\delta(0)$, so daß zu jedem $u_0 \in B_\delta(0) \cap E^+$ eine Lösung $u(t)$ existiert mit*

1. $P^+ u(0) = u_0$,
2. $u(t) \to 0$ *für* $t \to -\infty$.

Beweis: Wähle ein
$$\alpha \in (0, \frac{1}{3} \min\{\mathrm{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma^+(A)\}).$$
Dann gibt es nach dem oben angegebenen Lemma 6.1.8 Zahlen M_α und $N_{3\alpha}$ mit den entsprechenden Abschätzungen $\|E(A_{cs}, t)\| \leq M_\alpha e^\alpha t$ für positive t und
$$\|E(A_u, t)\| \leq N_{3\alpha} e^{3\alpha t}$$
für nichtpositive t. Setze
$$M = \max\{M_\alpha, N_{3\alpha}\}.$$
Damit gilt $\|E(P^+A, t)P^+\| \leq Me^{3\alpha t}$ für $t \leq 0$ und $\|E(Q^+A, t)Q^+\| \leq Me^{\alpha t}$ für $t > 0$. Wir wählen $\eta > 0$ so klein, daß
$$\frac{ML(\eta)}{\alpha} \max\{\|P^+\|, \|Q^+\|\} < \frac{1}{4}$$
ist, wobei $L(\eta)$ die Lipschitz Konstante von g auf $B_\eta(0)$ ist. Wir betrachten den Raum der Funktionen
$$C^\alpha(u_0) = \{u : (-\infty, 0] \to U \mid u \text{ ist stetig, } |u(t)| < \eta e^{2\alpha t} < \infty,\ P^+ u(0) = u_0\}.$$
Auf $C^\alpha(u_0)$ definieren wir eine Metrik d^α durch
$$d^\alpha(u, v) = \eta \sup\{|u(t) - v(t)| e^{-2\alpha t} \mid t \leq 0\}.$$
d^α macht $C^\alpha(u_0)$ zum vollständigen, metrischen Raum. Wir prüfen die Vollständigkeit nach. Sei $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Metrik d^α. Dann existiert ein punktweiser Limes $u(t)$. Wir müssen zeigen, daß u wieder in C^α liegt. Dazu prüfen wir die Wachstumsbedingung nach:
$$|u(t)| \leq |u(t) - u_n(t)| + |u_n(t)| \leq |u(t) - u_n(t)| e^{-2\alpha t} e^{2\alpha t} + \eta e^{2\alpha t} \leq (d^\alpha(u, u_n) + \eta) e^{2\alpha t} \leq (\varepsilon + \eta) e^{2\alpha t}.$$
Wir setzen für $t \leq 0$
$$Tu(t) = e^{P^+At} u_0 + \int_0^t e^{P^+A(t-s)} P^+ g(u(s)) ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)} Q^+ g(u(s)) ds. \tag{6.4}$$
Wir müssen für ein genügend kleines $\delta > 0$ drei Dinge beweisen:

1. T bildet für $|u_0| < \delta$ den Raum $C^\alpha(u_0)$ in sich ab.
2. T ist eine starke Kontraktion.
3. Der Fixpunkt u hat die gewünschten Eigenschaften.

1.) T bildet den Raum $C^\alpha(u_0)$ in sich ab. Dazu müssen wir die drei Eigenschaften nachprüfen, nämlich die Stetigkeit von Tu, die Wachstumsschranke und schließlich die Anfangsbedingung. Die Stetigkeit von Tu ist klar, sofern die Integrale existieren. Auch die letzte Eigenschaft ist offensichtlich:
$$P^+ Tu(0) = P^+ E(P^+A, 0) u_0 + P^+ \int_{-\infty}^0 E(Q^+A, -s) Q^+ g(u(s)) ds.$$

Dies ist gleich P^+u_0. Bleibt die Beschränktheit von Tu zu zeigen. Dazu schätzen wir ab:

$$|Tu(t)| \leq \|e^{P^+At}\| \, |u_0| + \int_t^0 \|e^{P^+A(t-s)}\| \|P^+\| L(\eta)|u(s)|ds + \int_{-\infty}^t \|e^{Q^+A(t-s)}\| \|Q^+\| L(\eta)|u(s)|ds.$$

Einsetzen ergibt (Dabei beachte man, daß im zweiten Integral die Zeitdifferenz positiv, im dritten negativ ist.)

$$|Tu(t)| \leq Me^{\alpha t}|u_0| + ML(\eta)\max\{\|P^+\|, \|Q^+\}\left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}|u(s)|ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}|u(s)|ds\right).$$

Wegen der Wachstumsbeschränkung in C^α kann man weiter abschätzen

$$|Tu(t)| \leq Me^{3\alpha t}|u_0| + ML(\eta)\eta\max\{\|P^+\|, \|Q^+\|\}\left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}e^{2\alpha s}ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}e^{2\alpha s}ds\right).$$

Wir betrachten zunächst das zweite Integral, es liefert folgenden Beitrag:

$$e^{3\alpha t}\int_t^0 e^{-3\alpha s}e^{2\alpha s}ds = e^{3\alpha t}\frac{1}{-\alpha}(1 - e^{-\alpha t}).$$

Dies ergibt als obere Abschätzung für das erste Integral

$$\frac{1}{\alpha}(e^{2\alpha t} - e^{3\alpha t}).$$

Für das zweite Integral erhält man

$$e^{\alpha t}\int_{-\infty}^t e^{\alpha s}ds \leq \frac{1}{\alpha}e^{2\alpha t}.$$

Zusammen ergibt sich die endgültige Abschätzung

$$\|Tu(t)\| \leq Me^{3\alpha t}|u_0| + ML(\eta)\eta\frac{1}{\alpha}e^{2\alpha t} - \frac{ML(\eta)\eta}{\alpha}e^{3\alpha t}.$$

Mit $\delta < \frac{L(\eta)\eta}{\alpha}$ und der Wahl von η erhält man

$$|Tu(t)| \leq \eta e^{2\alpha t}.$$

Damit haben wir den ersten Schritt abgeschlossen.
2.) Seien $u_1,\ u_2 \in C^\alpha(u_0)$. Wir müssen den Abstand $d^\alpha(Tu_1, Tu_2)$ kontrollieren. Also

$$d^\alpha(Tu, Tv) = \eta\sup\{|Tu(t) - Tv(t)|e^{-2\alpha t} \mid t \leq 0\}.$$

Die Differenz $Tu(t) - Tv(t)$ hat die Form

$$Tu(t) - Tv(t) = \int_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+(g(u(s)) - g(v(s)))ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+(g(u(s)) - g(v(s)))ds.$$

Übergang zu den Normen und die grundlegenden Abschätzungen ergeben

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq ML(\eta)\left(\|P^+\|\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}|u(s) - v(s)|ds + \|Q^+\|\int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}|u(s) - v(s)|ds\right).$$

Wir betrachten wieder die beiden Integrale getrennt und multiplizieren zunächst mit $\eta e^{-2\alpha t}$. Für das erste Integral erhalten wir

$$e^{-2\alpha t}\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}e^{-2\alpha s}e^{2\alpha s}|u(s)-v(s)|ds \le e^{\alpha t}\int_t^0 e^{-\alpha s}ds\, d^\alpha(u,v).$$

Damit ergibt sich für das erste Integral die Abschätzung

$$e^{-2\alpha t}\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)}e^{-2\alpha s}e^{2\alpha s}|u(s)-v(s)|ds \le \frac{1}{\alpha}d^\alpha(u,v).$$

Für das zweite erhalten wir

$$e^{-2\alpha t}\int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)}|u(s)-v(s)|ds.$$

Wie oben ergibt sich dafür

$$\int_{-\infty}^t e^{2\alpha(t-s)}dsd^\alpha(u,v) \le \frac{1}{\alpha}d^\alpha(u,v).$$

Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned} d^\alpha(Tu,Tv) &\le ML(\eta)\max\{\|P^+\|,\|Q^+\|\}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)d^\alpha(u,v) \\ &< 2\frac{ML(\eta)}{\alpha}\max\{\|P^+\|,\|Q^+\|\}d^\alpha(u,v). \end{aligned}$$

Nach der Wahl von $L(\eta)$ ist damit

$$d^\alpha(Tu,Tv) \le \frac{1}{2}d^\alpha(u,v)$$

und T ist eine starke Kontraktion.

3.) Sei $Tu = u$. Wir müssen zeigen, daß u die Differentialgleichung löst, und das richtige Verhalten für $t \to -\infty$ zeigt. Letzteres ist aufgrund der Definition von C^α klar. Daß u die Differentialgleichung löst folgt aus der Invarianz der Unterräume und der Tatsache, daß man die Differentialgleichung in ein gekoppeltes System auf den Unterräumen äquivalent umschreiben kann. Wir rechnen nach $\dot u + \frac{d}{dt}(Tu)(t)$ und erhalten

$$\dot u = Ae^{P^+At}u_0+P^+g(u(t))+A\int_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+g(u(s))ds+Q^+g(u(t))+A\int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+g(u(s))ds.$$

Die rechte Seite ergibt

$$Ae^{P^+At}u_0+g(u(t))+A\left(\int_0^t e^{P^+A(t-s)}P^+g(u(s))ds+\int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)}Q^+g(u(s))ds\right) = Au(t)+g(u(t)).$$

□

<u>Bemerkung:</u> Die dritte Aussage, die wir im ersten Satz über Spektrum und Stabilität (im linearen Fall) gemacht haben, hat keine Übertragung auf die gegenwärtige Situation. Hat A Eigenwerte auf der imaginären Achse, so kann u_0 asymptotisch stabil, stabil aber nicht asymptotisch stabil oder auch instabil sein. Drei triviale Fälle, die dies erläutern, sind $\dot u = -u^3$, $\dot u = 0$ und schließlich $\dot u = u^2$. Im ersten Fall ist $u_0 = 0$ asymptotisch stabil, im zweiten stabil, aber nicht asymptotisch stabil, und im dritten Fall instabil.

Definition 6.1.10 *Sei $\dot{u} = f(u)$ wie im Satz und w_0 eine Ruhelage, so daß $A = Df(w_0)$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat, so nennt man die Ruhelage* hyperbolisch.

Eine Motivation für diesen Begriff, liefert das Phasenporträt der Gleichung $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$.

Beispiel 6.1.11 (Lorenz Gleichungen) *Wir betrachten das dreidimensionale System*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Dabei seien b, r, σ drei positive reelle Zahlen. Für Ruhelagen erhält man aus der ersten Gleichung $x = y$. Damit ergibt die zweite Gleichung $(r - 1 - z)x = 0$. Die Lösungen dieser Gleichungen sind $x = 0$ oder $z = 1 - r$. Mit der dritten Gleichung erhält man schließlich $x^2 = bz$. Damit ergibt sich als Lösung $x = y = z = 0$ oder

$$x = y, \; z = 1 - r, \; x = \pm\sqrt{b(r-1)}.$$

Damit erkennt man, daß die nichttriviale Lösung nur für $r > 1$ existiert. Für $r < 1$ hat man also nur die triviale Lösung $x = y = z = 0$, und für $r > 1$ hat man neben dieser trivialen Lösung noch zwei weitere Lösungen. Wir werden die Stabilität der trivialen Lösung ausrechnen. Als Linearisierung bei $x = y = z = 0$ ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Das Spektrum kann man leicht ausrechnen: Man hat einen Eigenwert $-b < 0$. Um die Vorzeichen der anderen beiden zu diskutieren, betrachten wir

$$\det A = \sigma(1-r) \; \textit{und} \; \mathrm{tr} A = -1 - \sigma < 0.$$

Also ist für $r < 1$ die triviale Ruhelage asymptotisch stabil. Bei $r = 1$, dort wo weitere Lösungen entstehen, verliert diese Lösung die Stabilität, sie wird instabil. Um die Stabilität der neuen Ruhelagen zu bekommen, geben wir zunächst die Linearisierung A von f in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) an:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Die charakteristische Gleichung für diese Eigenwerte lautet

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0.$$

Man rechnet nach, daß für

$$r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

alle Realteile für die nichttriviale Lösung negativ sind. Für $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ hat man die Stabilität für $1 < r < \frac{470}{19}$. Dort werden auch die nichttrivialen Lösungen instabil. Weitere interessante Phänomene treten auf.

Beispiel 6.1.12 *Ist w_0 eine Ruhelage einer autonomen Differentialgleichung und gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(w_0)$, so daß für jedes $u_0 \in B_\varepsilon(w_0)$ gilt $\omega(u_0) = w_0$, so folgt nicht, daß w_0 asymptotisch stabil ist. Man beachte, daß bei der Definition der asymptotischen Stabilität die Stabilität gefordert wurde. Ein Beispiel für dieses Phänomen liefert Aufgabe 3, Blatt 10. In Abbildung 6.1 sehen wir ein qualitatives Phasenportrait, das das beschriebene Phänomen illustriert.*

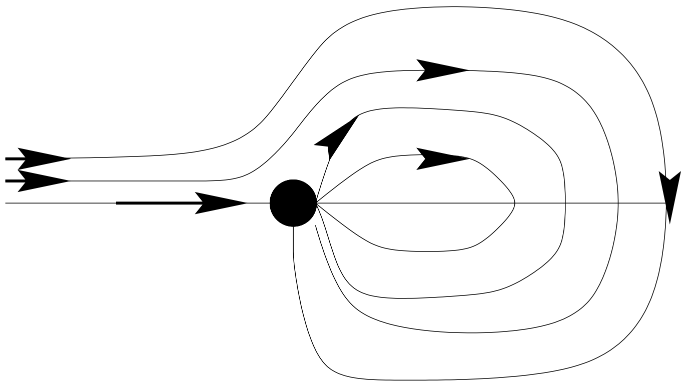

Abbildung 6.1: Ein Beispiel einer attraktiven Ruhelage, die nicht asymptotisch stabil ist. Typisch ist das Auftreten von homoklinen Orbits.

6.2 Die Stabilität einer periodischen Lösung

Sei wieder $\dot{u} = f(u)$ die autonome Differentialgleichung (5.1) mit einer Lipschitz stetigen rechten Seite. In diesem Abschnitt betrachten wir einen geschlossenen Orbit $\mathcal{O}$ für (5.1) und eine Lösung $u(t)$ in diesem Orbit. Wie im vorigen Abschnitt für eine Ruhelage wollen wir auch hier den Begriff der Stabilität definieren und Kriterien für verschiedene Formen der Stabilität angeben. Hier ist die Situation naturgemäß etwas komplizierter als im Fall einer Ruhelage.

Definition 6.2.1 *Der geschlossene Orbit $\mathcal{O}$ heißt* orbital stabil*, wenn $\mathcal{O}$ als Menge stabil im Sinne der Definition 5.1.21 ist. Er wird als* orbital asymptotisch stabil *bezeichnet, wenn er stabil und attraktiv im Sinne der Definition 5.1.22 ist. Man nennt u* orbital asymptotisch stabil mit asymptotischer Phase*, wenn $\mathcal{O}$ asymptotisch stabil ist und es eine Umgebung U von $\mathcal{O}$ gibt, so daß zu jedem Anfangswert $u_0 \in U$ eine Zahl $T(u_0)$ gibt, so daß*

$$\lim_{t\to\infty} |u(t - T(u_0)) - u(t, t_0)| = 0$$

ist.

Ein geometrischer Zugang zur Stabilitätstheorie periodischer Lösungen geht auf Poincaré zurück. Zunächst konstruiert man sich den sogenannten Poincaré Schnitt und die Poincaré Abbildung. Dabei geht man von der Beobachtung aus, daß jeder Punkt auf einem geschlossenem Orbit regulärer Punkt ist und somit eine Transversale existiert.

Lemma 6.2.2 *Sei L eine Transversale zum Lipschitz stetigen Vektorfeld f in einem Punkt u_0 auf einem geschlossenem Orbit $\mathcal{O}$. Dann gibt es eine Umgebung U_0 von u_0, so daß zu jedem*

Punkt $w \in U_0 \cap L$ ein $t_w > 0$ existiert, so daß $u(t_w, w) \in L$ ist, aber für $t \in (0, t_w)$ die Lösung $u(t) \notin L$ ist.

Beweis: Folgt sofort aus dem Satz über stetige Abhängigkeit von Anfangswerten. □

Definition 6.2.3 *Eine Transversale L, wie sie im vorherigen Lemma angegeben war, heißt Poincaré Schnitt. Die Abbildung $\Pi : L \cap U_0 \to L : w \mapsto u(t_w, w)$ nennt man* Poincaré Abbildung *oder auch* Wiederkehrabbildung, engl. return map.

Ein alternativer Beweis von Lemma 6.2.2 beruht auf dem Satz über implizite Funktionen, damit erhält man auch eine etwas stärkere Aussage.

Satz 6.2.4 *Ist $f \in C^1(U)$, so existiert eine Umgebung U_0 von u_0, so daß $\Pi : L \cap U_0 \to L$ stetig differenzierbar ist.*

Beweis: Folgt sofort aus dem Satz über implizite Funktionen: Man wähle eine affin lineare Transversale $u_0 + H$, so ist für jeden Punkt u nahe u_0 der affine Raum $u + H$ eine Transversale und man hat eine stetig differenzierbare Abbildung π einer Umgebung W nach $\mathcal{O}$ durch

$$u + H \ni w \mapsto u.$$

Wir betrachten für w nahe u_0 und t nahe t_{u_0} die Abbildung $Q(w, t) = \pi \circ \Phi(w, t)$, wobei Φ der zu f gehörende Fluß ist. Dann ist Q stetig differenzierbar, $Q(u_0, t_{u_0}) = u_0$ und

$$Q_t(u_0, t_{u_0}) = D_w \pi \circ \Phi_t(u_0, t_{u_0}) = D_w \pi f(u_0) \neq 0.$$

Damit garantiert der Satz über implizite Funktionen die lokale Lösbarkeit der angegebenen Gleichung und damit die Behauptung des Satzes. □

Die Poincaré Abbildung gibt uns ein einfaches geometrisches Kriterium für die Stabilität einer periodischen Lösung, das auch für theoretische Untersuchungen von Bedeutung ist.

Satz 6.2.5 *Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$, u_0 ein (regulärer) Punkt auf $\mathcal{O}$. Sei L ein Poincaré Schnitt mit Poincaré Abbildung Π. Dann gilt:*

1. *Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, daß $w \in L$ und $|w - u_0| < \delta$ implizieren, so daß die Iterierten $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind und gilt $|\Pi^n(w) - u_0| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathcal{O}$ orbital stabil.*

2. *Ist $\mathcal{O}$ orbital stabil und gibt es eine Umgebung U_1 von u_0, so daß aus $w \in U_1$ folgt, daß $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist und für $n \to \infty$ gegen u_0 konvergiert, so ist $\mathcal{O}$ orbital asymptotisch stabil.*

3. *Gibt es ein w, so daß $\Pi^{-n}(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren und gegen u_0 für $n \to -\infty$ konvergieren so ist $\mathcal{O}$ instabil.*

Beweis: Folgt offensichtlich aus der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten! Beachte, daß es eine Umgebung gibt, auf der die Rückkehrzeit durch $2t_{u_0} \geq t_w \geq \frac{1}{2}t_{u_0}$ nach oben bzw. unten beschränkt ist! □

Um ein eher algebraisches Kriterium zu erhalten, müssen wir uns noch einmal Gedanken über Übergangsmatrizen machen.

Definition 6.2.6 *Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig, in der ersten Komponente Lipschitz stetig mit $f(0,t) = 0$. Die Ruhelage $u = 0$ der Gleichung (2.2) nennt man* stabil, *wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so daß aus $|u_0| < \delta$ folgt, daß $|u(t, t_0, u_0)| < \varepsilon$ für alle $t > t_0$. Kann δ unabhängig von t_0 aus einer Menge S gewählt werden, so spricht man von* gleichmäßiger Stabilität bezüglich S. *Entsprechend definiert man* asymptotisch stabil, *wenn es ein $\delta_1(t_0) > 0$ gibt, so daß aus $|u_0| < \delta_1(t_0)$ folgt $u(t, t_0, u_0) \to 0$. Man nennt u_0* instabil, *wenn es nicht stabil ist. Bei der Definition gleichmäßiger asymptotischer Stabilität (bezüglich S) verlangt man, daß 0 stabil und asymptotisch stabil ist und die Zahl $\delta_1 = \delta_1(t_0)$ unabhängig von $t_0 \in S$ gewählt werden kann und schließlich zu jeder positiven Zahl $\eta > 0$ eine Zeit $T(\eta)$ gefunden werden kann, so daß $|u(t + T(\eta), t_0, u_0)| < \eta$ ist, solange nur $|u_0| < \delta_1$ ist. Man überträgt diese Begriffe auf beliebige Lösungen, indem man für eine Lösung $u(t)$ das System $\dot{y} = f(u(t) + y, t)) - f(u(t), t)$ betrachtet.*

Lemma 6.2.7 *Jede Lösung von $\dot{u} = A(t)u$ hat die gleichen Stabilitätseigenschaften.*

Beweis: Folgt aus der Linearität. □

Bemerkung: Aus diesem Grunde sagt man auch, das System (3.12) $\dot{u} = A(t)u$ ist stabil, asymptotisch stabil oder instabil.

Satz 6.2.8 *Sei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig. Sei $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix für $\dot{u} = A(t)u$ und β sei eine beliebige reelle Zahl. Dann ist das System $\dot{u} = A(t)u$*

1. *stabil, genau dann wenn es zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Konstante $K(t_0)$ gibt mit $\|\Phi(t)\| \leq K(t_0)$ für alle $t \geq t_0$,*

2. *gleichmäßig stabil für $t_0 \geq \beta$, genau dann wenn es eine Konstante $K(\beta)$ gibt, so daß für $t_0 \geq \beta$ und $t_0 \leq s \leq t$ gilt*
$$\|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \leq K(\beta),$$

3. *asymptotisch stabil genau dann, wenn*
$$\|\Phi(t)\| \to 0 \text{ für } t \to \infty.$$

4. *gleichmäßig asymptotisch stabil für $t_0 \geq \beta$ genau dann, wenn es Konstanten $K = K(\beta) > 0$, $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ gibt mit*
$$\|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \text{ für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Beweis: 1.) Die Rückrichtung folgt einfach aus der Darstellung der Lösung: Sei $u(t)$ eine Lösung, so ist $u(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}u(t_0)$. Sei $M = |\Phi(t_0)^{-1}|$. Dann ist $|u(t)| \leq K(t_0)M\ |u(t_0)|$. Wählt man $\delta = \frac{\varepsilon}{K(t_0)M}$, so hat man die Stabilitätsbedingung erfüllt. Die Hinrichtung ist auch nahezu offensichtlich. Stabilität besagt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $|u_0| < \delta$ die Norm $|\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}u_0| < \varepsilon$ beschränkt bleibt. Angenommen es gäbe Folgen u_ν, t_ν, so daß

$$\Phi(t_\nu)u_\nu \to_{\nu\to\infty} \infty$$

konvergiert. Dann hat $\tilde{u}_\nu = \frac{1}{2}\delta\frac{1}{|\Phi(t_0)u_\nu}|\Phi(t_0)u_\nu$ die Norm $\frac{\delta}{2}$ und $|\Phi(t_\nu)\Phi(t_0)^{-1}\tilde{u}_\nu| \geq \varepsilon$ für genügend großes ν.

2.) Beide Richtungen können wie im ersten Teil durchgeführt werden, hier hängt δ für $t_0 \geq \beta$ nicht von t_0 ab.

3.) Als erstes folgt aus der Abklingbedingung die Beschränktheit von $\|\Phi(t)\|$ und damit die Stabilität. Die Asymptotik erhält man wie im ersten Beweisschritt. Die Umkehrung folgt auch wie oben.

4.) Ist die angegebene Bedingung erfüllt, so konvergiert $\|\Phi(t)\| \to 0$ für $t \to \infty$ und aus 2.) folgt die Stabilität. Aus dem dritten Schritt erhält man die asymptotische Stabilität. Sei $|u(t_0)| \leq 1$ und $\eta \in (0, K)$. Setze

$$T = -\frac{\log(\eta/K)}{\alpha}.$$

Dann ist für $t \geq t_0 + T$, $t' = t - (T + t_0) > 0$

$$|u(t)| = |\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}u(t_0)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|u(t_0)| = Ke^{-\alpha T}e^{-\alpha t'}|u(t_0)| < Ke^{-\alpha T} = \eta.$$

Hier ist die Umkehrung schwieriger. Wir nehmen also an, daß die Nulllösung gleichmäßig asymptotisch stabil für $t_0 \geq \beta$ ist. Insbesondere existiert ein $b > 0$, so daß zu jedem $\eta < b$ ein $T = T(\eta)$ existiert mit

$$|\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}u(t_0)| \leq \eta, \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 > \beta, \quad |u(t_0)| < b.$$

Daher ist

$$\|\Phi(t+T)\Phi(t_0)^{-1}\| < \frac{\eta}{b} < 1 \quad \text{für } t \geq \beta.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stabilität existiert ein $M = M(\beta)$ mit

$$\|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\| \leq M, \quad \text{für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Setze

$$\alpha = -T^{-1}\log(\frac{\eta}{b})$$

und

$$K = Me^{\alpha T}.$$

Dann gibt es zu jedem $t \geq t_0$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $kT \leq t - t_0 < (k+1)T$. Daher gilt dann

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\| &= \|\Phi(t)\Phi(t_0+kT)^{-1}\Phi(t_0+kT)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq \|\Phi(t)\Phi(t_0+kT)^{-1}\|\,\|\Phi(t_0+kT)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq M\,\|\Phi(t_0+Tk)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq M\,\|\Phi(t_0+Tk)\Phi(t_0+(k-1)T)^{-1}\Phi(t_0+(k-1)T)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\leq M\,\frac{\eta}{b}\|\Phi(t_0+(k-1)T)\Phi(t_0)^{-1}\| \\
&\vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M(\frac{\eta}{b})^k \\
&\leq Me^{-\alpha kT} \\
&= Ke^{-\alpha(k+1)T} \\
&\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}
\end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Beweis. □

Wir betrachten nun die homogene, lineare Gleichung

$$\dot{u} = A(t)u \tag{6.8}$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\exists T > 0 \text{ mit } A(t+T) = A(t) \ \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ oder $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ eine stetige Abbildung ist. Der Zusammenhang mit periodischen Lösungen wird in kürze klar werden.

Lemma 6.2.9 *Zu jeder komplexen $n \times n$ Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $\det A \neq 0$ gibt es eine Matrix $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $e^B = E(B, 1) = A$.*

Beweis: Ist $e^B = A$, so gilt für jede nichtsinguläre Matrix C

$$e^{C^{-1}BC} = C^{-1}AC.$$

Daher ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß A in Jordan'scher Normalform gegeben ist. Also hat A die Gestalt (3.2) mit Jordan Blöcken der Form (3.3). Jeden Block der Form (3.3) schreiben wir in der Gestalt

$$\mathcal{B}_k = \lambda_k \mathbb{1} + N_k,$$

wobei N_k der nilpotente Anteil ist. Aufgrund der Annahme, daß die Determinante von A von Null verschieden ist, ist auch $\lambda_k \neq 0$. Wir geben nun eine Matrix B_k an, so daß $e^{B_k} = \mathcal{B}_k$ ist. Wir schreiben $\mathcal{B}_k$ in der Form $\mathcal{B}_k = \lambda_k(\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda_k}N_k)$. Dann ist $B_k = (\log \lambda_k)\mathbb{1} + S_k$ mit

$$S_k = -\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j\lambda^j} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}^j.$$

Einsetzen in die Potenzreihe gibt das gewünschte Resultat. □

Bemerkung 6.2.10 *Man beachte, daß Lemma 6.2.9 nicht für $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\det A \neq 0$ gilt.*

Satz 6.2.11 (Floquet) *Sei* $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *stetig und* T*-periodisch. Jede Fundamentalmatrix der Gleichung* $\dot{u} = A(t)u$ *hat die Form*

$$\Phi(t) = P(t)E(B,t),$$

wobei B *eine konstante und* P *eine* T*-periodische Matrix ist.*

Beweis: Ist $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix, so ist $\Phi(t+T)$ auch eine Fundamentalmatrix. Daher gibt es eine nichtsinguläre Matrix C, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C$$

gilt. C hat dann aufgrund der Flußeigenschaft die Darstellung $C = \Phi(T)$. Nach Lemma 6.2.9 gibt es eine Matrix B mit $e^{TB} = C$. Setze

$$P(t) = \Phi(t)E(B,-t).$$

Dann hat man

$$P(t+T) = \Phi(t+T)E(B,-(t+T)) = \Phi(t)E(B,T)E(B,-(t+T)) = P(t).$$

$\square$

Korollar 6.2.12 *[Transformation auf konstante Koeffizienten]*
Zu T*-periodischem* $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *gibt es eine nichtsinguläre periodische Koordinatentransformation* $P : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$*, welche die Gleichung* $\dot{u} = A(t)u$ *in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten überführt.*

Beweis: Seien P, B wie im Satz 6.2.11. Wir setzen $w = P(t)u$. Die Differentialgleichung für w ist dann

$$\dot{w} = P(t)^{-1}(A(t)P(t) - \dot{P}(t))w.$$

Da $P(t) = X(t)E(B,-t)$ ist, hat man $\dot{P} = A(t)P(t) - P(t)B$. Einsetzen gibt

$$\dot{w} = P(t)^{-1}(A(t)P(t) - A(t)P(t) + P(t)B) = Bw.$$

Die rechte Seite hängt nicht von t ab. $\square$

Definition 6.2.13 *Gegeben sei das homogene, lineare System (3.12)* $\dot{u} = A(t)u$ *mit* T*-periodischem* $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$*. Dann heißt eine Matrix* C*, die für eine Fundamentalmatrix* $\Phi(t)$ *des angegebenen Systems der Beziehung*

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C$$

genügt eine Monodromiematrix *von (3.12). Die Eigenwerte* ρ_j *einer Monodromiematrix heißen* charakteristische Multiplikatoren *von (3.12). Ist* ρ *ein charakteristischer Multiplikator und* $\rho = e^{\lambda T}$*, so wird* λ *als* charakteristischer Exponent *bezeichnet.*

Bemerkung: Die charakteristischen Exponenten sind nicht eindeutig bestimmt, die Multiplikatoren jedoch schon. Die charakteristischen Multiplikatoren hängen nicht von der gewählten Fundamentalmatrix ab. Charakteristische Exponenten werden auch oft als Floquet[2] Multiplikatoren bzw. Floquet Exponenten bezeichnet.

Lemma 6.2.14 *Eine komplexe Zahl λ ist charakteristischer Exponent der Gleichung (3.12) mit einer T-periodischen rechten Seite A, falls das System (3.12) eine nichttriviale Lösung $p(t)e^{\lambda t}$ besitzt, wobei p periodisch mit Periode T ist. Speziell gibt es genau dann eine nichttriviale Lösung $u(t)$ mit Periode T (bzw. $2T$), wenn es den Multiplikator 1 (bzw. -1) gibt.*

Beweis: Sei $e^{\lambda t}p(t)$ eine solche Lösung. Dann gibt es ein u_0 und eine Fundamentalmatrix $X(t)$ mit $e^{\lambda t}p(t) = X(t)u_0$. Nach dem Satz von Floquet 6.2.11 kann $X(t)$ in der Form $P(t)E(B,t)$ geschrieben werden. Also ist $e^{\lambda t}p(t) = P(t)E(B,t)u_0$. Da $P(t+T) = P(t)$ und $p(t+T) = p(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, hat man

$$e^{\lambda(t+T)}p(t+T) = P(t+T)E(B,t+T)u_0,$$

und daher ist

$$e^{\lambda t}e^{\lambda T}p(t) = P(t)E(B,t)E(B,T)u_0.$$

Also gilt

$$e^{\lambda T}P(t)E(B,t)u_0 = P(t)E(B,t)E(B,T)u_0.$$

Zusammen genommen ist

$$P(t)E(B,t)\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\right)u_0 = 0.$$

Daher ist $\det\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\mathbb{1}\right) = 0$. Für die Umkehrung beachtet man einfach, daß aus dem Verschwinden von $\det\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\right)$ die Existenz eines Vektors u_0 folgt mit

$$\left(E(B,T) - e^{\lambda T}\right)u_0 = 0.$$

Man kann sogar λ und u_0 so wählen, daß λ Eigenwert von B ist. Dann ist

$$E(B,t)u_0 = e^{\lambda t}u_0,$$

und $P(t)E(B,t)u_0$ ist die gewünschte Lösung. □

Lemma 6.2.15 *Seien $\rho_j = e^{\lambda_j T}$ die charakteristischen Multiplikatoren. Dann ist*

$$\prod_{j=1}^{n}\rho_j = \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s)ds\right)$$

und

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{tr} A(s)ds \mod \left(\frac{2\pi i}{T}\right).$$

[2]Gaston Floquet (1847-1920)

Beweis: Sei $X(t)$ die Fundamentalmatrix mit Anfangswert $X(0) = \mathbb{1}$. Dann ist

$$\det C = \det X(T) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s)ds\right).$$

Daraus folgt alles weitere. □

Als Hauptsatz über lineare periodische Systeme ergibt sich

Satz 6.2.16 *(a) Das lineare, homogene periodische System $\dot{u} = A(t)u$ ist genau dann stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren betragsmäßig kleiner oder gleich eins sind und die, die dem Betrage nach eins sind, gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen.*
(b) Das System ist genau dann gleichmäßig asymptotisch stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren dem Betrage nach kleiner eins sind. In diesem Fall kann man eine Fundamentalmatrix abschätzen:

$$\exists K > 0, \alpha < 0 \text{ mit } t - s \geq 0 \Longrightarrow \|X(t)X(s)^{-1}\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}.$$

Beweis: Benutzt im wesentlichen die Ideen wie im autonomen Fall. □

Als Stabilitätskriterium für geschlossene Orbits erhält man schließlich den

Satz 6.2.17 *Sei $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der autonomen Gleichung $\dot{u} = f(u)$, wobei die rechte Seite als genügend glatt vorausgesetzt werde. Dann ist $\mathcal{O}$ genau dann orbital stabil, wenn das lineare homogene periodische System*

$$\dot{y} = Df(u(t))y, \tag{6.9}$$

stabil ist, wobei $u(t)$ eine Lösung im Orbit $\mathcal{O}$ ist.

Ohne vollständigen Beweis wollen wir noch ein Kriterium für orbital asymptotische Stabilität angeben.

Satz 6.2.18 *$\mathcal{O}$ ist genau dann orbital asymptotisch stabil, wenn (6.9) stabil ist,* 1 *charakteristischer Multiplikator mit algebraischer Vielfachheit 1 ist und alle von 1 verschiedenen charakteristischen Multiplikatoren dem Betrage nach kleiner als 1 sind.*

Beweisskizze:

1. Die Eigenwerte von $D_u\Pi(u_0)$ sind gerade die charakteristischen Multiplikatoren, wobei die Vielfachheit von 1 um eins verringert ist.

2. Man benötigt das dem Satz 6.1.4 vom Spektrum und Stabilität II entsprechende Stabilitätskriterium für Abbildungen, dies wiederum entspricht der Aussage von Satz 6.1.4, nur ist jeweils Reλ <=> 0 durch $|\lambda|$ <=> 1 zu ersetzen.

□

6.3 Ljapunov Funktionen

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Bestimmung der Stabilität von Lösungen sind sogenannte Ljapunov-Funktionen. Sie verallgemeinern erste Integrale.

Definition 6.3.1 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige Funktion. Eine Funktion $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* erstes Integral, *falls w längs Lösungen der Gleichung $\dot{u} = f(u,t)$ konstant bleibt.*

Kennt man eine hinreichende Zahl von (linear unabhängigen) ersten Integralen, so kann man die Differentialgleichung als gelöst ansehen. Eine wichtige Klasse von Systemen mit erstem Integral sind Hamilton'sche Systeme. Die Hamilton-Funktion H ist bereits das erste Integral.

Definition 6.3.2 *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, f Lipschitz stetig auf U. Wir betrachten die Gleichung $\dot{u} = f(u)$. Sei $W \subset U$ offen. Eine Funktion $V : C^0(W, \mathbb{R})$ heißt* Ljapunov Funktion *auf W zu $\dot{u} = f(u)$, falls alle partiellen Ableitungen von V existieren und für alle $w \in W$ gilt*

$$\langle \nabla V(w), f(w) \rangle \leq 0.$$

Eine unmittelbare Konsequenz dieser Forderung ist, daß für alle $w \in W$ gilt

$$\frac{d}{dt} V(u(t, u_0))_{|t=0} \leq 0.$$

Ist $W = U$, so gilt für jede Lösung $\frac{d}{dt} V(u(t)) \leq 0$.

Satz 6.3.3 *Wir betrachten $\dot{u} = f(u)$ mit Ruhelage $u = 0$. Gibt es eine Umgebung W von 0 und eine Ljapunov-Funktion V auf W mit $V \geq 0$ und $V(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, so ist u stabil. Ist $\dot{V}(u)_{|t=0} < 0$ für $u > 0$, so ist 0 asymptotisch stabil.*

Beweis: Wir beweisen zunächst die Stabilitätsaussage. Zu zeigen ist also, daß zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so daß aus $|u_0| < \delta$ folgt, daß das maximale Existenzintervall vorwärts unbeschränkt ist und für alle $t \geq 0$ gilt $|u(t, u_0)| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und $\varepsilon > \eta > 0$ gegeben. Es existiert eine Umgebung $B_\tau(0)$ mit

$$V(B_\tau(0)) \subset [0, \eta).$$

Sei

$$\mu = \inf \{ V(x) \mid |x| = \tau \}$$

und $r < \mu$. Dann ist die Zusammenhangskomponente von $V^{-1}[0, r)$ in $B_\tau(0)$ enthalten. Ist nun $\delta < \tau$, so ist für $u_0 \in B_\delta(0)$ die Lösung auf ihrem maximalen Existenzintervall in $B_\varepsilon(0)$ enthalten. Damit ist dieses Existenzintervall unbeschränkt und die Aussage gezeigt. Um zu zeigen, daß die eben gemachte Aussage gilt, wollen wir $V(t) = V(u(t, u_0))$ betrachten. Es gilt $V(0) = V(u_0) < r < \mu$. Angenommen, es gibt ein t_0 mit $V(t_0) = \varepsilon$, dann gibt es ein $0 < t_1 < t_0$ mit $V(t_1) = \mu$. Wegen $\dot{V} \leq 0$ und $V(t_1) = \mu < \varepsilon = V(t_0)$ erhalten wir einen Widerspruch.

Im zweiten Fall müssen wir noch zeigen $u(t, u_0) \to 0$ für $t \to \infty$. Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann ist klar, $V(t)$ ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent.

Angenommen $\lim_{t\to\infty} V(t) = c > 0$. Dann ist $\omega(u_0)$ nichtleer und $0 \notin \omega(u_0)$. Dann ist V konstant auf $\omega(u_0)$. Enthält $\omega(u_0)$ einen regulären Punkt, ist dort aber $\dot{V} < 0$. Also enthält $\omega(u_0)$ keinen regulären Punkt, sei x ein kritischer Punkt in $\omega(u_0)$. Aber auch dann $\dot{V}(t) = \nabla V \cdot \dot{x} = 0$ und damit $x = 0$.

□

Nebenbei haben wir noch gezeigt:

Korollar 6.3.4 *Unter den Voraussetzungen von Teil (a) des letzten Satzes gilt: Sei R die Menge $\dot{V} = 0$ und M die größte invariante Menge in R, so ist für jedes u_0 die Grenzmenge $\omega(u_0) \subset M$.*

Der Beweis des Satzes 5.4.1 liefert auch eine Aussage über Gradientensysteme.

Korollar 6.3.5 *Unter den Voraussetzungen von Teil (a) des letzten Satzes gilt: V ist auf Grenzmengen $\omega(u_0)$, $\alpha(u_0)$ konstant.*

Ohne Beweis wollen wir die sogenannten Umkehrsätze angeben.

Satz 6.3.6 (Umkehrsatz) *Die Existenz einer Ljapunov-Funktion mit den im Satz 6.3.3 angegebenen Eigenschaften ist notwendig für Stabilität bzw. asymptotische Stabilität einer Ruhelage.*

Beispiel 6.3.7

1. *Wir betrachten $\ddot{x} + g(x) = 0$, mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(0) = 0$. Das System ist äquivalent zu*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x). \end{aligned}$$

Setze

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds$$

und

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} + G(x).$$

Dann ist $\dot{V} = 0$ und die Ruhelage $(x,y) = 0$ stabil, falls $xg(x) > 0$.

2. *Für die entsprechende Gleichung mit Dämpfung findet man asymptotische Stabilität.*

6.4 Stabilitätsverlust und Verzweigungen

In diesem Abschnitt betrachten wir parameterabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen und wollen untersuchen, wie sich Stabilitätsverlust auswirkt. Im ersten Unterabschnitt wollen wir annehmen, daß der Stabilitätsverlust einer Ruhelage durch die Bewegung eines reellen Eigenwertes über die imaginäre Achse zustande kommt. Im zweiten Abschnitt wollen wir ein vergleichbares Szenario für ein paar konjugiert komplexer Eigenwerte betrachten. Schließlich betrachten wir noch einfache Verzweigungen bei Familien von periodischen Lösungen.

6.4.1 Stationäre Verzweigungen

Sei

$$\dot{u} = f(u, \lambda)$$

eine autonome, parameterabhängige Differentialgleichung auf $W \subset \mathbb{R}^n$ mit einer Kurve $(u(s), \lambda(s))$ von Ruhelagen, d.h. $f(u(s), \lambda(s)) = 0$. Sei $A(s) = D_u f(u(s), \lambda(s))$. Bezüglich des Spektrums von $A(s)$ wollen wir voraussetzen:

1. $\ker A(0) \neq 0$.

2. der Eigenwert 0 von $A(0)$ ist geometrisch einfach und

3. es gibt eine Fortsetzung des Eigenwertes 0, d.h. es existiert eine Kurve $\sigma(\lambda(s))$ mit $\sigma(\lambda_0) = 0$ mit $\sigma'(\lambda_0)\lambda'(0) \neq 0$.

Um Struktur und parameterabhängige Veränderungen der Lösungsmenge von $f(u, \lambda) = 0$ aufklären zu können, schreiben wir die Gleichung um unter Ausnutzung von Eigenschaften der Matrix $A = A(0)$. Sei R der Bildraum von A und $K = \ker A$. Sei $Q_1 : \mathbb{R}^n \to K$ ein Projektor und Q_2 ein komplementärer Projektor, d.h $Q_1 + Q_2 = \mathbb{1}$. Ebenso wählen wir einen Projektor $P_1 : \mathbb{R}^n \to R$ und P_2 einen komplementären Projektor. Wir setzen für $u \in \mathbb{R}^n$

$$v = Q_1 u \text{ und } w = Q_2 u.$$

Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} P_1 f(v + w, \lambda) &= 0 \\ P_2 f(v + w, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Ferner setzen wir $W = Q_2 \mathbb{R}^n$, $V = P_2 \mathbb{R}^n$ und beachten, daß damit das Gleichungssystem als Abbildung $F = K \times W \times \mathbb{R} \to R \oplus V$ geschrieben wird, mit $F = (F_1, F_2), F_j = P_j f$.

Wir berechnen die Ableitung $D_w F_1(v, w, \lambda)$ bei $(v, w, \lambda) = (0, 0, 0)$:

$$D_w F_1(v, w, \lambda) = D_w P_1 F(Q_1 u + Q_2 u, \lambda) = P_1 D_w f(Q_2 u, \lambda) Q_2 = P_1 A Q_2.$$

Diese Matrix hat vollen Rang und mit dem Satz über implizite Funktionen (Dieudonne [7]) folgt, daß man lokal, d.h. in einer Umgebung, eine Auflösung der Gleichung $F_1(v, w, \lambda) = 0$ in der Form

$$w = w(v, \lambda)$$

finden kann. Wir setzen dies in die Gleichung $F_2 = 0$ ein und erhalten die sogenannte Verzweigungsgleichung

$$F_2(v, w(v, \lambda), \lambda) = 0.$$

Das bisher beschriebene Verfahren zur Reduktion des Problems auf eine Verzweigungsgleichung wird nach den beiden Mathematikern Ljapunov und E. Schmidt[3] als Ljapunov-Schmidt-Verfahren bezeichnet.

[3] Erhard Schmidt (13.1.1876-6.12.1959) war Schüler von Hilbert. Er ist vor allem wegen des nach ihm benannten Orthogonalisierungsverfahren bekannt. Er arbeitete über Integralgleichungen und brachte die Funktionalanalysis vorwärts. In drei Arbeiten aus den Jahren 1906-1908 tauchte das hier vorgestellte Verfahren zur Untersuchung der Verzweigungen bei Integralgleichungen auf.

Sattel-Knoten-Verzweigung

Die Begriffsbildung kommt von folgendem Bild 6.2,

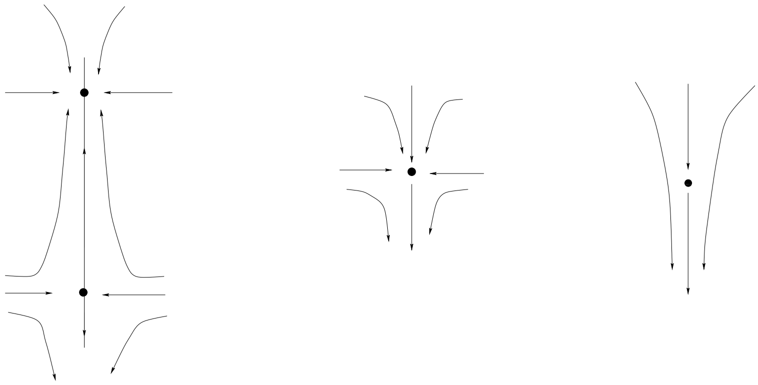

Abbildung 6.2: Schematische Darstellung einer Sattel-Knoten-Verzweigung

die zugehörige Differentialgleichung hat folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda + x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

In diesem System finden wir für $\lambda < 0$ einen Sattel und einen Knoten, die sich bei $\lambda = 0$ auslöschen. Dieses Beispiel mag als Grundlage für die nachfolgenden abstrakteren Betrachtungen dienen.

Es sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ein parametrisiertes Vektorfeld mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ \ker D_x f(0,0) &\neq \{0\} \\ R(D_x f(0,0)) \oplus D_\lambda f(0,0)1 &= \mathbb{R}^n \\ \langle D_{xx} f x_0, x_0 \rangle &\notin R(D_x f(0,0)), \end{aligned}$$

wobei x_0 den Kern von $D_x f(0,0)$ aufspannt. Dann ist $Df(0,0)$ surjektiv, also $f^{-1}(0)$ eine eindimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Sei $(x(s), \lambda(s))$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist $f(x(s), \lambda(s)) = 0$ und natürlich auch $\frac{d^j}{ds^j} f(x(s), \lambda(s)) = 0$. Für $j = 1$ ergibt sich

$$D_x f(0,0)\dot{x} + D_\lambda f(0,0)\dot{\lambda} = 0.$$

Da $D_\lambda f(0,0)\dot{\lambda} \in \ker D_x f(0,0)$, ist $D_x f(0,0)x \neq 0$, also $\dot{\lambda} = 0$ und $\dot{x} = \alpha x_0$. Für $j = 2$ ergibt sich

$$f_{xx}\dot{x}^2 + f_x \ddot{x} + D_{\lambda x} f \dot{x}\dot{\lambda} + f_\lambda \ddot{\lambda} = 0.$$

Es folgt aus den Annahmen $\ddot{\lambda} \neq 0$. Insbesondere haben wir die wesentlichen Eigenschaften einer Sattel-Knoten Verzweigung.

Transkritische und Pitchfork-Verzweigungen

Führt die Verzweigungsgleichung von Ljapunov-Schmidt auf eine Gleichung der Form

$$\lambda x \pm x^2 = 0, \tag{6.10}$$

spricht man von einer transkritischen Verzweigung, das Bild entspricht der Abbildung 6.3.

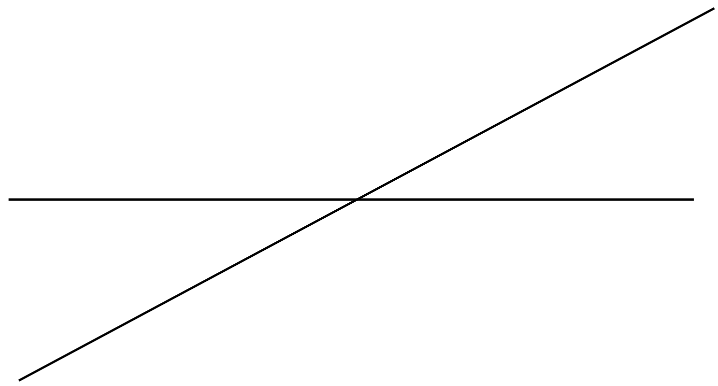

Abbildung 6.3: Schematische Darstellung einer transkritischen Verzweigung

Natürlich ist die Gleichung (6.10) nur ein Beispiel einer Gleichung, die auf eine transkritische Verzweigung führt, weitere Beispiele gehen einfach durch Koordinatentransformationen aus (6.10) hervor. Solche Koordinatentransformationen sind Grundlage einer *Klassifikation* von Verzweigungsdiagrammen. Jede Klasse von Koordinatentransformationen definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge (von Keimen) von C^∞-Abbildungen. Sucht man sich einen einfachen Repräsentanten aus jeder Klasse spricht man von Normalformen (bezüglich der gewählten Äquivalenzklasse). Eine tiefere Darstellung der damit verbundenen Theorien und auch die Erfolge bei der Anwendung in außermathematischen Bereichen findet man in dem Buch von Golubitsky & Schaeffer bzw. Golubitsky, Stewart & Schaeffer [9, 10]. Führt jedoch die Verzweigungsgleichung von Ljapunov-Schmidt auf eine Gleichung der Form

$$\lambda x + x^3 = 0, \tag{6.11}$$

spricht man von einer Pitchfork-Verzweigung, das Bild entspricht der Abbildung 6.4.

Dies ist das klassische Verzweigungsdiagramm, das wohl der ganzen Theorie den Namen gegeben hat. Wir wollen nun ohne Beweis noch ein paar Anmerkungen zur Klassifikation machen. Hat man eine gegebene Verzweigungsgleichung und sind alle Verzweigungsgleichungen, die bezüglich einer gegebenen Topologie in der Nähe liegen, bezüglich der gewählten Äquivalenzrelation äquivalent, so spricht man von stabilen Verzweigungsdiagrammen. Gibt es jedoch verschiedene Normalformen in der Nähe, und werden diese durch Variation von n reellen Parametern beschrieben, so sagt man das vorgelegte Problem habe Kodimension n. Die Bestimmung der Kodimension und die Berechnung der Normalformen ist ein *algebraisches Problem*, dessen Lösung unmittelbare Konsequenzen für viele Anwendungen hat. Es stellt sich heraus, daß bezüglich wichtiger Äquivalenzrelationen die Pitchfork-Verzweigung die Kodimension 2 hat, die transkritische Verzweigung die Kodimension 1 hat und nur die Sattel-Knoten-Verzweigung stabil ist. Dies rechtfertigt, trotz der historischen Bedeutung, die etwas stiefmütterliche Behandlung der beiden zuerst genannten Verzweigungstypen.

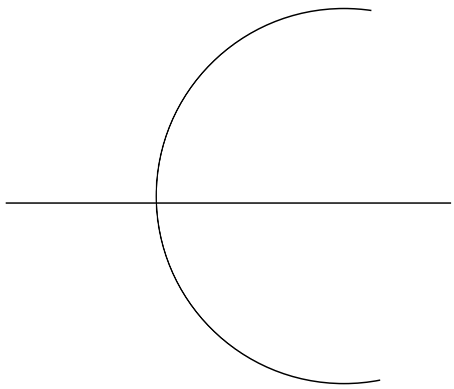

Abbildung 6.4: Schematische Darstellung einer sogenannten Pitchfork-Verzweigung.

Satz 6.4.1 (Crandall-Rabinowitz, 1971) [4] *Sie $\dot{u} = f(u, \lambda)$ eine gewöhnliche, parameterabhängige Differentialgleichung mit $f(0, \lambda) = 0$, $A(\lambda) = D_u f(0, \lambda)$ und $A(0)$ habe einen algebraisch einfachen Eigenwert null, τ sei eine Fortsetzung dieses Eigenwertes, d.h. $\tau(0) = 0$ und $\tau(\lambda)$ ist Eigenwert von $A(\lambda)$ (für λ nahe null). Dann enthält jede Umgebung U von $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ nichttriviale Lösungen von $f(u, \lambda) = 0$.*

Beweis: Wir müssen uns überlegen, daß das Reduktionsverfahren von Ljapunov-Schmidt auf eine Gleichung der Form

$$x\lambda + O(|x|) = 0$$

führt (zumindest bis auf Terme höherer Ordnung). Nach dem Satz über implizite Funktionen hat die Gleichung, nach Division durch x, eine Lösung der Form $\lambda = \lambda(x)$. Dann handelt es sich auf jeden Fall um nichttriviale Lösungen. □

6.4.2 Hopf Verzweigung

Dies ist neben der Sattel-Knoten Verzweigung der einzige stabile Verzweigungstyp, bezüglich üblicher Äquivalenzbegriffe. Hier fragt man nach dem Entstehen kleiner periodischer Lösungen durch den Übergang von einer stabilen Ruhelage zu einer instabilen Ruhelage. Die Entdeckung dieses Phänomens geht auf den Mathematiker Eberhard Hopf[5] zurück.

Satz 6.4.2 (E. Hopf, 1943) *Sei $\dot{u} = f(u, \lambda)$ eine gewöhnliche, parameterabhängige Differentialgleichung mit $f(0, \lambda) = 0$. Wie zuvor sei $A(\lambda) = D_u f(0, \lambda)$ die Linearisierung bei 0. Wir setzen voraus, $A = A(0)$ habe einen einfachen Eigenwert $\pm i$, keine Eigenwerte der Form ni, $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $\tau(\lambda) = \alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ eine Fortsetzung des Eigenwertes i mit $\alpha'(0) \neq 0$. Dann gibt es in jeder Umgebung von $(0, 0)$ geschlossene Orbits der angegebenen Differentialgleichung.*

[4] Michael Crandall, Paul Rabinowitz: in den USA lebende und lehrende Mathematiker. Sie zählen zu den führenden Analytikern der Gegenwart. Paul Rabinowitz beschäftigt sich insbesondere mit topologischen Methoden in der Theorie Hamilton'scher Systeme und Variationsrechnung.

[5] Eberhard Hopf (17.4.1902-24.7.1983), Bruder des Topologen Heinz Hopf, wirkte vor allem in der Ergodentheorie und auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen. Neben der nach ihm benannten Verzweigung trägt noch ein wichtiges Lemma in der Theorie der Maximumprinzipien seien Namen.

Beweis: Den vollständigen Beweis wollen wir nur im $\mathbb{R}^2$ führen, einige Überlegungen gelten aber immer, dies wollen wir in voller Allgemeinheit angeben. Allerdings ist in unserem Beweis die Hauptidee „zweidimensional". Ein Beweis des Satzes in voller Allgemeinheit bedarf entweder etwas (nichtlinearer) Funktionalanalysis oder eines wichtigen Satz aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, dem sogenannten Zentrumsmannigfaltigkeitssatz, der Anfang der sechziger Jahre vom amerikanischen Mathematiker A. Kelley bewiesen worden war. Zunächst beachten wir, daß es eine Umgebung W von $(0,0)$ gibt, die keine nichttrivialen Ruhelagen enthält. Dies folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, da null nicht Eigenwert von A ist.

Im zweidimensionalen Raum ist der Beweis erbracht, wenn wir zeigen, daß jede Umgebung vollständige Trajektorien beinhaltet. Denn dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Poincaré-Bendixson.

Wir halten den Parameterwert $\lambda = 0$ fest und zeigen, daß hinreichend nahe bei *null* zu einer Transversale die Poincaré-Abbildung definiert ist. Wir betrachten die Differentialgleichung in Polarkoordinaten, der lineare Anteil hat die Form

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned}$$

Die nichtlinearen Terme führen auf eine allgemeine Form

$$\begin{aligned} \dot{r} &= o(r^2) \\ \dot{\varphi} &= 1 + o(r). \end{aligned}$$

Als Transversale wählen wir die x-Achse. Als Anfangswert wählen wir den Punkt mit dem Abstand $0 < r_0 < \frac{\delta}{2}$. Ist δ hinreichend klein, so gibt es eine Zeit $t_1 > 0$ mit $r(t, r_0) < \delta$ für $0 \leq t \leq t_1$ und $\varphi(t_1, 0) = 2\pi$. Solange $r < \delta$ ist $\dot{\varphi} \geq 1 - \delta$ und $\varphi(t) = t(1-\delta)$. Es gibt Zahlen $a,\ b$ mit $\dot{r} < ar^2$, $\dot{\varphi} > 1 - b\delta$. Wähle $\delta > 0$ mit

$$\delta < \min\left\{\frac{1}{10b}, \frac{5b}{a}\right\}.$$

Nun ist $\varphi(t) \geq (1 - b\delta)t$. Also existiert ein $t_1 < \frac{2\pi}{1-b\delta}$, so daß $\varphi(t_1) = 2\pi$. Solange $t < \frac{1}{2a\delta}$ ist, bleibt $r(t, r_0) \leq \delta$. Mit der angegebenen Wahl von δ werden beide Wahlmöglichkeiten erfüllt.

Sei $r_1 = r(t_1, r_0)$. O.B.d.A. ist $r_1 < r_0$. Das Gebiet, das von dem Intervall $[r_1, r_0]$ und vom Bogen $\{r(t, r_0) \,|\, 0 \leq t \leq t_1\}$ umschlossen wird, ist positiv invariant, siehe Abbildung 6.5 (und vergleiche den Beweis des Satzes von Poincaré-Abbildung).

Dann ist für $\lambda > 0$ auch $r(t(\lambda), r_0) = 0$ für ein $t(\lambda)$ nahe t_1. Wegen der stetigen Abhängigkeit von Parametern ist für $|\lambda|$ ausreichend klein auch noch $r(t(\lambda), r_0) < r_0$. Nun ist der oben angegebene Bereich auch für $\lambda > 0$ positiv invariant und enthält daher die Grenzmengen aller Anfangswerte. Da für $\lambda > 0$ der Ursprung abstoßend ist, kann keine ω-Grenzmenge den Ursprung beinhalten. Weil das angegebene Gebiet relativ kompakt ist, sind Grenzmengen nicht leer. Der Satz von Poincaré-Bendixson garantiert nun eine Ruhelage oder einen geschlossenen Orbit in der Grenzmenge. Wir hatten am Anfang gesehen, daß es eine Umgebung gibt, in der sich keine nichttrivialen Ruhelagen befinden. Daher muß in der ω-Grenzmenge auf jeden Fall ein geschlossener Orbit auftreten. $\square$

Bemerkung 6.4.3 *Für einen vollständigen Beweis gibt es mindestens zwei Varianten: Man reduziert entweder auf eine zweidimensionale gewöhnliche Differentialgleichung und benutzt die*

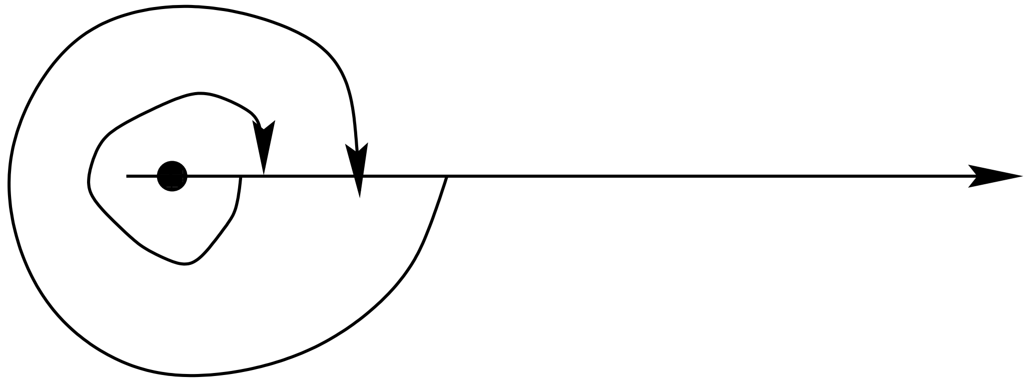

Abbildung 6.5: Illustration des Beweises für den Hopf'schen Verzweigungssatz in zwei Dimensionen.

obige Idee. Man kann sogar zeigen, daß die Voraussetzungen implizieren, daß die Gleichung $r(t, r_0) = r_0$ *maximal eine Lösung haben kann. Damit hätte man sogar die Eindeutigkeit des Lösungszweiges gezeigt.*

Die zweite Variante besteht darin, die Gleichung so umzuschreiben, daß die Methode von Ljapunov-Schmidt anwendbar wird. Man macht dies, indem man sich auf einen Raum von 2π*-periodischen Funktionen beschränkt und dort die Nullstellenmenge des Operators* $G(u, \lambda) = \omega\dot{u} - f(u, \lambda)$ *untersucht. Man beachte, daß die Linearisierung dieses Operators einen* doppelten *Eigenwert null besitzt. Allerdings tritt hier noch die à-priori unbekannte Periode der periodischen Lösungen auf. Durch einen Kunstgriff reduziert sich das Problem auf eine Verzweigungsgleichung, die der Situation am einfachen Eigenwert null entspricht. Man hat zwei Parameter und sucht eine eindimensionale Schar von Lösungen (nämlich alle auf dem geschlossenen Orbit). Durch Festlegen der Phase, d.h. des Anfangswertes auf dem geschlossenen Orbit, läßt sich die Gleichung für die Periode lösen und der Rest entspricht dem Verhalten am einfachen Eigenwert null.*

Bemerkung 6.4.4 Globale Fragen: *Die bisher angegebenen Sätze geben* lokale *Verzweigungsbedingungen und Verzweigungsresultate. Es gibt eine wichtige Klasse* globaler *Aussagen. Die erste davon geht auf* Rabinowitz *[16] zurück. Zusammenhangskomponenten abzweigender Lösungen verbinden entweder zwei Verzweigungspunkte oder sind unbeschränkt (entweder im Parameter oder im Zustand). Ein entsprechendes Resultat im Falle der Hopf Verzweigung stammt von* Alexander & Yorke*[1]. Im Fall der Hopf-Verzweigung treten wegen der Periode weitere Probleme auf. Wir wollen diese hier nicht weiter diskutieren.*

6.4.3 Stabilitätsverlust für periodischen Lösungen

Das Verhalten von periodischen Lösungen in parametrisierten Familien gewöhnlicher Differentialgleichungen ist wesentlich komplizierter als das von Ruhelagen. Zum Beispiel kann die minimale Periode für $\lambda \to \lambda^*$ gegen Unendlich streben. Dann findet man jenseits des Wertes λ^* i.A. keine periodische Lösung mehr. Wir wollen nun beschreiben in welcher Weise eine Familie periodischer Lösungen die Stabilität verlieren kann. Es sei $\dot{u} = f(u, \lambda)$ eine parametrisierte Familie von Differentialgleichungen und

$$\{(u(\lambda), \lambda) \mid \lambda \in I\}$$

sei eine glatte Kurve in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ von Anfangswerten periodischer Lösungen der minimalen Periode $\tau(\lambda)$. Wir setzen voraus, daß die Abbildung $\lambda \mapsto \tau(\lambda)$ stetig ist. (Achtung, dies ist eine Voraussetzung, es folgt nicht aus den anderen, bisher gemachten Annahmen!) Wir nehmen an, für $\lambda < \lambda^* = 0$ seien die Orbits asymptotisch stabil mit (dem trivialen charakteristischen Multiplikator 1) und $(n-1)$ charakteristischen Multiplikatoren $|\mu_i(\lambda)| < 1$. Für $\lambda = 0$ gebe es neben dem trivialen (mindestens) einen charakteristischen Multiplikator mit Betrag 1. Für $\lambda > 0$ sei mindestens ein charakteristischer Multiplikator dem Betrage nach größer als 1. Dabei gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Der betragsmäßig größte (nichttriviale) charakteristische Multiplikator bei $\lambda = 0$ ist ein einfacher Multiplikator mit dem Wert 1.

2. Der betragsmäßig größte (nichttriviale) charakteristische Multiplikator bei $\lambda = 0$ ist ein einfacher Multiplikator mit dem Wert -1.

3. Es gibt ein Paar betragsmäßig größter (nichttrivialer) charakteristischer Multiplikatoren $\mu, \overline{\mu}$. Dieser letzte Fall sollte noch feiner unterschieden werden, je nachdem ob für den charakteristischen Multiplikator in der Schreibweise $\mu = e^{2\pi i\alpha}$ ein rationales oder irrationales α auftritt. Im rationalen Fall sollte man noch $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ von den anderen Fällen unterscheiden. Wir werden dies jedoch nicht in aller Feinheit beschreiben.

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Bemerkungen. Das Verhalten von periodischen Lösungen untersucht man mittels der Poincaré-Abbildung Π.

Die gegebene periodische Lösung ist Fixpunkt von Π und natürlich auch aller Iterierten. Die Linearisierungen $D_u\Pi^n$ der Iterierten Π^n haben Eigenwerte, welche den (nichttrivialen) charakteristischen Multiplikatoren der geschlossenen Orbits $\mathcal{O}$ entsprechen, bei Iterierten $n > 1$ allerdings betrachten wir die Multiplikatoren für periodische Lösungen, die mehrfach durchlaufen werden. Dadurch ergeben sich Potenzen μ^n der charakteristischen Multiplikatoren. Dadurch erhält man bei einem einfachen charakteristischen Multiplikator -1 für die zweite Iterierte 1 als einfachen Eigenwert. Bei einem charakteristischen Multiplikator $\zeta \neq \pm 1$ mit $\zeta^m = 1$ erhält man für $D_u\Pi^m$ einen doppelten Eigenwert 1.

Im ersten Fall übertragen sich die Ergebnisse der Verzweigung am einfachen Eigenwert null, durch folgende Konstruktion:

$$g(u, \lambda) = \Pi(u, \lambda) - u.$$

Die Abbildung g hat bei $\lambda_0 = 0$ einen einfachen Eigenwert null. Die einzig stabile Verzweigung ist die Sattel-Knotenverzweigung.

Im zweiten Fall hat $D_u\Pi - \mathbb{1}$ keinen Eigenwert null, es verzweigen keine Fixpunkte von Π. Allerdings hat $D_u\Pi^2 - \mathbb{1}$ einen einfachen Eigenwert null. Es verzweigen Lösungen mit (approximativ) der doppelten Periode.

Der Fall konjugiert komplexer charakteristischer Multiplikatoren vom Betrag 1 ist viel komplizierter. Wir wollen nicht näher darauf eingehen. Für eine vollständige Darstellung benötigt man die angegebene feinere Unterscheidung.

6.5 Aufgaben

Aufgabe 6.5.1 Es sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine Matrix, deren Eigenwerte alle nicht positiven Realteil besitzen. Man betrachte die homogene, lineare Gleichung $\dot{u} = Au$ und zeige, daß die Ruhelage $u = 0$ genau dann stabil ist, wenn alle Eigenwerte auf der imaginären Achse gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen.

Aufgabe 6.5.2 Man zeige, daß eine Ruhelage w_0 einer autonomen Gleichung instabil ist, wenn es eine nichtkonstante Lösung $u(t, u_0)$ gibt mit $w_0 \in \alpha(u_0)$. Ist w_0 instabil, so gibt es entweder ein u_0 mit $w_0 \in \alpha(u_0)$ oder jede Umgebung U von u_0 enthält eine vollständige Trajektorie.

Aufgabe 6.5.3 Man zeige, daß im Korollar 6.2.12 die Matrix B reell gewählt werden kann, wenn A eine reelle Matrix ist. In diesem Fall muß man zulassen, daß P die doppelte Periode wie A hat.

Kapitel 7

Topologische Äquivalenz

7.1 Strukturelle Stabilität

Wir betrachten in diesem Abschnitt C^1-Vektorfelder auf kompakten Mannigfaltigkeiten, oder aber Lipschitz stetige Vektorfelder auf einem Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit der zusätzlichen Voraussetzung, daß alle Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ existieren. Es seien v_1, v_2 zwei C^1-Vektorfelder auf M_1 bzw. M_2.

Definition 7.1.1 *Wir nennen die Flüsse Φ_1 und Φ_2 zu v_1 bzw. v_2* topologisch äquivalent, *wenn es einen Homöomorphismus $H : M_1 \to M_2$ gibt mit*

$$H(\Phi_1(t,x)) = \Phi(t, H(x)).$$

Die Anzahl von Ruhelagen und periodischen Lösungen ist eine Invariante unter topologischer Äquivalenz. Ebenso bleiben Stabilitätseigenschaft unter topologischer Äquivalenz erhalten, nicht aber die Eigenwerte der Linearisierung.

Beispiel 7.1.2

1. *Der Fluß zu $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$ ist topologisch äquivalent zum Fluß zu $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x$.*

   Dies sieht man durch Betrachten geeigneter Transversaler.

2. *Aufgrund des Begradigungssatzes 5.1.17 ist in der Nähe jedes regulären Punktes ein Fluß topologisch äquivalent zum Fluß zum Vektorfeld $(1, 0, \dots, 0)$.*

Definition 7.1.3 *Ein C^1-Vektorfeld $v : M \to TM$ heißt* strukturell stabil, *wenn es eine Umgebung Q von v in der Menge aller C^1-Vektorfelder $M \to TM$ gibt, so daß $w \in Q$ impliziert, daß der zu w gehörende Fluß Φ_w topologisch äquivalent zu Φ_v ist. Als Metrik auf dem Raum der C^1-Vektorfelder wählen wir $d_{C^1}(v,w) = \sup|v(x) - w(x)| + \sup\|Dv - Dw\|$.*

Aufgrund der Vorbemerkung treten Verzweigungen nur in nicht strukturell stabilen Vektorfeldern auf. Es ist daher eine allgemeinere Aufgabe, alle strukturell stabilen Vektorfelder zu klassifizieren und darüber hinaus die Umgebungen von nicht strukturell stabilen wiederum in Regionen struktureller Stabilität einzuteilen. Dies ist eine wesentliche Verallgemeinerung der Verzweigungstheorie, wie wir sie im letzten Kapitel gesehen haben.

Beispiel 7.1.4 *1. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto 0$ ist nicht strukturell stabil.*

2. Das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

ist nicht strukturell stabil.

3. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto -x$ ist strukturell stabil

Die erste Aussage ist leicht einzusehen. Der Fluß zu $\dot{x} = c \in \mathbb{R}^n$ ist für jedes $c \neq 0$ nicht topologisch äquivalent zum trivialen Fluß $\Phi(t, \cdot) = \mathbb{1}$.

Im zweiten Fall betrachten wir einfach die Störung

$$v_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 + \varepsilon x_1 \\ x_1 + \varepsilon x_2. \end{pmatrix}.$$

Für jedes $\varepsilon \neq 0$ hat das v_ε keine periodische Lösung.

Die dritte Aussage, ist schwerer zu beweisen. Der Satz über implizite Funktionen besagt (man überlege sich eine genaue Begründung), daß jedes C^1-Vektorfeld v_ε , das bezüglich der Metrik d^{C^1} genügend nahe bei v ist, genau eine asymptotisch stabile Ruhelage u^* hat, und daß für jeden Anfangswert u_0 gilt $\omega(u_0) = u^*$. Setze $H(0) = u^*$. Aufgrund des Umkehrsatzes von Ljapunov gibt es bei u^* eine positiv definite Ljapunov-Funktion V mit $\dot{V} < 0$. Sei $c \neq 0$ $c \in V(U)$, wobei U die Umgebung ist, in der nach Satz über implizite Funktionen keine weitere Ruhelage von v_ε liegt. Setze $T = V^{-1}(c)$. T ist Transversale zum Vektorfeld und homöomorph zu einer Sphäre (Satz über implizite Funktionen). Sei $h : T \to S^{n-1}$ ein Homöomorphismus, der nach der eben gemachten Aussage existiert. Setze für $x \in S^{n-1}$

$$H(x) = h(x)$$

und für allgemeines $u_0 \in \mathbb{R}^n$, sei $t \in R$, so daß $u(t, u_0) \in S^{n-1}$. Setze

$$H(u_0) = \Phi_{v_\varepsilon}(h(u(t, u_0)), -t).$$

Zu zeigen ist:

1. H ist eine Bijektion.
2. H ist stetig.
3. H^{-1} ist stetig.

H ist wohl-definiert und injektiv. Da u^* global asymptotisch stabil ist, ist H auch surjektiv. Der einzige Punkt, an dem die Stetigkeit unklar ist, ist $u = 0$. Da aber $u = 0$ global asymptotisch stabil ist, ist auch dort die Stetigkeit gewährleistet.

Eine erste allgemeine Aussage liefert der folgende Satz.

Satz 7.1.5 *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $v : M \to TM$ ein C^1-Vektorfeld. Ist Φ_v strukturell stabil, so hat v nur endlich viele Ruhelagen und jede dieser Ruhelagen ist hyperbolisch.*

Beweis: Wenn wir zeigen, daß jede Ruhelage notwendigerweise hyperbolisch ist, dann folgt auch die Aussage über die Anzahl (auf einer kompakten Mannigfaltigkeit). Angenommen u^* sei eine nicht-hyperbolische Ruhelage. Sei U eine Umgebung und χ eine $C_0^\infty(U, \mathbb{R})$-Funktion. Wähle einen Eigenwert $\mu \in i\mathbb{R}$ und störe alle anderen Eigenwerte von der imaginären Achse, so daß μ einfacher Eigenwert wird. Nun können wir eine kleine Störung angeben, die zu einer Verzweigung am einfachen Eigenwert Null oder einer Hopf-Verzweigung führt. Dies widerspricht der strukturellen Stabilität. □

Strukturelle Stabilität impliziert nicht nur Bedingungen an die Gleichgewichtslagen, sondern auch an weitere signifikante Erscheinungen des Flusses. Wir betrachten zunächst ein Beispiel.

Beispiel 7.1.6 *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld mit zwei Gleichgewichtslagen und einem verbindenden Orbit. Wir betrachten zunächst den Fall zweier (hyperbolischer) Sättel, o.B.d.A. nehmen wir an, das Vektorfeld habe die Form*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= y^2 - 1. \end{aligned}$$

Das Phasenportrait ist schematisch in Abbildung 7.1 dargestellt. Wir wollen zeigen, daß diese

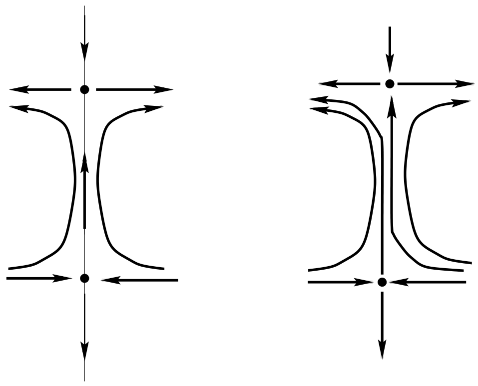

Abbildung 7.1: Das Bild einer Sattel-Sattel Verbindung.

Verbindung der strukturellen Stabilität widerspricht. Wir betrachten eine Umgebung des Ursprungs U und eine C_0^∞-Funktion χ mit $\operatorname{supp}\chi \subset U$. Wir betrachten die Störung $\chi(x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Durch diese Störung wird offensichtlich der verbindende Orbit zerstört.

Das nächste Beispiel zeigt den Fall einer Sattel-Knoten-Verbindung.

Beispiel 7.1.7

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y^2 - 1. \end{aligned}$$

Das Phasenportrait hat schematisch die in Abbildung 7.2 gezeigte Gestalt. Wir wollen zeigen, daß dieses System strukturell stabil ist. Wir betrachten eine Umgebung des Q dieses Vektorfelds

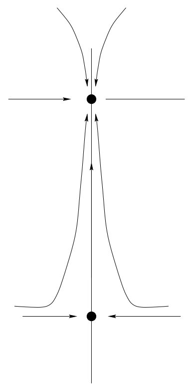

Abbildung 7.2: Das Bild einer Sattel-Knoten Verbindung.

in der Menge der C^1-Vektorfelder bezüglich der metrik d^{C^1}. . Jedes Vektorfeld in der Nähe hat genau zwei Ruhelagen, einen Sattel und einen Knoten. Da die Menge der Punkte, deren ω-Limesmenge der Punkt $(0, -1)$ ist, offen ist, bleibt eine Verbindung bestehen. Die strukturelle Stabilität des Systems bedarf einiger weiterer Überlegungen. Wir kommen später darauf zurück.

Nun wollen wir die im Beispiel gemachten Erfahrungen verallgemeinern. Wir erinnern zunächst an den Beweis des Satzes 6.1.4:

Beim Beweis des Satzes 6.1.4 über Spektrum und Stabilität II haben wir gezeigt, daß zu jedem u_0 im Eigenraum zu Eigenwerten mit positivem Realteil eine Lösung existiert, die rückwärts gegen null konvergiert und deren Eigenwert durch Projektion auf diesen Wert u_0 abgebildet wird. Wir hatten damals bereits erwähnt, daß diese Aussage fast den Satz von der instabilen Mannigfaltigkeit beweist, der aussagt, daß falls w_0 hyperbolische Ruhelage ist, die Menge der Anfangswerte u_0 mit $\alpha(u_0) = w_0$ eine Mannigfaltigkeit bilden.

Definition 7.1.8 *Sei w_0 eine hyperbolische Ruhelage. Die* instabile Menge *$W^u(w_0)$ von u_0 ist definiert als die Menge aller u_0 mit $\alpha(u_0) = w_0$. Ebenso definiert man die* stabile Menge *als die Gesamtheit der Punkte, deren ω-Limesmenge w_0 ist.*

Satz 7.1.9 *$W^u(w_0)$ und $W^s(w_0)$ bilden Mannigfaltigkeiten, deren Dimension sind durch*

$$\dim W^u(w_0) = \dim E^+(w_0),$$

bzw.

$$\dim W^s(w_0) = \dim E^-(w_0)$$

gegeben.

Beweis: Lokal, d.h. in der Nähe, d.h. in einer Umgebung V von w_0 ist dies eine Überlegung, die auf dem Beweis von Satz 6.1.4 aufbaut. Zu jedem Punkt auf $W^u(w_0)$ gibt es eine Umgebung U und eine Umgebung $W \subset V$, so daß U diffeomorphes Bild von W ist. Dies beweist dann die Aussage. □

Natürlich sind Schnittpunkte von $W^u(w_0)$ und $W^s(w_1)$ Punkte auf heteroklinen Orbits, die w_0 mit w_1 verbinden. Offenkundig ist auch die Existenz eines verbindenden Orbits eine Invariante unter topologischer Äquivalenz. Weit weniger offenkundig ist der folgende Sachverhalt: Ist Fluß Φ_v zu v strukturell stabil und schneiden sich $W^u(w_0)$ und $W^s(w_1)$, so ist dieser Schnitt transversal. Dabei heißt ein Schnitt zweier Mannigfaltigkeiten $N_1, N_2 \subset M$ transversal, wenn für $x \in N_1 \cap N_2$ folgt $T_x N_1 + T_x N_2 = T_x M$. Dieser Sachverhalt, den wir hier nicht beweisen können, der aber durch das folgende Bild klarer wird, hat wichtige Konsequenzen: In strukturell stabilen Systemen gibt es weder homokline Lösungen noch heterokline Zykel. Dabei heißt eine Folge von Ruhelagen $w_1, \dots w_m$ mit verbindenden Orbits $\mathcal{O}_i$ mit $\omega(\mathcal{O}_i) = w_{i+1 \bmod m}, \alpha(\mathcal{O}_i) = w_i$ ein heterokliner Zyklus. Warum sind solche speziellen Lösungen in strukturell stabilen Systemen nicht möglich? Ist $u_0 \in W^u(w_0) \cap W^s(w_1)$, so ist u_0 ein regulärer Punkt und die gesamte Trajektorie ist im Schnitt $W^u(w_0) \cap W^s(w_1)$. Der Rest ist eine einfache Übung der Arithmetik, wir betrachten den Fall eines heteroklinen Zyklus mit zwei Ruhelagen w_0, w_1 und verbindenden Orbits $\mathcal{O}_1 = \{u(t, u_1) | t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{O}_2 = \{u(t, u_2) | t \in \mathbb{R}\}$. Eine bildliche Vorstellung vermittelt die folgende Skizze 7.3.

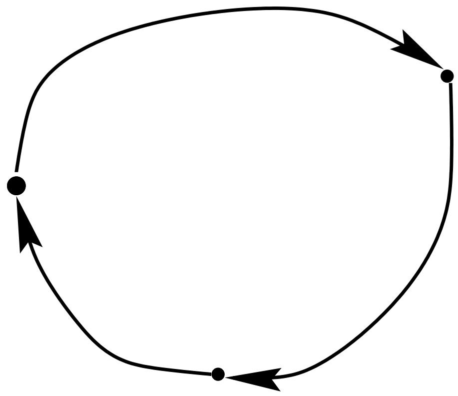

Abbildung 7.3: Ein schematisches Bild eines heteroklinen Zyklus.

Angenommen der Schnitt wäre in jedem Punkt auf den Orbits transversal, sei $n = \dim M$, $n_i = \dim W^u(w_i)$, $m_i = \dim W^s(w_i)$, so gilt

$$\begin{aligned}
n_1 + m_1 + n_2 + m_2 &= \dim W^u(w_1) + \dim W^s(w_1) + \dim W^u(w_2) + \dim W^s(w_2) \\
&= 2n \\
&= \dim T_{u_1} M + \dim T_{u_2} M \\
&= \dim(T_{u_1} W^u(w_1) + T_{u_1} W^s(w_2)) + \dim(T_{u_2} W^u(w_2) + T_{u_1} W^s(w_1)) \\
&= \dim T_{u_1} W^u(w_1) + \dim T_{u_1} W^s(w_2) - \dim(T_{u_1} W^u(w_1) \cap T_{u_1} W^s(w_2)) \\
&\qquad + \dim T_{u_2} W^s(w_1) + \dim T_{u_2} W^u(w_2) - \dim(T_{u_2} W^s(w_1) \cap T_{u_2} W^u(w_2)) \\
&\geq n_1 + m_2 - 1 + n_2 + m_1 - 1 \\
&> n_1 + m_2 + m_1 + n_2.
\end{aligned}$$

Für alle weiteren Fälle kann man eine ganz ähnliche Rechnung durchführen.

Neben einigen Beispielen für strukturell stabile Flüsse haben wir noch notwendige Bedingungen für strukturelle Stabilität gesehen.

Eine genaue Klassifikation der strukturell stabilen Systeme stammt von Robinson[17] aus dem Jahr 1974. Die Formulierung benötigt ein paar Begriffe, die wir bisher nicht eingeführt haben.

7.2 Der Satz von Hartman-Grobman

In diesem Abschnitt wollen wir beweisen, daß es zu jeder hyperbolischen Gleichgewichtslage einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ eine Umgebung U gibt, so daß der auf U eingeschränkte Fluß äquivalent zum Fluß des linearisierten Systems ist. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 7.2.1 *Sei w_0 hyperbolischer Fixpunkt eines C^1-Vektorfeldes v und $Q = D_u v(w_0)$. Φ_Q sei der zum linearen Vektorfeld $u \mapsto Qu$ gehörenden Fluß. Dann gibt es eine Umgebung W von w_0 und eine Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n$, so daß die Flüsse $\Phi_v|_W$ und $\Phi_Q|_U$ topologisch äaquivalent sind.*

Beweis: Die Aussage folgt aus einer vergleichbaren Aussage für Abbildungen. Wir formulieren diese zunächst als Satz 7.2.2, dann beweisen wir, daß Satz 7.2.1 aus Satz 7.2.2 folgt und schließlich zeigen wir Satz 7.2.2. □

Sei A eine $k \times k$-Matrix, deren Eigenwerte alle im Inneren des Einheitskreises liegen, B eine $(n-k) \times (n-k)$-Matrix, deren Eigenwerte alle vom Betrag größer als 1 sind. Sei

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung mit $D_u F(0) = 0$. Wir betrachten die Abbildung

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : u \mapsto Pu + F(u).$$

Satz 7.2.2 *Ist P regulär, so gibt es Umgebungen U, V von $0 \in \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Psi : V \to U$, so daß für $u \in U$ gilt*

$$\Psi \circ G \circ \Psi^{-1}(u) = Pu.$$

Wir führen nun die Aussage des Satzes 7.2.1 auf den Satz 7.2.2 zurück. Wir können annehmen, daß der Fluß Φ_v zu v die Form $\exp(Qt) + r(t,u)$ hat und $r(t, w_0) = \partial_u r(t,u) = 0$ ist. Q hat Blockdiagonalgestalt und damit auch $\exp(Qt)$. Seien A, B die Blöcke von $\exp(Q) = P$ zu den Eigenwerten im Inneren, bzw. im Äußeren des Einheitskreises. Wir betrachten nun die Aufgabe, die Matrix $\exp(Q)$ zur Zeit-1-Abbildung $\Phi(1,u)$ zu konjugieren. Dies ist wegen Satz 7.2.2 auf einer Umgebung von w_0 möglich. Sei also Ψ_0 diese Konjugation, also $\Psi_0 \circ \Phi(1,\cdot) \circ \Psi_0^{-1} = \exp(Q)$. Setze

$$\Psi = \int_0^1 \exp(-Qs)\Psi_0 \Phi(s,\cdot)ds.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\exp(Qt)\Psi &= \exp(Qt)\int\limits_0^1 \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds \\
&= \int\limits_0^1 \exp(-Q(s-t))\Psi_0\Phi(s-t,\cdot)\Phi(t,\cdot)ds \\
&= \int\limits_{-t}^{1-t} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds\Phi(t,\cdot) \\
&= \left(\int\limits_{-t}^{0} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds + \int\limits_0^{1-t} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds\right)\Phi(t,\cdot).
\end{aligned}$$

Nun schreiben wir

$$\exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot) = \exp(-Qs)\exp(-Q)\exp(Q)\Psi_0\Phi(s,\cdot).$$

Wegen $\exp(Q) = \Psi_0\Phi(1,\cdot)\Psi_0^{-1}$ ergibt dies

$$\exp(-Qs)\exp(-Q)\Psi_0\Phi(1,\cdot)\Psi_0^{-1}\Psi_0\Phi(s,\cdot) = \exp(-Q(s+1))\Psi_0\Phi(s+1,\cdot).$$

Damit ist

$$\int\limits_{-t}^{0} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds = \int\limits_{-t}^{0} \exp(-Q(s+1))\Psi_0\Phi(s+1,\cdot)ds = \int\limits_{1-t}^{1} \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds.$$

Also wird aus der obigen Gleichung

$$\exp(Qt)\Psi = \int\limits_0^1 \exp(-Q(s))\Psi_0\Phi(s,\cdot)\Phi(t,\cdot)ds.$$

Insgesamt ergibt dies die Konjugation

$$\exp(Qt)\Psi = \int\limits_0^1 \exp(-Qs)\Psi_0\Phi(s,\cdot)ds\Phi(t,\cdot) = \Psi\Phi(t,\cdot).$$

Für den Beweis von Satz 7.2.2 benötigen wir noch ein Lemma aus der Linearen Algebra.

Definition 7.2.3 *Wir nennen eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$* m-hyperbolisch, *falls L keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt. Mit L^s bezeichnen wir den stabilen Anteil von L, also die Einschränkung auf E^s, den verallgemeinerten Eigenraum zu den Eigenwerten im Inneren des Einheitskreises, und mit L^u entsprechend den instabilen Anteil.*

Lemma 7.2.4 *Ist L eine reguläre, m-hyperbolische Matrix und $\alpha > 0$. Dann gibt es eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, welche von einem Skalarprodukt induziert wird (Hilbert-Norm) mit*

$$|\sigma(L^s)| < \alpha, \ |\sigma((L^u)^{-1})| < \alpha$$

und $E^s \perp E^u$. Weiterhin gilt

$$\max\left\{\|L^s\|, \|(L^u)^{-1}\|\right\} < \alpha.$$

Beweis: Bekannt aus der Linearen Algebra. □

Beweis von Satz 7.2.2: Zunächst wählen wir die Norm, die wir im vorigen Lemma konstruiert haben. Der Übergang zu einer äquivalenten Norm bedeutet, daß wir Lipschitz-Konstanten mit positiven Zahlen multiplizieren und daher sagt uns die Voraussetzung des Satzes, daß wir eine hinreichend kleine Umgebung wählen können, so daß gilt

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

mit

$$2\lambda < \min\left\{1 - \alpha, \|L^{-1}\|^{-1}\right\}.$$

Schritt 1: $L + g$ ist ein Homöomorphismus.

Lösen wir die Gleichung $Lx + g(x) = y$, so ist diese äquivalent zu

$$x = L^{-1}(y - g(x)) =: f_y(x).$$

Für ein Paar x_1, x_2 rechnet man leicht nach

$$\|f_y(x_1) - f_y(x_2)\| \leq \|L^{-1}\|\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \lambda\|L^{-1}\|\|x_1 - x_2\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Damit existiert ein Fixpunkt $x(y)$. Eine einfache Rechnung ergibt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|x(y) - x(\tilde{y})\| &= \|f_y(x(y)) - f_{\tilde{y}}(x(\tilde{y}))\| \\
&\leq \|f_y(x(y)) - f_y(x(\tilde{y}))\| + \|f_y(x(\tilde{y})) - f_{\tilde{y}}(x(\tilde{y}))\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|x(y) - x(\tilde{y})\| + \|L^{-1}\|\|y - \tilde{y}\|.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\|x(y) - x(\tilde{y})\| \leq 2\|L^{-1}\|\|y - \tilde{y}\|.$$

Also ist $y \mapsto x(y) = (L + g)^{-1}(y)$ gleichmäßig Lipschitz stetig.

Schritt 2: Sei h wie g. Wir nehmen an, daß es eine eindeutige Abbildung $H(g, h)$ gibt mit $H - \mathbb{1}$ ist stetig und beschränkt, und H ist stetig mit

$$(L + g)H = H(L + h).$$

Setze $A = H(g, 0)$, $B = H(0, g)$. Dann ist

$$L \circ B = B \circ (L + g)$$

und

$$(L+g)\circ A = A\circ L.$$

Insgesamt also

$$(L+g)\circ A\circ B = A\circ L\circ B = A\circ B(L+g).$$

Setzen wir an $A = \mathbb{1}+u$, $B = \mathbb{1}+v$ und $A\circ B = \mathbb{1}+w$ mit $w = v+u\circ B$, so ergibt sich

$$A\circ B = H(g,g) = \mathbb{1}$$

und ebenso $B\circ A = \mathbb{1}$. Also ist H ein Homöomorphismus.

Schritt 3: Mit dem Ansatz $H = \mathbb{1}+u$ bleibt zu zeigen, daß es genau ein stetiges, beschränktes u gibt mit

$$(L+g)\circ(\mathbb{1}+u) = (\mathbb{1}+u)\circ(L+h).$$

Der erste Schritt hat gezeigt, daß ein $L+h$ ein Homöomorphismus ist. Also ist die vorige Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}\mathbb{1}+u &= (L+g)\circ(\mathbb{1}+u)\circ(L+h)^{-1}\\ &= L\mathbb{1}\circ(L+h)^{-1} + Lu\circ(L+h)^{-1} + g\circ(\mathbb{1}+u)(L+h)^{-1}.\end{aligned}$$

Da $\mathbb{1} = (L+h)\circ(L+h)^{-1}$ wird diese Gleichung zu

$$u = Lu\circ(L+h)^{-1} + g\circ(\mathbb{1}+h)^{-1} - h\circ(L+h)^{-1}.$$

Wir schreiben dies als

$$u = Lu\circ(L+h)^{-1} + G(u) = K(u).$$

K bildet den Banachraum der stetigen, beschränkten Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in sich ab. Wir wollen zeigen, daß K einen Fixpunkt hat. Mit den Eigenprojektoren P^s bzw. P^u splitten wir diese Gleichung in ein Paar

$$\begin{aligned}P^s u &= L^s P^s u\circ(L+h)^{-1} + P^s G(u) = K^s(u)\\ P^u u &= L^u P^u u\circ(L+h)^{-1} + P^u G(u).\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit $(L^u)^{-1}$ von links und mit $L+h$ von rechts und erhalten nach Umstellen

$$P^u u = (L^u)^{-1}P^u u\circ(L+h) - (L^u)^{-1}P^u G(u)\circ(L+h) = K^u(u).$$

Die Gleichung $u = K(u)$ ist nun äquivalent zu $u = K^s(u)+K^u(u)$. Wir schätzen nun K^s, bzw. K^u getrennt ab, um mit dem Banach'schen Fixpunktsatz einen Fixpunkt $u = K(u)$ zeigen zu können.

Im folgenden benutzen wir die Äquivalenz der Normen $\|u-v\|_\infty$ und $\max\{\sup|P^s(u-v)(x)|, \sup|P^u(u-v)(x)|\}$. Genauer gilt

$$|v(x)| \le \|P^s(v(x))\| + \|P^u(v(x))\| \le 2\|v\|_\infty.$$

Nun haben wir für u,v stetig und beschränkt und $y = (L+h)^{-1}(x)$ bzw. $z = (L+h)(x)$

$$\begin{aligned}\|K^s(u)(x) - K^s(u)(x)\| &\le \alpha\|P^s u(x) - P^s v(x)\| + \|g(y+u(y)) - g(y+v(y))\|\\ &\le \alpha\|(u-v)\|_\infty + 2\lambda\|u-v\|_\infty\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|K^u(u)(x) - K^u(u)(x)\| &\leq \alpha\|P^u u(x) - P^u v(x)\| + \|g(y+u(y)) - g(y+v(y))\| \\ &\leq \alpha\|u-v\|_\infty + 2\lambda\|u-v\|_\infty.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\|K^s(u) - K^s(v)\| \leq (\alpha + 2\lambda)\|u-v\|_\infty$$

und

$$\|K^u(u) - K^u(v)\| \leq (\alpha + 2\lambda)\|u-v\|_\infty.$$

Für K erhält man die Abschätzung

$$\|K(u) - K(v)\|_\infty \leq (\alpha + 2\lambda)\|u-v\|_\infty.$$

Da $\alpha + 2\lambda < 1$ ist, gibt es einen eindeutigen Fixpunkt. Dies vervollständigt dann den Beweis.

□

Literaturverzeichnis

[1] J. C. ALEXANDER & J. YORKE. Global bifurcation of periodic orbits. *Amer. J. Math*, 100, 263-292, 1978.

[2] H. AMANN. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* de Gruyter, 1995.

[3] V. ARNOLD. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.

[4] T. BRÖCKER & K. JÄNICH. *Differentialtopologie*, volume 98 of *Heidelberger Taschenbücher.* Springer Verlag, 1973.

[5] D. CHILLINGWORTH. *Differential Topology with a view to applications.* Pitman, 1976.

[6] K. DEIMLING. *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1974.

[7] J. DIEUDONNÉ. *Grundzüge der modernen Analysis,* Bd 1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.

[8] H. DYM & H. MCKEAN. *Trigonometric Series and Integrals.* Academic Press, New York, 1972.

[9] M. GOLUBITSKY & D. G. SCHAEFFER. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory,* Vol. I. Springer Verlag, 1985.

[10] M. GOLUBITSKY, I. STEWART & D. G. SCHAEFFER. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory,* Vol. II. Springer Verlag, 1988.

[11] J. K. HALE. *Ordinary Differential Equations.* John Wiley & Sons, Coorp, 1969.

[12] P. HARTMAN. *Ordinary Differential Equations.* John Wiley & Sons, Coorp., 1964.

[13] H. HEUSER. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* B. G. Teubner, 1979.

[14] H.-W. KNOBLOCH & F. KAPPEL. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Teubner, 1974.

[15] J. PALIS,JR. & W. DE MELO. *Geometric Theory of Dynamical Systems.* Springer Verlag, New York, 1982.

[16] P. H. RABINOWITZ. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *J. Funct. Anal.*, 7, 487-513, 1971.

[17] C. Robinson. Structural stability of vector fields. *Ann. Math*, 99, 154-174, 1974.

[18] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Heidelberger Taschenbücher. Springer Verlag, 1972.