Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Dipl.-Math. Roland Weber

SS 1999

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 8

1. Für die Differentialgleichung des mathematischen Pendels und für das System aus Aufgabe 2 Blatt 5 bestimme man jeweils für alle Orbits die α- und ω-Grenzmengen. Handelt es sich dabei um stabile Mengen oder sogar um Attraktoren? Begründung!

2. Man zeige: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und hat eine Abbildung $\Phi \in C^2(U \times \mathbb{R}, U)$ die Eigenschaften aus Lemma 5.1.2, so ist Φ Fluß einer Differentialgleichung. Hinweis: Man betrachte das Vektorfeld $\partial_t \Phi(t, x)1$!

3. Man betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

   und zeige, daß sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ einen Fluß auf dem Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induziert. Man bestimme für jedes reelle α und alle Orbits α- und ω-Grenzmengen.

4. Gegeben sei ein Lipschitz stetiges Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Es gebe zwei Kreise um den Ursprung mit Radien $0 < r_1 < r_2$, so daß auf dem inneren Kreis das Vektorfeld nach außen deutet ($|x| = r_1 \Rightarrow \langle x, f(x) \rangle > 0$) und auf dem äußeren Kreis nach innen ($|x| = r_2 \Rightarrow \langle x, f(x) \rangle < 0$). Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen kann man auf die Existenz einer periodischen Lösung im Kreisring, d.h. $r_1 < x(t) < r_2$ für alle $t \in \mathbb{R}$, schließen? Kann man Eindeutigkeit erwarten?

Abgabe: Donnerstag, 10.6.1999 in den Übungen