Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Dipl.-Math. Roland Weber

SS 1999

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 7

1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Gegeben seien n Lösungen $u_1, \ldots, u_n$ der Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$.

   (a) Man zeige: Gibt es ein $\tau \in I$, so daß die Vektoren $u_1(\tau), \ldots, u_n(\tau)$ linear unabhängig sind, so sind die Vektoren $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig. Man nennt dann $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ ein *Fundamentalsystem* und die Matrix $Y(t)$, deren Spalten aus den Vektoren $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ besteht, *Fundamentalmatrix*.

   (b) Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so nennt man die reellwertige Funktion $w(t) = \det Y(t)$ die *Wronski-Determinante* von A.
   Man zeige: w löst die Differentialgleichung $\dot{w} = \operatorname{tr}(A)w$.

2. (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   Man zeige: Die Gleichung $\dot{u} = au + f(t)$ besitzt genau eine beschränkte Lösung.
   Hinweis: Bestimme geeigneten Anfangswert über Variation der Konstanten.

   (b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und beschränkt, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. A habe keinen Eigenwert λ mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$.
   Man zeige: Die Gleichung $\dot{u} = Au + f(t)$ besitzt genau eine beschränkte Lösung.
   Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, daß alle Eigenwerte von A positiven oder alle negativen Realteil haben.

3. Schreiben Sie ein MATLAB–Programm, das für eine gegebene rechte Seite $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ für die Differentialgleichung $\dot{u} = f(u, t)$ mit Anfangswert $u(t_0) = u_0$ Näherungslösungen mit dem Runge–Kutta–Verfahren berechnet. Verwenden Sie das Programm, um Näherungslösungen zu verschiedenen Anfangswerten

   (a) für die logistische Gleichung,

   (b) für das mathematische Pendel (stellen Sie hier auch die Energie der Näherungslösung graphisch dar),

   (c) für das System (vergleiche Aufgaben 2 und 3, Blatt 5)

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -u_2 + u_1(1 - u_1^2 - u_2^2) \\ \dot{u}_2 &= u_1 + u_2(1 - u_1^2 - u_2^2) \end{aligned}$$

   zu berechnen und graphisch auszugeben.

4. (a) Was ist der Phasenraum, bzw. der erweiterte Phasenraum für die Gleichungen $\dot{u} = u$, bzw. $\dot{u} = u(1 - u)$ in $\mathbb{R}$. Was sind die Trajektorien, bzw. die Orbits?

   (b) Man beantworte die gleichen Fragen für die Gleichung im $\mathbb{R}^2$ aus Aufgabe 3(c).

Abgabe: Donnerstag, 3.6.1999 in den Übungen