Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Dipl.-Math. Roland Weber

SS 1999

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 4

1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u' = 2t(u+1), \quad u(0) = 0.$$

   (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

   (b) Im Beweis des lokalen Existenzsatzes von Picard und Lindelöf wurde der Operator

$$T : C(I_\delta, W) \to C(I_\delta, W) : u \mapsto u_0 + \int_0^{\cdot} f(u(s), s)ds$$

   betrachtet. Es wurde gezeigt, daß dies eine starke Kontraktion ist. Daher folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz, daß die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_{n+1} = Tu_n$ mit gegebenem $u_0 \in C(I_\delta, W)$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems $u' = f(t,u)$, $u(0) = 0$ konvergiert.
   Berechnen Sie nun für $f(t,u) = 2t(u+1)$ und $u_0 \equiv 0$ die Iteriertenfolge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und vergleichen Sie diese mit der in (a) gewonnenen Lösung.

2. Gegeben sei

$$f(t,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{4t^3 y}{t^4+y^2} & \text{falls } (t,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (t,y) = (0,0) \end{array} \right\}.$$

   Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = f(t,y)$, $y(0) = 0$.

   (a) Zeigen Sie, daß f an $(0,0)$ stetig ist, aber in keinem Gebiet, welches $(0,0)$ enthält, eine Lipschitzbedingung erfüllt.
   Hinweis: Betrachten Sie bei festem t die Differenz von $f(t,y)$ und $f(t,\tilde{y})$ mit $y = t^2$ und $\tilde{y} = 2t^2$.

   (b) Zeigen Sie, daß für jedes $c \geq 0$ die Funktion

$$y : t \mapsto c - \sqrt{t^4 + c^2}$$

   das Anfanswertproblem löst.

3. Eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Lip}(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ konvergiert genau bezüglich der Metrik d_L wenn sie auf jedem Kompaktum in W gleichmäßig konvergiert.

4. Man betrachte die Gleichung des harmonischen Oszillators $\ddot{u} + \sin(u) = 0$ und zeige daß die Funktion

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}(\dot{u}(t))^2 - \cos u(t)$$

   längs Lösungen konstant ist. Wie sehen die Niveaulinien von E aus? Man interpretiere die erhaltenen Lösungen. Man zeige, daß längs der durch das Euler'sche Polygonzugverfahren definierten Näherungslösung E streng monoton wächst und bestimme numerisch das Wachstumsverhalten.

Abgabe: Donnerstag, 6.5.1999 in den Übungen