Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Dipl.-Math. Roland Weber

SS 1999

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 3

1. (a) Man definiere eine Metrik auf $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und gebe eine differenzierbare Struktur an, die S^1 zur Mannigfaltigkeit macht.
   (b) Definieren Sie Metrik und differenzierbare Struktur auf der Sphäre S^2 im $\mathbb{R}^3$!

2. Man schreibe ein MATLAB-Programm, das für eine gegebene rechte Seite $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ für die Differentialgleichung $u' = f(u,t)$ mit Anfangswert $u(t_0) = u_0$ Näherungslösungen nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren berechnet. Man verwende das Programm, um Näherungslösungen für

   (a) die logistische Gleichung
   (b) den harmonischen Oszillator

   zu berechnen und graphisch auszugeben. Untersuchen Sie das Verhalten für verschiedene Anfangswerte.

3. Es sei $f : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich der ersten Komponente Lipschitz stetig mit einer globalen Lipschitz-Konstante $L > 0$. Für einen alternativen Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Lösungen für das Anfangswertproblem $u(0) = u_0$, $\dot{u} = f(u,t)$ auf dem Intervall $[0,T]$ beweise man die folgenden Aussagen:

   (a) Durch $d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)|e^{-2Lt} \mid t \in [0,T]\}$ wird eine Metrik auf $C([0,T], \mathbb{R}^n)$ definiert.
   (b) Der Operator $K : C([0,T], \mathbb{R}^n) \to C([0,T], \mathbb{R}^n) : u \mapsto u_0 + \int_0^t f(u(s),s)ds$ bildet $C([0,T], \mathbb{R}^n)$ in sich ab und ist eine Kontraktion.

4. Man betrachte die Gleichung

   $$\dot{x} = \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|}.$$

   Wie lautet die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems $x(t_0) = x_0$? Man zeige, daß die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = 0$ <u>nicht</u> eindeutig bestimmt ist. Wie sieht dies bei anderen Anfangswerten aus?

Abgabe: Donnerstag, 22.4.1999 in den Übungen