Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Dipl.-Math. Roland Weber

SS 1999

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 2

1. Man überlege sich, ob ein Zerfallsgesetz $u(t)$, welches für ein $T > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ der Beziehung $u(t+T) = \frac{1}{2}u(t)$ genügt, auch eine Gleichung der Form $u'(t) = -\alpha u(t)$ erfüllt.

2. Man überprüfe die folgenden Gleichungen auf Exaktheit, bestimme für die nicht exakten Gleichungen einen integrierenden Faktor und bestimme die Lösungen. Man beachte, daß die Gleichungen nicht überall Sinn machen. In diesen Fällen betrachte man eine äquivalente Differentialgleichung für die Funktion $x = x(y)$. Gibt es eine symmetrische Schreibweise?

   (a) $yy' = x$

   (b) $xy' = y$

   (c) $x - y + (-x + 1)y' = 0$

   (d) $4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$

   (e) $xy^2 + y - xy' = 0$

3. Man zeige, daß die Menge $C([0,1], \mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit Werten im $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Norm

$$\|u\| = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|,$$

   ein Banachraum ist.

4. Wir betrachten die Abbildung

$$T : C([0,1], \mathbb{R}^n) \to C([0,1], \mathbb{R}^n) : u \mapsto \int_0^1 f(., y)u(y)dy, \tag{1}$$

   wobei f eine auf $[0,1] \times [0,1]$ stetige, reellwertige Funktion ist. Man zeige, T ist stetig und linear. Ist T eine Kontraktion?

Abgabe: Donnerstag, 22.4.1999 in den Übungen