Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Dipl.-Math. Roland Weber

SS 1999

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 10

1. Untersuchen Sie, ob folgende Differentialgleichungen (bzw. ihre Rückführungen auf Systeme erster Ordnung) Hamiltonsch sind:

   (a) Räuber–Beute–Modell:
   $$\begin{aligned}\dot{x} &= (\alpha - \beta y)x \\ \dot{y} &= (-\gamma + \delta x)y\end{aligned}$$
   mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

   (b) Das mathematische Pendel $\ddot{x} + \sin(x) + c\dot{x} = 0$ ohne Dämpfung ($c = 0$) und mit Dämpfung ($c > 0$).

   (c) Das n–Körperproblem: $\ddot{x} = -\nabla V(x)$ mit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$, $m_1, \ldots, m_n$ in $\mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned}V: \quad & \{(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in (\mathbb{R}^3)^n | x^{(i)} \neq x^{(j)} \text{ für } i \neq j\} \to \mathbb{R} \\ & (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \mapsto \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|}.\end{aligned}$$

2. Untersuchen Sie sämtliche Ruhelagen des Räuber–Beute–Modells
   $$\begin{aligned}\dot{x} &= (\alpha - \beta y - \lambda x)x \\ \dot{y} &= (-\gamma + \delta x - \mu y)y\end{aligned}$$
   mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu > 0$ auf Stabilität und Attraktivität. Benutzen Sie die gewonnenen Erkenntnisse, um im ersten Quadranten für signifikante Parameterwerte qualitative Phasenporträts zu skizzieren.

3. Wir betrachten das System
   $$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x^2(y-x) + y^5}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)} \\ \dot{y} &= \frac{y^2(y-2x)}{(x^2+y^2)(1+(x^2+y^2)^2)}.\end{aligned}$$
   Machen Sie sich anhand von numerischen Experimenten klar, daß der Ursprung attraktiv und instabil ist.

4. Es sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine Matrix, deren Eigenwerte alle nicht positiven Realteil besitzen. Man betrachte die homogene, lineare Gleichung $\dot{u} = Au$ und zeige, daß die Ruhelage $u = 0$ genau dann stabil ist, wenn bei allen Eigenwerten auf der imaginären Achse die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist.

Abgabe: Donnerstag, 24.6.1999 in den Übungen