Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Dipl.-Math. Roland Weber

SS 1999

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 1

1. Man verifiziere die Aussagen über die logistische Gleichung $p' = \beta p - Sp^2$:

   (a) Für $p_0 \in (0, K),\ K = \beta/S$ existiert die Lösung für alle Zeiten und strebt für $t \to \infty$ gegen K, für $t \to -\infty$ gegen null.

   (b) Für $p_0 > K$ existiert die Lösung nicht für alle reellen Zeiten. Man diskutiere das Verhalten.

   (c) Man untersuche das Verhalten der Lösungen für $p_0 < 0$!

2. Man löse die Gleichungen

   (i) $u' = u^2 + 1$ (ii) $u' = -\frac{x^2}{u^3}$ (iii) $u' = e^u \sin(x)$

   mit der Methode der *Trennung der Veränderlichen* und diskutiere das Verhalten der Lösungen $u(0) = p_0,\ p_0 \in \mathbb{R}$, d.h. man beantworte die folgenden Fragen.

   (a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert die Lösung?

   (b) Wie verhält sich die Lösung für $t \to t_+,\ t \to t_-$, wenn (t_-, t_+) das (maximale) Intervall bezeichnen, auf dem die Lösung $u(t)$ existiert?

3. Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Mit $\exp(At)$ bezeichnen wir die Reihe

$$\exp(At) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} A^\nu.$$

   Man berechne jeweils einen expliziten Ausdruck für A^ν und für $\exp(At)$. Man zeige:

   (a) $A \exp(At) = \exp(At) A$.

   (b) $\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At)$.

   (c) $\exp(-At) \exp(At) = \mathbb{1}$.

4. (a) Man begründe, daß jede Lösung der Gleichung $u' = u$ die Form Ce^x mit einer reellen Konstante C hat.

   (b) Man gebe ein entsprechendes Argument für die Gleichung $u'' + u = 0$ mit der zweiparametrigen Schar von Lösungen $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ an.