

Übungen zu Numerik partieller Differentialgleichungen Blatt 7

Aufgabe 24 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, zeigen Sie, dass mit $u \in W^{1,2}(\Omega)$ auch die Funktionen

$$\max\{u(x), 0\}, |u| \in W^{1,2}(\Omega).$$

Betimmen Sie die schwachen Ableitungen dieser Funktionen.

Aufgabe 25 Zeigen Sie: Ist $u_n \in W^{2,2}([0, 1])$ eine Folge mit $u_n \rightarrow u$ und $u_n'' \rightarrow v$ (Konvergenz jeweils in $L^2([0, 1])$), so ist u_n' bzgl. der L^2 -Norm eine Cauchyfolge.

Aufgabe 26 (a) In einem Banachraum X wird eine Menge $S \subset X$ als *total beschränkt* bezeichnet, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ gilt: es gibt eine endliche Menge $N \subset X$, mit

$$S \subset N + B_\varepsilon(0).$$

Zeigen Sie, eine Menge in einem Banachraum X ist genau dann kompakt, falls sie total beschränkt ist.

(b) Mit ℓ_p bezeichnen wir den Raum der Zahlenfolgen

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \text{ mit } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

Mit

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wird ℓ^p für $p \geq 1$ zum Banachraum. Zeigen Sie: ℓ^1 ist stetig in ℓ^2 eingebettet. Eine Einbettung $X \rightarrow Y$ zwischen den Banachräumen X, Y heißt kompakt, wenn jede beschränkte Folge in X bzgl. der Norm in Y eine konvergente Teilfolge besitzt (dies ist gleichbedeutend damit, dass die Einheitskugel in X bzgl. der Norm in Y relativ kompakt ist). Entscheiden und begründen Sie, ob die Einbettung $\ell^1 \rightarrow \ell^2$ kompakt ist.

Aufgabe 27 Zeigen Sie die Einbettung des Raumes

$$w^{m,p} = \left\{ x \in \ell^p \mid \sum_{i=1}^{\infty} i^m |x_i|^p \leq \infty \right\}$$

nach ℓ^p ist kompakt.

Abgabe: 9.6.2008