Prof. Dr. Armin Iske
Prof. Dr. Reiner Lauterbach SS 2008

Übungen zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 5

Aufgabe 17 Zeigen Sie:

(a) Zu jedem metrischen Raum (X, d) gibt es eine Vervollständigung $(\hat{X}, \hat{d})$, d.h. $(\hat{X}, \hat{d})$ ist ein vollständiger metrischer Raum und es gibt eine Isometrie $i : X \to \hat{X}$ mit $i(X)$ liegt dicht in $(\hat{X}, \hat{d})$.

(b) Ist X ein linearer Raum, so ist $\hat{X}$ ebenso ein linearer Raum.

(c) $\left(X = C([0,1]; \mathbb{R}),\ d(f,g) = \int\limits_0^1 |f - g|\, ds \right)$ ist nicht vollständig. Was ist $\hat{X}$?

Aufgabe 18 (a) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ gegeben, $h = \frac{1}{n+1}, k = \frac{1}{m+1}$. $\Gamma \subset [0,1] \times [0,1]$ sei das Gitter (ih, jk) mit $0 \leq i \leq n+1$, $0 \leq k \leq m+1$. Finden Sie für $u \in C^2(\Omega)$ eine Näherung von $\Delta u(ih, jk)$ die von den Werten von u an den Punkten $((i-1)h, jk), (ih, jk), ((i+1), jk), (ih, (j-1)k), (ih, (j+1)k)$ abhängt.

(b) Berechnen Sie mit matlab oder octave eine Näherungslösung von $\Delta u = 1$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Wählen Sie $m = n = 10, 100$. Geben Sie die Lösungen graphisch aus.

(c) Berechnen Sie eine Näherungslösung von $\Delta u + 2\pi^2 u = 1$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$ wie in der Aufgabe zuvor.

Aufgabe 19 Es seien X, Y Banachräume, $F : X \to Y$ sei stetig. Man zeige: ist $x_0 \in X$ gegeben und gibt es eine stetige lineare Abbildung $L : X \to Y$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|_X} \|F(x_0 + h) - F(x_0) - Lh\|_Y = 0,$$

so ist L dadurch eindeutig bestimmt. $L = F'(x_0)$ heißt Ableitung von F im Punkt x_0. Bestimmen Sie die Ableitung im Ursprung, falls diese existiert.

(a) $\mathrm{Sin} : C([0,1]; \mathbb{R}) \to C([0,1]; \mathbb{R}) : u \mapsto \sin \circ u$.

(b) $C([0,1]; \mathbb{R}) \to C([0,1]; \mathbb{R})$ mit $u \mapsto \frac{U}{1+u(0)}$, wobei U die Stammfunktion von u ist, die bei 0 verschwindet.

Aufgabe 20 Es seien X, Y Banachräume, $F : X \to Y$ differenzierbar, $F(\tilde{x}) = 0$, $D_x F(\tilde{x}) : X \to Y$ sei ein Isomorphismus. Zeigen Sie zunächst, dass $\tilde{x}$ eine isolierte Nullstelle ist. Zeigen Sie weiter, dass für einen Startwert x_0 mit $\|x_0 - \tilde{x}\|_X$ hinreichend klein, die Folge, die durch

$$x_{n+1} = x_n + D_x F(x_n)^{-1} F(x_n)$$

definiert ist, gegen x_0 konvergiert.

Abgabe: 26.5.2008