

Übungen zu Numerik partieller Differentialgleichungen Blatt 1

Aufgabe 1 Betrachten Sie das Randwertproblem (RWP)

$$u'' = f, \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

für eine gesuchte Funktion $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit vorgegebenen Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und einer gegebenen stetigen Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Untersuchen Sie zunächst allgemein die eindeutige Lösbarkeit und geben Sie gegebenenfalls Lösungen für $f(x) = 1, x, x^2$ und $\alpha = \beta = 0$ an.

Aufgabe 2 Betrachten Sie die äquidistante Unterteilung

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$$

mit $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n+1}$. Approximieren Sie den Operator $\mathcal{L} : u \mapsto u''$ bei $x_i, i = 1, \dots, n$ durch eine Linearkombination der Werte $u(x_{i-1}), u(x_i), u(x_{i+1})$. Dadurch erhalten Sie eine $n \times n$ Matrix A und eine Gleichung

$$Ax = b, \quad \text{mit } b = (f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Untersuchen Sie die Lösbarkeit von $Ax = b$. Berechnen Sie mit **Matlab** oder einen Matlab-Clone z.B. **octave** eine Näherungslösung für die in Aufgabe (1) genannten Probleme für $n = 10, 100, 1000$.

Aufgabe 3 Ersetzen Sie in Aufgabe (1) den Differentialoperator durch

$$u \mapsto u'' + u$$

und wiederholen Sie dafür, die in Aufgaben (1), (2) genannten Schritte.

Aufgabe 4 Geben Sie eine Lösung des RWP

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \\ u|_{\partial B_1(0)} &= 0 \end{aligned}$$

auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ für $f(x) = 0, 1, x^2 + y^2$ an.

Abgabe: 14.4.2008