

Übungen zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 8

Aufgabe 27 In einem Banachraum X wird eine Menge $S \subset X$ als *total beschränkt* bezeichnet, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ gilt: es gibt eine endliche Menge $N \subset X$, mit

$$S \subset N + B_\varepsilon(0).$$

Zeigen Sie, eine Menge in einem Banachraum X ist genau dann kompakt, falls sie total beschränkt ist.

Aufgabe 28 Mit ℓ_p bezeichnen wir den Raum der Zahlenfolgen

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \text{ mit } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

Mit

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wird ℓ^p für $p \geq 1$ zum Banachraum. Zeigen Sie: ℓ^1 ist stetig in ℓ^2 eingebettet.

Eine Einbettung $X \rightarrow Y$ zwischen den Banachräumen X, Y heißt kompakt, wenn jede beschränkte Folge in X bzgl. der Norm in Y eine konvergente Teilfolge besitzt (dies ist gleichbedeutend damit, dass die Einheitskugel in X bzgl. der Norm in Y relativ kompakt ist). Entscheiden und begründen Sie, ob die Einbettung $\ell^1 \rightarrow \ell^2$ kompakt ist.

Aufgabe 29 Zeigen Sie, die Soboleveinbettung

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C(\overline{\Omega}),$$

die für $mp > n$ existiert, ist kompakt.

Aufgabe 30 Betrachte die Gebiete

$$\Omega_1 = (0, 2\pi), \quad \Omega_2 = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi).$$

Wir betrachten Fourierreihen der Form

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

bzw.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{i\langle k, x \rangle}.$$

Man gebe für $\Omega = \Omega_{1,2}$ jeweils eine Bedingung an die Fourierkoeffizienten an, dafür, dass eine Funktion $u \in W^{m,2}(\Omega)$ ist. Weiterhin zeige man, $u \in L^2(\Omega)$ genau dann wenn $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$.

Abgabe: 10.6.2007