

Übungen zu Numerik partieller Differentialgleichungen Blatt 6

Aufgabe 19 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, zeigen Sie, dass mit $u \in W^{1,2}(\Omega)$ auch die Funktionen

$$\max\{u(x), 0\}, \quad |u|$$

in $W^{1,2}(\Omega)$ liegen.

Bestimmen Sie die schwachen Ableitungen dieser Funktionen.

Aufgabe 20 Zeigen Sie: Ist $u_n \in W^{2,2}([0, 1])$ eine Folge mit $u_n \rightarrow u$ und $u_n'' \rightarrow v$ (Konvergenz jeweils in $L^2([0, 1])$), so ist u_n' bzgl. der L^2 -Norm eine Cauchyfolge.

Aufgabe 21 Ein linearer Raum H mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

ist ein Prähilbertraum. Ist H ein vollständiger Prähilbertraum, so ist H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, in einem Hilbertraum H gibt es zu $x \in H$ und einem abgeschlossenen Unterraum $U \subset H$ ein $x_0 \in U$ mit

$$\forall y \in U : \quad \|x - x_0\| \leq \|x - y\|.$$

Aufgabe 22 Es sei V ein reeller linearer Raum, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit

$$\forall 0 \neq v \in V : \quad a(v, v) > 0,$$

und $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine lineare Abbildung. Wir definieren

$$J(v) = a(v, v) - \ell(v).$$

(a) Zeigen Sie: es gibt höchstens ein Minimum für J in V .

(b) Notwendig dafür, dass u ein Minimum für J ist, ist, dass

$$\forall v \in V : \quad a(u, v) = \ell(v).$$

Abgabe: 14.5.2007