Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Prof. Dr. Jens Struckmeier SS 2007

Übungen zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 4

Aufgabe 11 Zeigen Sie, zu jedem metrischen Raum (X, d), gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ mit $X \subset \hat{X}$ dicht und $\hat{d}_{|X} = d$. Der metrische Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ heißt die Vervollständigung von (X, d). Zeigen Sie weiter, dass die Vervollständigung eines linearen metrischen Raumes ein vollständiger metrischer linearer Raum ist, d.h., dass die die Linearität bei der Vervollständigung erhalten bleibt.

Aufgabe 12 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $X = C_b(\Omega)$ und $\int \ldots\ dx$ stehe für das Riemann Integral auf Ω. Sei

$$d(u, v) = \int\limits_{\Omega} |u(x) - v(x)|\ dx.$$

Zeigen Sie (X, d) ist nicht vollständig. Geben Sie eine sorgfältige Begründung!

Aufgabe 13 (a) Was ist dann die Vervollständigung von (X, d) aus der vorigen Aufgabe? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Es sei d die Metrik aus der vorigen Aufgabe, $X = C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ sei der Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger. Was ist $(\hat{X}, \hat{d})$.
(Hinweis: Satz von Hahn-Banach).

Aufgabe 14 Man betrachte das Gebiet

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 < 1,\ \ x < 0 \text{ oder } y > 0 \right\}.$$

Suchen Sie eine harmonische Funktion auf Ω, welche auf den Teilen des Randes von Ω, die Teil einer Gerade sind, verschwindet und mit

$$u(e^{i\varphi}) = \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right)$$

auf dem verbleibenden Randstück. Hinweis: betrachten Sie für geeignetes $a \in \mathbb{Q}$ eine Funktion z^a und gewinnen Sie daraus die Lösung.

Abgabe: 30.4.2007