

Übungen zu Numerik partieller Differentialgleichungen Blatt 2

Aufgabe 3 (a) Zeigen Sie, dass jede harmonische Funktion die Mittelwerteigenschaft besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass jede auf einem Gebiet stetige Funktion mit Mittelwerteigenschaft auch harmonisch ist.

Aufgabe 4 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Mittelwerteigenschaft, so folgt aus: es existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit

$$u(x_0) = \inf_{x \in \Omega} u(x),$$

dass u auf Ω konstant ist. Ebenso folgt aus: es existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit

$$u(x_0) = \sup_{x \in \Omega} u(x),$$

dass u auf Ω konstant ist.

Aufgabe 5 Beweisen Sie die folgende Eindeutigkeitsaussage für Dirichletsche Randwertaufgaben: ist Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ und $r : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es höchstens eine beschränkte Lösung $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ der folgenden Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= r & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 Geben Sie für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u'' &= f \\ u(0) &= \alpha \\ u(1) &= \beta \end{aligned}$$

Lösbarkeitsbedingungen an, geben Sie für ein (eindeutig) lösbares Problem eine Darstellung der Lösung. (Hinweis: Variation der Konstanten).

Abgabe: 16.4.2007