

Übungen zu Numerik partieller Differentialgleichungen Blatt 1

Aufgabe 1 Lösen Sie das Problem

$$\begin{aligned}u_t + (e^u)_x &= 0 && \text{in } x > 0, t > 0 \\u(x, 0) &= 2 && \text{für } x > 0 \\u(0, t) &= a > 0 && \text{für } t > 0\end{aligned}$$

Inwiefern gibt es einen Unterschied zwischen $a > 2$ und $a < 2$?

Aufgabe 2 Implementieren Sie die folgenden Verfahren für die lineare Advektionsgleichung $u_t + au_x = 0$ mit Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ und $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}u_i^{j+1} &= u_i^j - a \frac{k}{2h} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) && \text{(naive Verfahren)} \\u_i^{j+1} &= u_i^j - a \frac{k}{h} (u_{i+1}^j - u_i^j) && \text{(Vorwärtsdifferenz)} \\u_i^{j+1} &= u_i^j - a \frac{k}{h} (u_i^j - u_{i-1}^j) && \text{(Rückwärtsdifferenz)} \\u_i^{j+1} &= \frac{1}{2} (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - a \frac{k}{2h} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) && \text{(Lax-Friedrichs Verfahren)} \\u_i^{j+1} &= u_i^j - a \frac{k}{2h} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + a^2 \frac{k^2}{2h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) && \text{(Lax-Wendroff Verfahren)} \\u_i^{j+1} &= u_i^{j-1} - a \frac{k}{h} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) && \text{(Leapfrog Verfahren)}\end{aligned}$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Verfahren für glatte und nicht-glatte Anfangsbedingungen, positive und negative Werte für a und unterschiedliche Gitterverhältnisse k/h (insbesondere $|ak/h| \leq 1$ und $|ak/h| > 1$). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

Abgabe: 9.4.2007