

Kapitel 1

Grundprinzipien der Funktionalanalysis

In diesem Kapitel diskutieren wir die Grundlagen der Funktionalanalysis. Diese bestehen aus i.a. nicht endlich dimensional linearen Räumen und topologischen Strukturen. Wir werden dabei nicht den allgemeinsten Fall betrachten, sondern einen Weg suchen, der für viele Anwendungen hinreichend allgemein ist, aber trotzdem Vereinfachungen zulässt. Dieses Kapitel behandelt viele Dinge, die Sie bereits kennen, dies dient auch dazu eine einheitliche Schreibweise zu vereinbaren.

Inhaltsangabe

1.1	Algebra und Topologie	2
1.1.1	Lineare Räume	2
1.1.2	Metrische Räume	7
1.1.3	Kategoriensatz	20
1.1.4	Topologische Gruppen	22
1.1.5	Lineare metrische Räume und Vervollständigung .	24
1.1.6	Stetige Lineare Abbildungen	30
1.2	Normierte Räume und Banachräume	31
1.2.1	Normierte Räume	31
1.2.2	Banachräume	33
1.3	Hahn-Banach-Sätze	40

1.3.1	Existenz von Funktionalen	41
1.3.2	Fortsetzungseigenschaften	44
1.3.3	Existenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{N}$. .	47
1.3.4	Verlorene Kompaktheit	49
1.3.5	Trennungssätze	50
1.4	Lineare Operatoren	54
1.4.1	Projektoren	54
1.4.2	Invertierbare Operatoren	57
1.5	Die Anwendungen des Kategoriensatzes	59
1.5.1	Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	59
1.5.2	Der Satz von Banach-Steinhaus	60
1.5.3	Der Satz von der offenen Abbildung	62
1.5.4	Der Satz vom abgeschlossenen Graphen	66
1.5.5	Satz vom abgeschlossenen Wertebereich	66

1.1 Algebra und Topologie - ein starkes Duo

1.1.1 Lineare Räume

Im folgenden sei $\mathbb{K}$ ein Körper und zwar vereinbaren wir, dass $\mathbb{K}$ immer für einen der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht. Es wird Beispiele von Aussagen geben, die nur für einen der beiden Körper wahr sind, dann werden wir darauf hinweisen. Alle Aussagen, die mit $\mathbb{K}$ formuliert werden, gelten für beide Körper. V sei im folgenden ein linearer Raum über $\mathbb{K}$. Da die lineare Algebra sich oft auf **endlich** dimensionale Räume beschränkt, wollen wir hier ein paar Begriffe speziell für den unendlich dimensionalen Kontext wiederholen.

Definition 1.1.1.1

Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

1. Ein Element $x \in V$ heißt Linearkombination der Familie von Vektoren $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$, wobei A eine beliebige Indexmenge ist, falls es eine zugehörige

Familie von Skalaren $\lambda^\alpha \in \mathbb{K}$ gibt, von denen höchstens endlich viele von Null verschieden sind, mit

$$x = \sum_{\alpha \in A} \lambda^\alpha x^\alpha.$$

2. Eine Linearkombination

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda^\alpha x^\alpha$$

mit höchstens endlich vielen von null verschiedenen Koeffizienten heißt nichttrivial wenn mindestens einer der Koeffizienten von null verschieden ist.

3. Eine Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$ heißt linear unabhängig, falls aus

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda^\alpha x^\alpha = 0$$

folgt, dass alle $\lambda^\alpha = 0$ sind.

4. Eine Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$ erzeugt V , wenn jedes Element $x \in V$ sich als Linearkombination der Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$ darstellen lässt.

5. Eine linear unabhängige Menge $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$ heißt Basis von V , falls $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$ den Raum V erzeugt.

Wir erinnern an die folgenden elementaren Aussagen der Linearen Algebra.

Proposition 1.1.1.2

1. $\lambda x = 0$ gilt genau dann, wenn $\lambda = 0$ oder $x = 0$.
2. Eine Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist nicht linear unabhängig, falls es ein $\beta \in A$ gibt, mit x^β ist Linearkombination der Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$.
3. Eine Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist linear unabhängig, falls zu $x \in V$ höchstens eine Darstellung von x als Linearkombination der Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$ existiert.
4. Jeder Vektorraum hat eine Basis.
5. Je zwei Basen eines Vektorraumes haben die gleiche Mächtigkeit.

Beweis. Wir wollen nur darin erinnern, dass der Beweis der vierten Aussage auf dem Zornschen¹ Lemma beruht. Da dieses noch an anderen Stellen eine

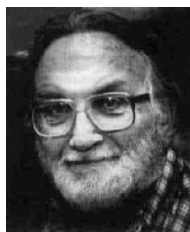


Abbildung 5: Max August Zorn (6.6.1906-9.3.1993)

wichtige Rolle spielen wird, wollen wir es nun formulieren. □

Satz 1.1.1.3 (Zornsches Lemma)

Sei $(\mathcal{M}, \leq)$ eine nichtleere geordnete Menge, so dass jede total geordnete Menge ein obere Schranke besitzt. Dann besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element.

Dabei ist eine *geordnete Menge* eine Menge X , auf der eine *Relation* $R(x, y)$ durch $x \leq y$ definiert ist, so dass gilt

1. $x \leq x$ für jedes $x \in X$.
2. $x \leq y, y \leq z$ implizieren $x \leq z$.
3. Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

Eine Menge $N \subset X$ heißt *total geordnet*, falls für jedes Paar $x, y \in X$ entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Eine obere Schranke einer total geordneten Teilmenge N ist ein Element $s \in \mathcal{M}$, so dass für jedes $x \in N$ gilt, $x \leq s$. Ein maximales Element in X ist ein Element $x^* \in X$, so dass für alle $x \in X$ gilt, $x \leq x^*$.

Definition 1.1.1.4

Nach Proposition 1.1.1.2 sind je zwei Basen gleichmächtig. Daher sind die hierzu definierenden Begriffe nicht abhängig von der Auswahl der Basis. Ein

¹Max August Zorn (6.6.1906-9.3.1993) studierte und promovierte an unserer Hochschule. Er wurde von den Nazis verfolgt und emigrierte in die USA. Sein mathematisches Werk umfasst Gruppentheorie, Mengenlehre, aber auch reelle und komplexe Analysis, wie auch Funktionalanalysis. Am bekanntesten ist das nach ihm benannte Lemma, das äquivalent zum Auswahlaxiom und dem Wohlordnungssatz ist. Eine überraschende Konsequenz ist die Existenz nicht messbarer Mengen.

Raum mit einer endlichen Basis heißt endlich dimensional. In einem endlich dimensionalen Raum heißt die Anzahl der Basiselemente die Dimension des Vektorraumes.

Beispiel 1.1.1.5

1. Ein erstes Beispiel eines linearen Raumes über $\mathbb{K}$ ist der Raum $\mathbb{K}^n$. Dieser Raum ist die Menge aller n -Tupel

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, k_i \in K.$$

Die Addition zweier solcher Elemente ist komponentenweise zu verstehen, also

$$\begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_2^1 \\ \vdots \\ k_n^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^2 \\ k_2^2 \\ \vdots \\ k_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 + k_1^2 \\ k_2^1 + k_2^2 \\ \vdots \\ k_n^1 + k_n^2 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation mit Skalaren ist ebenfalls komponentenweise zu verstehen, also

$$\lambda \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda k_1 \\ \lambda k_2 \\ \vdots \\ \lambda k_n \end{pmatrix}.$$

Es ist einfach nachzuprüfen, dass alle Bedingungen eines Vektorraumes erfüllt sind. Die Menge

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich linear unabhängig und erzeugend, also eine Basis.

2. Wichtiger sind für uns in dieser Vorlesung Funktionenräume, d.h. gegeben sei eine Menge Ω , wir betrachten als Vektorraum V alle Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$. Die Addition in V ist punktweise erklärt, nämlich

für $f_1, f_2 \in V$ durch

$$(f_1 + f_2)(\omega) = f_1(\omega) + f_2(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Die skalare Multiplikation durch

$$(\lambda f)(\omega) = \lambda f(\omega).$$

Man erkennt unschwer, dass durch die Wahl $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ das erste Beispiel in dieser Klasse von Beispielen bis auf Isomorphie integriert wird.

3. Aus dem eben gezeigten Beispiel werden durch Zusatzforderungen an die Funktionen bzw. Einschränkungen an Ω viele wichtige Beispiele gewonnen. Als konkretes Beispiel für diese Konstruktion betrachten wir z.B. den Raum $V = C([0, 1]; \mathbb{R})$, d.h. die Menge aller reellwertigen, stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$. Für diesen Raum geben wir keine Basis an (warum?). Wir werden sehen, dass andere Konzepte uns erlauben werden, solche Räume hinreichend gut zu verstehen.

Wir erinnern an den Begriff der linearen Abbildung zwischen zwei Vektorräumen und fassen die relevanten Aussagen wieder als Satz zusammen.

Satz 1.1.1.6

Es seien V_1, V_2 Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $L : V_1 \rightarrow V_2$ eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung. Dann gilt:

1. $\ker L$ ist ein linearer Unterraum von V_1 .
2. $\text{BILD}(L)$ ist ein linearer Unterraum von V_2 .
3. L ist genau dann injektiv, wenn $\ker L = \{0\}$ ist.
4. Ist L injektiv, so gibt es eine lineare Abbildung $L^\# : \text{BILD}(L) \rightarrow V_1$ mit $L^\# \circ L = \mathbb{1}_{|V_1}$.
5. $L^\#$ ist injektiv und $L \circ L^\# = \mathbb{1}_{|\text{BILD}(L)}$.

Beweis. Alle Aussagen sind aus der linearen Algebra bekannt. □

Lemma 1.1.1.7

Die Menge der linearen Abbildungen $\{L : V_1 \rightarrow V_2 \mid L \text{ ist linear}\}$ bildet bezüglich der natürlichen Operationen

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2)x &= L_1x + L_2x \\ (\lambda L)x &= \lambda(Lx)\end{aligned}$$

einen linearen Raum.

Beweis. Bekannt! □

Spezielle lineare Abbildungen sind lineare Abbildungen von X in den zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$, die nach dem oben stehenden Lemma 1.1.1.7 einen linearen Raum bilden.

Definition 1.1.1.8

Der lineare Raum $\{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist linear}\}$ heißt der algebraische Dualraum von X und wird mit X^* bezeichnet.

Definition 1.1.1.9

Ist $L : V \rightarrow W$ linear, so ist die duale Abbildung $L^* : W^* \rightarrow V^*$ definiert durch

$$(L^*w^*)(v) = w^*(Lv).$$

1.1.2 Metrische Räume

In dem zuletzt genannten Beispiel 1.1.1.5 (3) haben wir neben der linearen Struktur ein weiteres Konzept, nämlich wir kennen einen *Konvergenzbegriff*. Was steckt dahinter? Wir betrachten Folgen von Funktionen und können entscheiden, ob diese Folgen *konvergent* sind. Diese Konstruktion ist wichtig genug, um erst einmal die formalen Grundlagen zu diskutieren. Wir definieren erst den Begriff eines topologischen Raumes und sprechen dann über den Spezialfall eines metrischen Raumes. Wir beginnen mit einer Menge X , $\mathfrak{P}(X)$ sei die Potenzmenge von X , also die Menge aller Teilmengen.

Topologische Räume**Definition 1.1.2.1**

Eine Teilmenge $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt Topologie auf X , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

1. $\emptyset \in \mathfrak{T}$;

2. $X \in \mathfrak{T}$;
3. Ist $\{A_1, \dots, A_n\}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{T}$, so ist $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathfrak{T}$;
4. für eine beliebige Familie $A_\iota \in \mathfrak{T}$ gilt

$$\bigcup_{\iota} A_\iota \in \mathfrak{T}.$$

Das Paar $(X, \mathfrak{T})$ nennt man einen topologischen Raum. Die Elemente von $\mathfrak{T}$ werden als offene Mengen bezeichnet. Jede offene Menge heißt auch Umgebung von jedem ihrer Punkte. Allgemeiner nennt man eine Menge K eine Umgebung eines Punktes $x \in K$, wenn es eine offene Umgebung U von x gibt mit $x \in U \subset K$. Eine Menge C heißt abgeschlossen, falls das Komplement $X \setminus C$ offen ist.

Definition 1.1.2.2

1. Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ heißt hausdorffsch², falls es zu je zwei



Abbildung 6: Felix Hausdorff (8.11.1868-26.1.1942)

Punkten $x_1, x_2 \in X$ offene Mengen $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (Trennungseigenschaft).

²nach Felix Hausdorff (8.11.1868-26.1.1942). Von ihm stammen wesentliche Beiträge zur Mengenlehre und Topologie. Er entging einer Deportation im Jahre 1942 nur, indem er zusammen mit seiner Frau aus dem Leben schied.

2. Ist $A \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$, so nennt man die kleinste abgeschlossene Menge, welche A enthält, den Abschluss von A . Wir schreiben dafür $\bar{A}$. In anderen Worten, wir haben

$$\bar{A} = \bigcap_{C \supset A, C \text{ ist abgeschlossen}} C.$$

3. Ist $A \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$, so nennt man die größte darin enthaltene offene Menge das Innere von A , als Symbol schreiben wir $\overset{\circ}{A}$. Formal sieht dies so aus:

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \subset A, U \text{ ist offen}} U$$

4. Es sei $K \subset X$ eine Teilmenge. Wir definieren eine Relativtopologie auf K durch

$$\mathfrak{T}_K = \{A \subset K \mid A = K \cap T, T \in \mathfrak{T}\}.$$

5. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, so nennt man eine Familie von Mengen $\{A_\iota\}_{\iota \in J}$, $A_\iota \in \mathfrak{T}$ ist eine Überdeckung von X , falls

$$X \subset \bigcup_{\iota \in J} A_\iota.$$

6. Ein topologischer Hausdorffraum heißt kompakt (überdeckungskompakt), wenn aus jeder Überdeckung eine endliche Teilmenge ausgewählt werden kann, die bereits eine Überdeckung darstellt.
7. Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Hausdorffraum X heißt konvergent gegen $y \in X$, wenn jede offene Umgebung von y bis auf endlich viele, alle Folgenglieder enthält.
8. Ein Raum wird als folgenkompakt bezeichnet, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 1.1.2.3

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Hausdorffraum. Zeigen Sie die folgenden Trennungseigenschaften.

TR1 Zu jedem $x \in X$ und jeder kompakten Menge $C \subset X$, $x \notin C$ gibt es offene Mengen U, V mit $x \in U, C \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.

TR2 Zu zwei disjunkten kompakten Mengen C_1, C_2 gibt es offene Mengen U_1, U_2 mit $C_i \subset U_i$, $i = 1, 2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Lemma 1.1.2.4

Elementare Eigenschaften kompakter Räume sind:

1. Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.
2. Kompakte Unterräume eines topologischen Hausdorffraumes sind abgeschlossen.

Beweis.

1. Sei $A \subset X$ abgeschlossen, dann ist $X \setminus A$ offen und jede offene Überdeckung von A lässt sich durch Hinzunahme von $X \setminus A$ auf ganz X fortsetzen. Die Kompaktheit von X erlaubt eine endliche Teilüberdeckung auszuwählen. Diese überdeckt dann auch A und daran ändert auch die (eventuelle) Wegnahme von $X \setminus A$ nichts.
2. Sei $C \subset X$ kompakt. Sei $x_0 \notin C$. Dann gibt es (nach [TR1]) offene Mengen U_{x_0} mit $x_0 \in U_{x_0}$ und V mit $C \subset V$ und $V \cap U_{x_0} = \emptyset$. Dann ist $x_0 \notin \overline{C}$, also $\overline{C} \subset C$.

□

Aufgabe 1.1.2.5

Man zeige, ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er die endliche Durchschnittseigenschaft (engl.: **finite intersection property**) besitzt, d.h. wenn für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen gilt, dass, falls je endlich viele nichtleeren Schnitt haben, der Schnitt aller Mengen nicht leer ist.

Definition 1.1.2.6

Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, eine Teilmenge $Z \subset X$ heißt dicht, wenn für jede nichtleere offene Menge $U \in \mathfrak{T}$ gilt, dass

$$Z \cap U \neq \emptyset.$$

Definition 1.1.2.7

Ein topologischer Raum heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge $Z \subset X$ gibt.

Definition 1.1.2.8

Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

1. Eine Teilmenge $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{T}$ heißt Basis der Topologie³, wenn jede offene Teilmenge als Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{U}$ geschrieben werden kann.
2. Gibt es eine abzählbare Basis für $\mathfrak{T}$, so sagt man die Topologie erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
3. Gibt es zu einem Punkt $x \in X$ eine abzählbare Familie $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ offener Umgebungen, so dass jede Umgebung N von x mindestens ein Element U_n umfasst, so sagen wir, x habe eine abzählbare Umgebungsbasis.
4. Hat jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis, so erfüllt die Topologie das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 1.1.2.9

Ein kompakter Hausdorffraum in dem die Topologie dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, ist folgenkompakt.

Beispiel 1.1.2.10

Beispiele topologischer Räume sind

1. $(X, \mathfrak{P}(X))$. In dieser Topologie sind (natürlich) auch alle Mengen der Form $\{x\}$ offen. Man spricht von der diskreten Topologie. Diese Topologie ist hausdorffsch, und X ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.
2. $(X, \{\emptyset, X\})$. Diese Topologie trennt keine Mengen.
3. Bezeichnet man eine Menge U in $\mathbb{R}$ als offen, wenn mit jedem Punkt noch eine ε -Umgebung in U liegt, so ist $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ ein topologischer Raum, wenn $\mathfrak{U}$ für die Menge aller offenen Mengen steht.

Die ersten beiden Beispiele legen es nahe, zwei Topologien auf der gleichen Menge vergleichen zu wollen.

³Wir beachten den doppelten Gebrauch des Wortes Basis, einmal als Basis eines linearen Raumes, dann als Basis der Topologie. Beide Begriffe sind gebräuchlich, eine Vermeidung dieser Doppeldeutigkeit ist fast unmöglich. Aus dem Kontext sollte immer klar werden, welche der beiden Begriffe gemeint ist.

Definition 1.1.2.11

Seien $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ zwei Topologien auf X . Wir nennen $\mathfrak{T}_1$ gröber als $\mathfrak{T}_2$, wenn $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$ ist. Anders ausgedrückt $\mathfrak{T}_1$ ist gröber, wenn jede offene Menge in der $\mathfrak{T}_1$ -Topologie auch offen in der $\mathfrak{T}_2$ -Topologie ist. Wir sagen in diesem Fall auch, dass $\mathfrak{T}_2$ feiner als $\mathfrak{T}_1$ ist.

Im nächsten Satz fassen wir wichtige Eigenschaften topologischer Räume zusammen. Ein Beweis der Mehrzahl der Aussagen erfolgt in den Übungen.

Satz 1.1.2.12

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Hausdorffraum. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. Ist $(X, \mathfrak{T}_1)$ hausdorffsch und gröber als $(X, \mathfrak{T}_2)$ und ist $(X, \mathfrak{T}_2)$ kompakt, so ist $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.
2. (Satz von Tychonov⁴) Produkte kompakter Mengen sind kompakt.



Abbildung 7: Andrej Nikolajewitsch Tychonov (30.10.1906-7.10.1993)

Beweis.

1. Sei also $(X, \mathfrak{T}_1)$ hausdorffsch und $(X, \mathfrak{T}_2)$ kompakt und $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$. Zu zeigen ist $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$. Sei $A \in \mathfrak{T}_2$, dann ist $X \setminus A$ abgeschlossen (bzgl. $\mathfrak{T}_2$), also kompakt. Dann ist $X \setminus A$ aber auch kompakt (Warum ist dies sofort klar?) in $\mathfrak{T}_1$, also abgeschlossen und damit $A \in \mathfrak{T}_1$.

⁴Andrej Nikolajewitsch Tychonov (30.10.1906-7.10.1993) studierte und lehrte an der Universität Moskau. Seine Schwerpunkte sind die Topologie und die Funktionalanalysis. In seinen wissenschaftlichen Arbeiten hat er sich aber auch mit Differentialgleichungen und Anwendungen der Mathematik beschäftigt.

2. Für die diese Aussage verweisen wir auf die Literatur [18].

□

Definition 1.1.2.13

1. Es seien $(X, \mathfrak{T}_X)$ und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ topologische Räume, eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt stetig, falls für jede offene Menge $V \in \mathfrak{T}_Y$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_X$, oder in Worten: Urbilder offener Mengen sind offen.
2. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt offen, falls Bilder offener Mengen in X offen in Y sind.
3. Ist $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, so nennt man f einen Homöomorphismus, falls f und f^{-1} beide stetig sind.

Aufgabe 1.1.2.14

1. Man zeige, $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, falls die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.
2. Ist f bijektiv, stetig und offen, so ist f ein Homöomorphismus.
3. Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt. Gilt die Umkehrung dieser Aussage?
4. f ist genau dann stetig, wenn für jede Teilmenge gilt $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Eine wichtige Konstruktion ist die sogenannte *Quotientenbildung*. Gegeben sei ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ und eine Äquivalenzrelation auf X , die wir als $x \sim y$ schreiben. Mit $[x]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse und mit $X/\sim$ den *Quotientenraum* oder auch die Menge der Äquivalenzklassen. Es gibt eine Abbildung $\Pi : X \rightarrow X/\sim : x \mapsto [x]$. Die Verknüpfung von Äquivalenzrelationen und Topologie wird durch folgende Definition hergestellt.

Definition 1.1.2.15

Eine Äquivalenzrelation heißt abgeschlossen, wenn für jedes $x \in X$ die Klasse $[x]$ abgeschlossen ist.

Definition 1.1.2.16

Wir definieren eine Topologie $\mathfrak{T}_Q$ auf $\mathcal{X} = X/\sim$ als die feinste Topologie, so dass Π stetig ist. Diese Topologie wird als Quotiententopologie bezeichnet.

Es ist leicht nachzuprüfen, dass $(X/\sim, \mathfrak{T}_Q)$ ein topologischer Raum ist.

Satz 1.1.2.17

Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine abgeschlossene Äquivalenzrelation auf X und Y ein topologischer Raum. Dann ist $f : X/\sim \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \Pi$ stetig ist.

Beweis. Klar! □

Beispiel 1.1.2.18

Wir betrachten $\mathbb{R}$, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Die Quotientenbildung identifiziert Punkte.

Man beachte, dass die Frage ob Quotiententopologien hausdorffsch sind, falls der ursprüngliche Raum hausdorffsch ist, nicht leicht zu beantworten ist. Notwendig dafür ist offensichtlich, dass die Relation abgeschlossen ist. Dies ist aber im allgemeinen nicht hinreichend.

Metrische Räume

Wir wollen nun eine Spezialisierung betrachten und metrische Räume betrachten.

Definition 1.1.2.19

Es sei X eine Menge, eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ heißt Metrik, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

M1 $d(x, y) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = y$.

M2 $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

M3 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Das Paar (X, d) wird dann als metrischer Raum bezeichnet. Die Eigenschaft (M3) wird als Dreiecksungleichung bezeichnet.

In einem metrischen Raum hat man auf eine natürliche Weise eine Topologie.

Definition 1.1.2.20

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ nennen wir metrisch offen, wenn zu jedem Punkt $x \in U$ ein positive Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die ε -Kugel $B_\varepsilon(x)$, definiert durch

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\},$$

in U enthalten ist.

Lemma 1.1.2.21

Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann bildet die Menge der metrisch offenen Mengen $\mathfrak{T}_d$ eine Topologie auf X . Wir nennen $\mathfrak{T}_d$ auch eine metrische Topologie.

Beweis. Leicht nachzuprüfen! $\square$

Satz 1.1.2.22

Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.

Beweis. Da ein metrischer Raum dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, ist die erste Richtung schon in Aufgabe 1.1.2.9 gezeigt. Für die Umkehrung sei auf die Literatur (z. B. WERNER [30] Satz B.1.7) verwiesen. $\square$

Man beachte, dass in allgemeinen Hausdorffräumen weder die Kompaktheit die Folgenkompaktheit impliziert noch umgekehrt die Folgenkompaktheit die Kompaktheit. Ein Gegenbeispiel für die erste Behauptung ist das überabzählbare Produkt I^I ($I = [0, 1]$). Der Satz von Tychonov 1.1.2.12 gewährleistet die Kompaktheit. Dieser Raum ist nicht folgenkompakt, man betrachte die Folge von Abbildungen $\alpha_n : I \rightarrow I$ mit $\alpha_n(x)$ ist der n -te Term in der Binärdarstellung von x . Diese Folge hat keine Häufungspunkte, siehe auch STEEN & SEEBACH [28]. Ein Gegenbeispiel für die zweite Behauptung ist die „lange Gerade“ [28].

Für metrische Topologien gibt es ein weiteres Kriterium für Stetigkeit, das sogenannte $\varepsilon - \delta$ -Kriterium:

Lemma 1.1.2.23 (Stetigkeit in metrischen Topologien)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f ist bezüglich der jeweiligen Topologien $\mathfrak{T}_{d_X}$ bzw. $\mathfrak{T}_{d_Y}$ genau dann stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_X(x, y) < \delta$ impliziert, dass $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Beweis. Sei $f(x) = y$ und $B_\varepsilon(y)$ eine offene Kugel mit Radius $\varepsilon > 0$ um y . Nun ist $f^{-1}(B_\varepsilon(y))$ nach Definition der Stetigkeit offen, also gibt es ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y))$. Damit ist $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(y)$.

Für die andere Richtung, sei das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium erfüllt und $U \subset Y$ offen. Zu $f(x) = y \in U$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, so dass $B_\varepsilon(y) \subset U$ und $\delta > 0$ wie im $\varepsilon - \delta$ -Kriterium. Dann ist $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y)) \subset f^{-1}(U)$. $\square$

Bemerkung 1.1.2.24

In einem metrischen Raum (X, d) ist eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergent*, wenn es ein $x_0 \in X$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$n > N \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Definition 1.1.2.25

1. Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge⁵, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine



Abbildung 8: Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789-22.5.1857)

Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$n, k > N \Rightarrow d(x_n, x_k) < \varepsilon.$$

2. Schließlich heißt der metrische Raum vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergent ist.
3. Mit $\mathfrak{C}(X)$ werde die Menge aller Cauchy-Folgen auf (X, d) bezeichnet.

Eine wichtige Konstruktion ordnet jedem metrischen Raum X einen metrischen Raum $\hat{X}$ zu, der zwei wesentliche Eigenschaften hat: $\hat{X}$ ist erstens vollständig, und zweitens kann man X als dichten Teilraum von $\hat{X}$ auffassen.

⁵Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789-22.5.1857) war Sohn eines hohen Beamten und genoss demzufolge eine gute Privatausbildung. Nach einem ingenieurwissenschaftlichen Studium eignete er sich nebenbei Werke von Lagrange an. Im Jahr 1811 löste er ein Problem, das Lagrange formuliert hatte. Er arbeitete über Integrale, Strömungsmechanik und Elastizitätstheorie. Speziell die Arbeiten zum letztgenannten Bereich machten ihn zu einem der bekanntesten Mathematiker seiner Zeit. Im weiteren arbeitete er auf vielen Gebieten, sein Hauptarbeitsgebiet wurde die Analysis mit der Theorie von Differentialgleichungen. Nach Gauß begann er mit komplexen Zahlen und der zugehörigen Analysis zu arbeiten. Cauchy war extrem produktiv und dies sehen wir noch heute an vielen Konzepten, die seinen Namen tragen.

Definition 1.1.2.26

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $C_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, \dots\}$ seien für $i = 1, 2$ zwei Cauchyfolgen. Wir nennen diese äquivalent, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^1, x_n^2) = 0$$

ist. Wir schreiben dafür $C_1 \sim C_2$.

Satz 1.1.2.27 (Vervollständigung von metrischen Räumen)

Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{C}(X)$. Sei $\hat{X} = \mathfrak{C}(X)/\sim$ und $[C]$ die Äquivalenzklasse der Cauchy-Folge C , dann definiert (mit $C_i = (x_1^i, x_2^i, \dots)$, $i = 1, 2$)

$$\hat{d}([C_1], [C_2]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^1, x_n^2)$$

eine Metrik auf dem Raum $\hat{X}$, welche diesen zum vollständigen, metrischen Raum macht. Die Abbildung

$$i : X \rightarrow \hat{X} : x \mapsto [(x, x, x, \dots, x, \dots)]$$

von X nach $\hat{X}$ ist injektiv und isometrisch⁶, d.h. eine Einbettung von X in $\hat{X}$. Das Bild von X unter dieser Abbildung liegt dicht in $\hat{X}$.

Beweis. Die wesentlichen Schritte im Beweis sind:

1. $\hat{d}$ ist wohldefiniert, d.h. die Wahl anderer Folgen in der gleichen Klasse führt zum gleichen Ergebnis.
2. $\hat{d}$ ist eine Metrik auf $\mathfrak{C}(X)/\sim$.
3. Der Raum ist vollständig.
4. Die angegebene Abbildung ist injektiv und isometrisch.
5. X liegt dicht in $\hat{X}$.

Wir beginnen mit der Wohldefiniertheit. Seien $[C], [D]$ zwei Klassen und $C_{1,2}, D_{1,2}$ jeweils zwei Repräsentanten dieser Klassen, also

$$C_i = \{x_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad D_i = \{y_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad i = 1, 2.$$

⁶Eine Abbildung f zwischen zwei metrischen Räumen X, Y heißt isometrisch, falls $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ gilt.

Dann ist

$$d(x_n^2, y_n^2) \leq d(x_n^2, x_n^1) + d(x_n^1, y_n^1) + d(y_n^1, y_n^2)$$

und

$$d(x_n^1, y_n^1) \leq d(x_n^1, x_n^2) + d(x_n^2, y_n^2) + d(y_n^2, y_n^1).$$

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$n > N_1 \Rightarrow d(x_n^1, x_n^2) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > N_2 \Rightarrow d(y_n^1, y_n^2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also ist für $n > \max\{N_1, N_2\}$

$$d(x_n^1, y_n^1) - \varepsilon < d(x_n^2, y_n^2) < d(x_n^1, y_n^1) + \varepsilon.$$

Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

Als nächstes muss gezeigt werden, dass $\hat{d}$ eine Metrik ist. Dabei sind alle Behauptungen außer der Dreiecksungleichung vollständig klar, diese folgt aus einer einfachen Überlegung: da wir die Wohldefiniertheit bereits gezeigt haben, reicht es die Dreiecksungleichung für drei Repräsentanten zu beweisen. Seien also $C_i = \{x_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ drei Cauchyfolgen, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n^1, x_n^3) \leq d(x_n^1, x_n^2) + d(x_n^2, x_n^3)$$

und die Ungleichung überträgt sich auf die Grenzwerte.

Die Vollständigkeit ergibt sich auf folgende Weise: seien $\{[C_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\hat{X}$, die bezüglich $\hat{d}$ wiederum eine Cauchyfolge ist. Sei C_n der jeweilige Repräsentant von $[C_n]$. Zu $C_n = \{x_j^n\}_{j \in \mathbb{N}}$ existiert ein Index $k(n)$, so dass für $l, m \geq k(n)$ gilt

$$d(x_m^n, x_l^n) \leq \frac{1}{n}.$$

O.B.d.A. wählen wir die $k(n)$ als monoton nicht fallend in n . Setze

$$y_n = x_{k(n)}^n.$$

Zu zeigen ist, $D = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \hat{d}([C_j], [D]) = 0.$$

Wir beginnen damit, zu zeigen, dass die Folge D eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$m, j > N \Rightarrow \hat{d}([C_m], [C_j]) < \frac{\varepsilon}{8}. \quad (1.1.2.28)$$

Dann ist für $m > j > \max\{N, \frac{4}{\varepsilon}\}$

$$\begin{aligned}
 d(y_j, y_m) &= d(x_{k(j)}^j, x_{k(m)}^k) \\
 &\leq d(x_{k(j)}^j, x_{k(m)}^j) + d(x_{k(m)}^j, x_{k(m)}^m) \\
 &\leq \frac{1}{j} + d(x_{k(m)}^j, x_r^j) + d(x_r^j, x_r^m) + d(x_r^m, x_{k(m)}^m) \\
 &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

sofern nur r hinreichend groß gewählt wird.

Im nächsten Schritt ist zu zeigen, dass $\hat{d}([D], [C_i]) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$.

Damit muss gezeigt werden, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n^i) = 0.$$

Wir verwenden, dass $\{[C_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, indem wir aus Gleichung (1.1.2.28) folgern, dass es zu einem Paar (i, j) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n^i, x_m^j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

falls $i, j > N$ und $n, m > n_0$. Damit schätzen wir für $i, n > n_0$, $n > k(i)$ und hinreichend großem m ab

$$\begin{aligned}
 d(y_n, x_n^i) &= d(x_{k(n)}^n, x_n^i) \\
 &\leq d(x_{k(n)}^n, x_{k(i)}^i) + d(x_{k(i)}^i, x_n^i) \\
 &\leq d(x_{k(n)}^n, x_m^n) + d(x_m^n, x_m^i) + d(x_m^i, x_{k(i)}^i) + d(x_{k(i)}^i, x_n^i) \\
 &< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i} \\
 &< \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung sofort. Für die Abbildung i hat man (offenkundig)

$$\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y).$$

Also ist i eine Isometrie. Daraus folgt, dass i injektiv ist. Bleibt noch zu zeigen, dass $i(X)$ dicht in $\hat{X}$ liegt. Sei $C = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X und $[C]$ das zugehörige Element in $\hat{X}$. Dann konvergiert $i(x_n)$ gegen $[C]$ bzgl. $\hat{d}$. $\square$

Beispiel 1.1.2.29

1. Mit $d(x, y) = |x - y|$ wird $(\mathbb{K}, d)$, zum metrischen Raum. Die Vollständigkeit von $(\mathbb{Q}, d)$ ist $\mathbb{R}$ und die von $(\mathbb{Q} + \mathbf{i}\mathbb{Q}, d)$ ist $\mathbb{C}$.
2. $(\mathbb{K}^n, d)$ wird mit $d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$ zum metrischen Raum.
3. Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, so definiert man eine Topologie $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}$ auf $X \times X$, indem man eine Basis $\mathfrak{B}$ für die Topologie angibt:

$$\mathfrak{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1, U_2 \in \mathfrak{T}\}.$$

Ist $\mathfrak{T}$ eine metrische Topologie mit Metrik d , so ist auch $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}$ metrisch. Die zugehörige Metrik ist nicht eindeutig, eine Wahl dafür ist

$$d_{X \times X}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2).$$

4. Entsprechend definiert man auch eine Topologie auf $X \times Y$, wenn $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ topologische Räume sind. Sind beide Topologien metrisch, so ist auch die Topologie auf $X \times Y$ metrisch.

Aufgabe 1.1.2.30

Man gebe eine andere Metrik auf $X \times X$ an, die zur gleichen Topologie führt!

1.1.3 Kategoriensatz

In diesem Abschnitt begegnen wir einer Eigenschaft vollständiger metrischer Räume, die sich als Grundlage der fundamentalen Prinzipien der Funktionalanalysis erweist. Diese werden wir im Abschnitt 1.5 ausführlich studieren.

Satz 1.1.3.1

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$, $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine abzählbare Familie abgeschlossener Teilmengen von X . Ist

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k,$$

so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass das Innere von A_{k_0} nichtleer ist.

Beweis. Wir nehmen an, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\overset{\circ}{A}_k = \emptyset.$$

Dann ist für jede offene Menge $\emptyset \neq U \subset X$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U \setminus A_k$$

offen und nichtleer. Insbesondere gibt es zu $x \in U \setminus A_k$ und $\varepsilon \leq \frac{1}{k}$ eine offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ mit

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \subset U \setminus A_k.$$

Wir konstruieren nun eine Folge von Punkten x_k und Kugeln $B_{\varepsilon_k}(x_k)$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1})$$

und $\varepsilon_k \leq \frac{1}{k}$. Sei U offen wie zuvor. Wähle $\varepsilon_1 \leq 1$ und $x_1 \in U \setminus A_1$, so dass $\overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset U \setminus A_1$. Angenommen x_k, B_{ε_k} sei gewählt. Wähle $x_{k+1} \in B_{\varepsilon_k}(x_k) \setminus A_{k+1}$ und $\varepsilon_{k+1} < \frac{1}{k+1}$, so dass

$$\overline{B_{\varepsilon_{k+1}}(x_{k+1})} \subset B_{\varepsilon_k}(x_k) \setminus A_{k+1}.$$

Dies ist nach der Vorbemerkung möglich und induktiv wird eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften bestimmt.

Dann ist die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und damit konvergent, also existiert

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in X.$$

Für jedes k ist $x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}$ und da $\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \cap A_k = \emptyset$ ist $x \notin A_k$. Insbesondere ist

$$x \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = X.$$

Dieser Widerspruch beweist die Behauptung. □

Oft wird der Satz anders formuliert. Zunächst ein paar Definitionen.

Definition 1.1.3.2

Eine Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raumes ist nirgends dicht, wenn das Innere $\overset{\circ}{A}$ von $\bar{A}$ leer ist.

Definition 1.1.3.3

Eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raum heißt von erster Kategorie, wenn sie abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist, andernfalls von zweiter Kategorie.



Abbildung 9: René Louis Baire (21.1.1874-5.7.1932)

Nun besagt der *Bairesche Kategoriensatz*⁷, dass ein vollständiger metrischer Raum von zweiter Kategorie ist.

1.1.4 Topologische Gruppen

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir ein erstes Beispiel von einer Verbindung einer algebraischen und einer topologischen Struktur sehen und zwar im einfachst möglichen Fall. Auch diese Theorie ist äußerst umfangreich. Wir betrachten nur die Anfangsgründe um zu zeigen, wie die verschiedenen Strukturen zusammenwirken und nichttriviale Ergebnisse liefern.

Definition 1.1.4.1

Gegeben sei eine Gruppe $(G, \cdot)$, die gleichzeitig eine Topologie $\mathfrak{T}$ trägt. Das

⁷René Louis Baire (21.1.1874-5.7.1932) promovierte 1899 und hatte ab 1905 eine Professur an Université de Dijon. Nach 1914 war er wegen Krankheit beurlaubt. Er untersucht vor allem Fragen der reellen Analysis. Er widmete sich den Fragen die aus Mengenlehre, Topologie und reeller Analysis erwachsen. Dabei machte der Inhalt seiner Untersuchungen eine gründliche Auseinandersetzung mit den grundlegenden Konstruktionen der Mengenlehre notwendig.

Tripel $(G, \cdot, \mathfrak{T})$ wird als topologische Gruppe bezeichnet, wenn die Abbildungen

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G & : (g, h) &\mapsto g \cdot h \\ i : G &\rightarrow G & : g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

beide stetig sind.

Definition 1.1.4.2

Zwei topologische Gruppen heißen isomorph, wenn es einen Gruppenisomorphismus zwischen den beiden Gruppen gibt, der auch ein Homöomorphismus ist.

Beispiel 1.1.4.3

Beispiele für topologische Gruppen sind:

1. $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, jeweils mit der üblichen Topologie versehen. Die beiden topologischen Gruppen sind isomorph.
2. $(\mathbb{Q}, +)$ mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{R}$ ist eine topologische Gruppe. Diese Gruppe ist total unzusammenhängend.
3. Die Gruppe $(\mathbf{GL}(n), \circ)$ mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist eine topologische Gruppe.
4. Untergruppen dieser Gruppe (wie z.B. $\mathbf{SO}(n)$ etc.) sind mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{R}^{2n}$ topologische Gruppen.

Satz 1.1.4.4

In einer topologischen Gruppe sind offene Untergruppen auch abgeschlossen.

Beweis. Sei U eine offene Untergruppe einer topologischen Gruppe G . Wegen der Stetigkeit der Verknüpfung sind alle Nebenklassen xU offen. Damit ist die Vereinigung aller Nebenklassen

$$\bigcup_{x \in G \setminus U} (xU)$$

offen und U als Komplement dieser Menge ist abgeschlossen. $\square$

Aufgabe 1.1.4.5

zeigen Sie, dass in einer topologischen Gruppe G die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes ein Normalteiler ist. Dabei heißt eine Untergruppe U Normalteiler, wenn die Rechtsnebenklassen xU auch Linksnebenklassen sind, oder anders ausgedrückt, wenn für alle $x \in G$ gilt $xUx^{-1} \subset U$.

1.1.5 Lineare metrische Räume und Vervollständigung

In der Funktionalanalysis studiert man systematisch die Auswirkungen des Zusammentreffens von linearen und topologischen Strukturen. Wir beginnen mit einer sehr allgemeinen Definition, werden uns aber schnell auf wesentlich speziellere Situationen zurückziehen.

Definition 1.1.5.1

Ein topologischer Vektorraum $(V, +, \mathfrak{T})$ ist ein linearer Raum, der gleichzeitig die Struktur eines topologischen Raumes trägt, so dass die Addition eine stetige Abbildung $V \times V \rightarrow V$ ist und die skalare Multiplikation eine stetige Abbildung $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ ist, wobei $\mathbb{K}$ und $V \times V$ jeweils die dafür in Beispiel 1.1.2.29 definierte Topologie tragen. Ist $\mathfrak{T}$ eine metrische Topologie, so sprechen wir von einem linearen metrischen Raum.

Beispiel 1.1.5.2

1. Das erste Beispiel eines metrischen linearen Raumes ist der Raum $\mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.
2. Wir kommen zum ersten nichttrivialen Beispiel, es sei $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ eine kompakte Teilmenge, diese Menge trägt die Relativtopologie von $\mathbb{K}^n$ und bezüglich dieser betrachten wir

$$C(\Omega; \mathbb{R}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \}.$$

Wie bereits bemerkt ist dies ein linearer Raum, wir wollen nun eine Metrik auf diesem Raum definieren:

$$d(f, g) = \max_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)|.$$

Offenkundig definiert dies eine Metrik, die Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren stetig macht. Dieser Raum ist bezüglich dieser Metrik **vollständig**. Dies folgt aus dem Satz: Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.

3. Auf dem (auf gleiche Weise konstruierten) Raum $C([0, 1]; \mathbb{R})$ definieren wir eine zweite Metrik durch

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Wir prüfen die Eigenschaften einer Metrik nach:

M1 Ist $d_1(f, g) = 0$, so ist $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0$. Da der Integrand stetig und nichtnegativ ist, folgt, dass der Integrand identisch verschwindet.

M2 Ist klar.

M3 Die Dreiecksungleichung ist einfach, sie gilt punktweise und dies wird einfach aufintegriert.

In diesem Beispiel ist der Raum $(C([0, 1]; \mathbb{R}), d_1)$ **nicht vollständig**. Wie sieht man dies? Wir betrachten die Folge von Funktionen

$$f_1(x) = 1 - 2x,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2 - 4x & \text{für } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ -1 & \text{für } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Diese Funktion ist offenkundig stetig, allgemein setzen wir

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ n - 2nx & \text{für } \frac{n-1}{2n} \leq x \leq \frac{n+1}{2n} \\ -1 & \text{für } \frac{n+1}{2n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Diese Funktionen sind stetig, die Funktionenfolge ist bezüglich d_1 eine Cauchy-Folge, denn für $m \geq n$ kann man $d_1(f_n, f_m)$ abschätzen, man hat zunächst

$$1 \geq |f_m(x)| \geq |f_m(x) - f_n(x)| \geq 0$$

und da $|f_m(x) - f_n(x)| = 0$, falls $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{n}$, ist das Integral

$$\int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx \leq 1 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n}.$$

Ist dann $\varepsilon > 0$ gegeben und wählt man $m \geq n > \frac{2}{\varepsilon}$, so ist

$$d_1(f_n, f_m) \leq \varepsilon,$$

also $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Um zu zeigen, dass diese Folge nicht konvergent ist, betrachten wir den punktweisen Limes und erhalten die Funktion

$$g_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Natürlich gibt dies von vorneherein keine Auskunft über das Konvergenzverhalten der Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Metrik d_1 , aber vielleicht gibt es zumindest einen Anhaltspunkt. Wir müssen nur zeigen, dass es keine stetige Funktion gibt, die bezüglich der Metrik d_1 Grenzwert der angegebenen Folge ist. Nun, angenommen g sei stetig und es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(g, f_n) = 0.$$

Behauptung: dann ist $g(x) > \frac{1}{2}$ auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2})$ und $g(x) < -\frac{1}{2}$ auf $(\frac{1}{2}, 1]$. Dies ergibt dann einen offensichtlichen Widerspruch.

Um die aufgestellte Behauptung zu zeigen, nehmen wir an, dass es ein $0 \leq x_0 < \frac{1}{2}$ gibt mit

$$g(x_0) \leq \frac{1}{2}.$$

Aufgrund der Stetigkeit gibt es dann ein abgeschlossenes Intervall $I \subset [0, \frac{1}{2})$ der Länge $\delta > 0$ mit $g(x) < \frac{3}{4}$ auf I . Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $n > N$ impliziert $f_n(x) = 1$ für $x \in I$. Dann ist aber

$$d_1(g, f_n) \geq \delta \min \{|f_n(x) - g(x)| \mid x \in I\} \geq \delta \frac{1}{4}.$$

Dies widerspricht aber der Annahme $\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(g, f_n) = 0$. Analog beweist man den anderen Teil der Behauptung.

Nun kommen wir zum ersten wichtigen Prinzip der Funktionalanalysis. Wir wollen zeigen, dass die Vervollständigung für metrische Räume auch metrische lineare Räume zu vollständigen metrischen linearen Räumen macht.

Satz 1.1.5.3

Es sei (V, d) ein metrischer linearer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen linearen Raum $(W, \hat{d})$ und eine injektive stetige lineare Abbildung $T : V \rightarrow W$, so dass

$$d_W(Tv, Tw) = d_V(v, w)$$

für alle $v, w \in V$. Der Raum $T(V)$ ist ein linearer Unterraum, der dicht in W liegt.

Beweis. Ist V vollständig, so ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall betrachten wir den Raum

$$W = \hat{V},$$

d.h. den vervollständigten Raum aus Satz 1.1.2.27. Wir müssen nur noch zeigen, dass dies ein linearer Raum ist, und dass die Einbettungsabbildung auch linear ist. Dazu müssen wir nur zeigen, dass der Raum der Cauchyfolgen auf geeignete Weise zum linearen Raum wird, und dass die Quotientenbildung diese lineare Struktur erhält. Sind $C_i = \{x_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ für $i = 1, 2$ zwei Cauchyfolgen, so setzen wir

$$C_1 + C_2 = \{x_n^1 + x_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dann ist $C_1 + C_2$ eine Cauchyfolge bzgl. der Metrik d . Gleiches gilt für λC . Sind C_i, D_i für $i = 1, 2$ äquivalent, so ist

$$[C_1 + C_2] = [D_1 + D_2] \text{ und entsprechend } [\lambda C_1] = [\lambda D_1].$$

Elementare Rechenregeln der Analysis für Grenzwerte zeigen die Stetigkeit von Addition und Multiplikation bezüglich $\hat{d}$. Also ist $(W, \hat{d})$ ein vollständiger linearer metrischer Raum. $\square$

Damit stellt sich nun die Frage, was ist $(\widehat{C([0, 1]; \mathbb{R})}, d_1)$? Können wir diesen Raum als (vielleicht sogar uns bekannten) Funktionenraum interpretieren? Gleichmaßen können wir fragen, was ergibt sich, wenn wir den Raum der Polynome über einem reellen Raum bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz vervollständigen, oder wenn wir statt der Polynome trigonometrische Polynome hernehmen. Interessant ist auch die Vervollständigung des Raumes der Treppenfunktionen bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Ein weiteres wichtiges Beispiel eines metrischen linearen Raumes sind Funktionen, die mehrfach differenzierbar sind mit einer geeigneten Metrik.

Beispiel 1.1.5.4

1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ ein beschränktes Gebiet, d.h. $\bar{\Omega}$ ist kompakt. Wir betrachten alle k -mal stetig differenzierbaren Funktionen nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, die, samt allen Ableitungen der Ordnungen höchstens k , stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzbar sind. Dieser Raum werde mit $C^k(\Omega; \mathbb{R})$ bzw. $C^k(\Omega; \mathbb{C})$ bezeichnet. Dies ist mit den üblichen Operationen ein linearer Raum. Wir definieren eine Metrik d_k durch

$$d_k(f, g) = \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)|,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex ist mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Mit dieser Metrik wird der zugrunde liegende Raum zum vollständigen metrischen Raum. Wie wir sehen werden, kann man hier sogar eine stärkere Struktur finden, nämlich die eines Banachraumes. Dies ist im nächsten Beispiel nicht der Fall.

2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ wie eben. Wir betrachten alle unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, die, samt allen Ableitungen stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzbar sind. Dieser Raum werde mit $C^\infty(\Omega; \mathbb{K})$ bezeichnet. Dieser ist natürlich mit den üblichen Operationen auch ein linearer Raum. Es sei K_n eine Familie von offenen Mengen, mit $\bar{K}_n$ ist kompakt, $\bar{K}_n \subset K_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega.$$

Setze für $f, g \in C^\infty(\Omega; \mathbb{K})$

$$p_n(f, g) = \sup \left\{ |D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| \mid |\alpha| = n \text{ und } x \in K_n \right\}.$$

Setze

$$d_{C^\infty(\Omega; \mathbb{K})}(f, g) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \frac{p_k(f, g)}{1 + p_k(f, g)}. \quad (1.1.5.5)$$

Dies macht den Raum zum metrischen linearen Raum. Eine Anwendung dieser wichtigen Konstruktion ist ein allgemeiner Satz zur stetigen Abhängigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems von der rechten Seite, siehe z.B. [23].

3. Der *Träger* einer Funktion f ist gegeben durch

$$\text{supp } f = \overline{\left\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\right\}}.$$

Damit führen wir folgende Bezeichnung ein

$$C_0^\infty(\Omega; \mathbb{K}) = \left\{f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{K}) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakt}\right\}.$$

Wir nennen dies den Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Er spielt an vielen Stellen eine wichtige Rolle. Eine Metrik für diesen Raum erhält man aus Gleichung (1.1.5.5).

Als Quelle für weitere Beispiele dienen eine Reihe von Folgenräumen.

Beispiel 1.1.5.6

1. Als erstes wollen wir beschränkte Folgen, d.h. Funktionen von $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, ansehen und setzen

$$\ell^\infty = \{\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \mathbf{x} \text{ ist beschränkt}\}.$$

ℓ^∞ ist ein linearer Raum, durch

$$d_{\ell^\infty}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^1 - x_n^2|$$

definieren wir eine Metrik, die diesen Raum zum vollständigen metrischen, linearen Raum macht.

2. Unser zweites Beispiel wird uns noch oft begegnen: setze

$$\ell^1 = \left\{\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}.$$

Dies ist ein linearer Raum, eine Metrik erhält man leicht:

$$d_{\ell^1}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^1 - x_j^2|.$$

Um nachzuprüfen, dass es sich um einen linearen Raum handelt, reicht es bekannte Sätze aus Analysis heranzuziehen. Die Eigenschaften einer Norm sind klar, die Dreiecksungleichung folgt auch wieder direkt

aus den Sätzen der Analysis. Um die Vollständigkeit dieses Raumes zu zeigen, stellen wir eine kleine Überlegung an. Sei $\{\mathbf{x}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Zunächst folgt sofort, dass $\{x_j^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes j eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist, also dass diese Folge konvergent ist und damit eine Grenzfolge $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existiert. Von dieser muss nur noch gezeigt werden, dass sie auch in ℓ^1 liegt. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest, so gilt (für hinreichend großes n)

$$\sum_{j=1}^m |x_j| = \sum_{j=1}^m |x_j - x_j^n + x_j^n| \leq \sum_{j=1}^m |x_j - x_j^n| + \sum_{j=1}^m |x_j^n| \leq \varepsilon + \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathbf{x}^n\|_{\ell^1}$$

ist unabhängig von m beschränkt. Die Folge dieser Teilsummen ist monoton wachsend, also konvergent und $\mathbf{x} \in \ell^1$. Außerdem gilt $\mathbf{x}^n \rightarrow \mathbf{x}$ (vgl. den Beweis zu Satz 2.1.2.4).

1.1.6 Stetige Lineare Abbildungen

Wir beginnen mit metrischen linearen Räumen $(V, d_V), (W, d_W)$. Wir wissen bereits, was es bedeutet, dass eine Abbildung linear ist. Hier wollen wir noch zusätzlich die Stetigkeit hinzunehmen.

Definition 1.1.6.1

1. Es seien $(V, d_V), (W, d_W)$ metrische lineare Räume und $L : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Ist L zusätzlich stetig, so sprechen wir von einer stetigen linearen Abbildung.
2. Ist L ein linearer Isomorphismus und ein Homöomorphismus, so nennen wir L einen toplinearen Isomorphismus.

Lemma 1.1.6.2

Es seien $(V, d_V), (W, d_W)$ metrische lineare Räume, $L : V \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung.

1. Der Kern von L ist abgeschlossen.
2. Das Bild von L ist ein metrischer linearer Raum.

Beweis. Die erste Aussage folgt daraus, dass $\{0\} \subset W$ abgeschlossen ist, und das Urbild abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen abgeschlossen ist.

Der zweite Punkt ist trivial, die Einschränkung von d_W auf das Bild von L macht dies zum metrischen linearen Raum. $\square$

Oft will man die Menge der stetigen linearen Abbildungen $V \rightarrow W$, die ja einen linearen Raum bildet, selbst mit einer Topologie versehen. Wir stellen dies noch ein wenig zurück und beschränken uns dabei auf die Fälle normierter Räume, die wir im nächsten Kapitel einführen wollen.

1.2 Normierte Räume und Banachräume

In diesem Kapitel führen wir eine weitere Struktur ein, die in vielen Anwendungen der Funktionalanalysis eine zentrale Rolle spielt.

1.2.1 Normierte Räume

Es sei $(V, +)$ ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

Definition 1.2.1.1

Eine Abbildung

$$\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt Norm auf dem Raum V , falls sie folgenden Forderungen genügt.

N1 $\|v\|_V = 0 \iff v = 0;$

N2 $\|\lambda v\|_V = |\lambda| \|v\|_V$ für $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$;

N3 $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$ für alle $v, w \in V$.

Ist V ein linearer Raum mit Norm $\|\cdot\|_V$, nennt man das Paar $(V, \|\cdot\|_V)$ einen normierten Raum (beachte für alle $v \in V$ gilt $\|v\|_V \geq 0$).

Lemma 1.2.1.2

Jeder normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|_V)$ ist ein linearer metrischer Raum (V, d_V) , wenn die Metrik durch

$$d_V(v, w) = \|v - w\|_V$$

definiert wird.

Beweis. Alle Eigenschaften außer vielleicht der Dreiecksungleichung sind unmittelbar ersichtlich. Für die Dreiecksungleichung schließt man wie folgt:

$$\begin{aligned} d_V(v, z) &= \|v - z\|_V = \|v - w + w - z\|_V \leq \|v - w\|_V + \|w - z\|_V \\ &= d_V(v, w) + d_V(w, z). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von Addition bzw. skalarer Multiplikation folgt jeweils unmittelbar aus der jeweiligen Definition. $\square$

Jede Norm auf einem Raum erzeugt mittels der eben definierten Metrik eine Topologie. Damit wird die folgende Definition nahegelegt.

Definition 1.2.1.3

Ist X ein linearer Raum und sind $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X , welche die gleiche Topologie erzeugen, so nennen wir die beiden Normen äquivalent.

Für die Äquivalenz zweier Normen gibt es ein einfaches Kriterium, das wir im folgenden Satz angeben.

Satz 1.2.1.4

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf dem linearen Raum X sind genau dann äquivalent, wenn es reelle Zahlen $0 < m \leq M < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die Ungleichung

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad (1.2.1.5)$$

gilt.

Beweis. Ist die Ungleichung (1.2.1.5) erfüllt so gilt offenbar auch die Ungleichung

$$\frac{1}{M}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|_2.$$

Ist nun U in der Topologie zu $\|\cdot\|_2$ offen, so gibt es zu jedem $x \in U$ eine Normkugel $B_\varepsilon^{\|\cdot\|_2}(x) \subset U$. Ist $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$ so ist

$$B_\delta^{\|\cdot\|_1}(x) \subset B_\varepsilon^{\|\cdot\|_2}(x) \subset U$$

und U ist in der Topologie zu $\|\cdot\|_1$ offen. Damit ist $\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}_1$. Die umgekehrte Inklusion folgt auf gleiche Weise.

Sind nun die Topologien gleich, so muss jede Kugel $B_\varepsilon^{\|\cdot\|_1}$ auch eine Kugel $B_\delta^{\|\cdot\|_2}$ enthalten (und umgekehrt). Daraus leitet man leicht die entsprechenden Abschätzungen her. $\square$

1.2.2 Banachräume

Definition 1.2.2.1

Ein vollständiger normierter Raum wird als Banachraum⁸ bezeichnet.

Beispiel 1.2.2.2

1. Der vollständige, metrische, lineare Raum (ℓ^1, d_{ℓ^1}) wird mit

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^1} = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$$

zum Banachraum.

2. Der vollständige, metrische, lineare Raum $(\ell^\infty, d_{\ell^\infty})$ wird mit

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^\infty} = \sup \left\{ |x_j| \mid j \in \mathbb{N} \right\}$$

zum Banachraum.

3. Als nächstes Beispiel betrachten wir den Raum

$$bv = \left\{ \mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \mid |x_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|\mathbf{x}\|_{bv} = |x_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|.$$

Wir stellen fest: bv ist ein Banachraum.

Punktweise Addition und Multiplikation mit Skalaren macht den Raum zum linearen Raum, die Eigenschaften einer Norm sind leicht nachzuprüfen, bleibt als einziges, die Vollständigkeit zu beweisen. Dazu ordnen wir einer Folge

$$\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in bv$$

die Folge

$$\xi = \{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ mit } \xi_1 = x_1 \text{ und } \xi_j = x_j - x_{j-1}, j > 1$$

⁸Stefan Banach (30.3.1892-31.8.1945) polnischer Mathematiker. Er war der Begründer der Theorie linearer, normierter Räume und ihren linearen Abbildungen. Seine Arbeiten sind die Grundlage der modernen Funktionalanalysis. Er und seine Schüler zeigten viele Anwendungen der Funktionalanalysis auf.

zu. Die Folge ξ ist in ℓ^1 . Damit kann man die Vollständigkeit von bv aus der von ℓ^1 schließen.



Abbildung 10: Stefan Banach (30.3.1892-31.8.1945)

Definition 1.2.2.3

Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Räume, eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ hat eine obere Schranke, falls

$$M = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V} < \infty$$

ist. M wird als obere Schranke von L bezeichnet. L heißt beschränkt, falls es ein $K > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$\|Lv\|_W \leq K\|v\|_V.$$

Lemma 1.2.2.4

Eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Räumen ist genau beschränkt, wenn sie eine obere Schranke hat.

Beweis. Trivial! □

Lemma 1.2.2.5

Sind $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Räume, so ist eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. Sei L stetig, $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$d(v, 0) < \delta \text{ impliziert } d(Lv, L0) = d(Lv, 0) < \varepsilon.$$

Ist $v \neq 0$ nun beliebig in V , so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\|\lambda v\|_V = \frac{\delta}{2},$$

also einerseits

$$\|L(\lambda v)\|_W < \varepsilon,$$

und andererseits

$$\|v\| = \frac{\delta}{2|\lambda|}$$

oder auch

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{2}{\delta} \|v\|.$$

Die linke Seite des ersten Ausdrucks wird zu

$$|\lambda| \|Lv\|_W \leq \varepsilon.$$

Also erhalten wir

$$\|Lv\|_W < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \frac{2\varepsilon}{\delta} \|v\|_V.$$

Also folgt aus der Stetigkeit (im Ursprung) die Beschränktheit.

Wir kommen zur Gegenrichtung. Wir zeigen zunächst die Stetigkeit im Nullpunkt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, $M = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V}$ und

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M}.$$

Ist nun

$$0 < d(v, 0) = \|v\|_V < \delta,$$

so folgt

$$\|Lv\|_W \leq M\|v\| < M\delta = \varepsilon.$$

Dies zeigt die Stetigkeit bei 0. Stetigkeit an einem anderen Punkt erhält man einfach. Sei $Lv_0 = w_0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es eine Umgebung $U_\delta(v_0)$ gibt, so dass $LU_\delta(v_0) \subset U_\varepsilon(w_0)$. Die Addition in W ist stetig, also gibt es eine Umgebung $U_\tau(0)$, so dass $w_0 + U_\tau(0) \subset U_\varepsilon(w_0)$ ist. Stetigkeit von L bei 0 gibt uns eine Umgebung $U_\sigma(0) \subset V$ mit $LU_\sigma(0) \subset U_\tau(0)$. Wiederum die Stetigkeit der Addition in V gewährleistet die Existenz von $U_\delta(v_0)$ mit $U_\delta(v_0) - v_0 \subset U_\sigma(0)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} LU_\delta(v_0) &= L(v_0 - v_0 + U_\delta(v_0)) \\ &= Lv_0 + L(-v_0 + U_\delta(v_0)) \\ &\subset w_0 + L(U_\sigma(0)) \\ &\subset w_0 + U_\tau(0) \\ &\subset U_\varepsilon(w_0). \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.2.2.6

Wir betrachten erneut das zweite Beispiel in 1.1.5.2. Der dort eingeführte Raum ist normiert, wir schreiben

$$\|f\|_\infty = \max \{ |f(x)| \mid x \in \Omega \}$$

für $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$.

Dies definiert eine Norm, die den Raum zum vollständigen normierten Raum macht. Ist $[a, b] = \Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist

$$L : C(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_{\Omega} f(s) ds$$

eine stetige lineare Abbildung, warum?

$$|L(f)| = \left| \int_{\Omega} f(s) ds \right| \leq (b - a) \|f\|_\infty.$$

Also ist L beschränkt mit $K = b - a$. Eine andere stetige lineare Abbildung auf $C([a, b]; \mathbb{R})$ ist die Abbildung

$$ev_{x_0} : f \mapsto f(x_0), \text{ für } x_0 \in [a, b].$$

Die Linearität ist leicht einzusehen. Da $|f(x_0)| \leq \|f\|_\infty$ hat man eine endliche Schranke ≤ 1 . Wir werden bald sehen, dass es eine wichtige Aufgabe darstellt, die Existenz hinreichend vieler stetiger linearer Abbildungen zu zeigen.

Außerdem wollen wir uns fragen, ob es möglich ist, alle linearen Funktionale auf einem normierten Raum zu charakterisieren.

Satz 1.2.2.7

Sind V, W normierte lineare Räume, so macht

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup \left\{ \frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V} \mid v \neq 0 \right\}$$

die Menge

$$\mathcal{L}(V;W) = \{L : V \rightarrow W \mid L \text{ ist stetig und linear}\}$$

zum normierten linearen Raum. Ist W vollständig, so ist auch dieser Raum vollständig. Die Norm $\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)}$ wird auch als Operatornorm bezeichnet.

Aufgabe 1.2.2.8

Man zeige, dass

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup_{v \in V, \|v\|=1} \left\{ \|Lv\|_W \mid \|v\|_V = 1 \right\}.$$

Beweis von Satz 1.2.2.7. Offenkundig ist dieser Raum ein linearer Raum. Wir müssen die Eigenschaften einer Norm nachprüfen. Dies ist sehr einfach. Damit haben wir einen normierten linearen Raum. Sei nun $\{L_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in diesem Raum, für $v \in V$ setzen wir $w_j = L_j v$. Wir wollen zeigen, dass $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in W ist. Ist $v = 0$, so ist nichts zu zeigen, wir nehmen also an, $v \neq 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|L_m - L_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} < \varepsilon$ für $m, n > N$. Dann ist

$$\|w_m - w_n\|_W = \|L_m v - L_n v\|_W = \|(L_m - L_n)v\|_W \leq \|L_m - L_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} \|v\|_V \leq \varepsilon \|v\|_V.$$

Also existiert, falls W vollständig ist, punktweise der Grenzwert $Lv = \lim_{j \rightarrow \infty} L_j v$. Dies definiert eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} L(v+w) &= \lim_{j \rightarrow \infty} L_j(v+w) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (L_j v + L_j w) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} L_j v + \lim_{j \rightarrow \infty} L_j w \\ &= Lv + Lw. \end{aligned}$$

Und ein entsprechendes Argument zeigt $L(\lambda v) = \lambda Lv$.

Um die restlichen Schritte zu beweisen, überlegen wir zunächst

$$|\|L_j\|_{\mathcal{L}(V;W)} - \|L_k\|_{\mathcal{L}(V;W)}| \leq \|L_j - L_k\|_{\mathcal{L}(V;W)}$$

und daraus folgt, dass die Folge $\{\|L_j\|_{\mathcal{L}(V;W)}\}_j$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Also folgt, dass diese Folge gegen eine Zahl $M > 0$ konvergiert. Nun müssen wir zeigen, dass L stetig, d.h. beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Für $\|v\| = 1$ und hinreichend große $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \|Lv\|_W &= \|Lv - L_j v + L_j v\|_W \\ &\leq \|Lv - L_j v\|_W + \|L_j v\|_W \\ &\leq \varepsilon + \|L_j\|_{\mathcal{L}(V;W)} \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck konvergiert für $j \rightarrow \infty$ gegen $M + \varepsilon$ und wir haben gezeigt, dass für $\|v\| = 1$ gilt

$$\|Lv\|_W \leq M.$$

Also ist L beschränkt und damit stetig.

Es bleibt zu zeigen $L_j \rightarrow L$ in der Topologie, die von der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V;W)}$ induziert wird. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $j, k > N$ impliziert $\|L_j - L_k\|_{\mathcal{L}(V;W)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Nun sei $v \in V$, $\|v\|_V \leq 1$ und $N < k(v) \in \mathbb{N}$ mit

$$\|Lv - L_{k(v)}v\|_W \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $v \in V$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \|Lv - L_j v\|_W &\leq \|Lv - L_{k(v)}v\|_W + \|L_{k(v)}v - L_j v\|_W \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist für $j > N$

$$\|L - L_j\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \sup_{\|v\|_V=1} \|Lv - L_j v\|_W \leq \varepsilon.$$

□

Beispiel 1.2.2.9

Auf ℓ^1 betrachten wir die *Shiftoperatoren*

$$sh^+ : \ell^1 \rightarrow \ell^1 : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

mit $\xi_1 = 0$ und $\xi_n = x_{n-1}$ für $n > 1$ und

$$sh^- : \ell^1 \rightarrow \ell^1 : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

mit $\xi_n = x_{n+1}$ für $n \geq 1$. Die Operatoren $sh^\pm$ sind beschränkt mit Schranke 1. sh^+ ist injektiv, aber nicht surjektiv, sh^- ist surjektiv, aber nicht injektiv. Der linearen Algebra folgend, wollen wir schon mal die Frage stellen ob man die Gleichungen

$$sh^\pm \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

für (gewisse) $\lambda \in \mathbb{K}$ lösen kann? Wir bemerken, dass man auf genau gleiche Weise den Shiftoperator für beliebige (auch noch zu definierende) Folgenräume definieren kann.

Bemerkung 1.2.2.10

Ein Spezialfall des Raumes $\mathcal{L}(V; W)$ ergibt sich im Falle $V = W$. Wir schreiben dann nur $\mathcal{L}(V)$.

Wir sammeln noch ein paar algebraische Eigenschaften der Räume $\mathcal{L}(V; W)$.

Satz 1.2.2.11

Es gilt:

1. Ist $S \in \mathcal{L}(V; W)$, $T \in \mathcal{L}(W; Z)$, so ist $TS \in \mathcal{L}(V; Z)$ und es gilt

$$\|TS\|_{\mathcal{L}(V; Z)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W; Z)} \|S\|_{\mathcal{L}(V; W)}.$$

2. Ist V normiert und vollständig, so ist $\mathcal{L}(V)$ eine Banachalgebra⁹.

⁹Eine Banachalgebra $\mathcal{B}$ ist ein Banachraum mit einer zusätzlichen Verknüpfung, die eine Ringstruktur definiert, so dass für alle Skalare $x \in \mathbb{K}$, $T, S \in \mathcal{B}$ gilt $x(TS) = (xT)S = T(xS)$ und $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\|TS\|_{\mathcal{L}(V,Z)} &= \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|TSv\|_Z}{\|v\|_V} \\
&= \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|TSv\|_Z}{\|Sv\|_W} \frac{\|Sv\|_W}{\|v\|_V} \\
&\leq \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|TSv\|_Z}{\|Sv\|_W} \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|Sv\|_W}{\|v\|_V} \\
&\leq \sup_{w \in W, w \neq 0} \frac{\|Tw\|_Z}{\|w\|_W} \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|Sv\|_W}{\|v\|_V} \\
&= \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|S\|_{\mathcal{L}(V;W)}.
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.2.12

1. Eine stetige lineare Abbildung mit Bild im Skalkörper wird als lineares Funktional bezeichnet.
2. Die Menge aller linearen Funktionalen auf einem normierten Raum X bildet den Banachraum X' , dieser wird als Dualraum von X bezeichnet.

1.3 Hahn-Banach-Sätze

Wir hatten bereits Beispiele von stetigen linearen Abbildungen, auch von solchen mit Bild im Skalkörper, gesehen. Es wird sich herausstellen, dass gerade diese speziellen linearen Abbildungen eine große Rolle spielen. Insbesondere wird es wichtig sein, dass „genügend viele“ solcher Abbildungen existieren, also dass der Dualraum hinreichend viele Elemente enthält. Die Voraussetzungen dafür schafft der Satz von Hahn¹⁰-Banach. Neben der Frage der Existenz von stetigen linearen Funktionalen wollen wir uns hier noch der Frage der Fortsetzbarkeit von stetigen linearen Funktionalen von Unterräumen auf den ganzen Raum widmen, wie der Frage nach gewissen Trennungseigenschaften für konvexe Mengen, die geometrisch sehr anschaulich sind. Diese Trennungseigenschaften spielen in vielen Gebieten der Mathematik eine

¹⁰Hans Hahn (27.9.1879-24.7.1934) studierte in Wien und Göttingen. Er lehrte zunächst in Bonn, später in Wien. Er führte unabhängig von Banach normierte lineare Räume ein und bewies vor Banach den wichtigen Fortsetzungssatz für lineare Funktionalen, um den es in diesem Abschnitt geht.



Abbildung 11: Hans Hahn (27.9.1879-24.7.1934)

große Rolle. Daneben zeigen wir noch eine kleine, jedoch nicht ganz triviale Anwendung der Hahn-Banachschen Sätze auf. Dies steht exemplarisch für eine Palette von Anwendungsbereichen.

1.3.1 Existenz von Funktionalen

Der Beweis des nächsten Satzes beruht auf dem Zornschen Lemma.

Satz 1.3.1.1 (Hahn-Banach)

Wir betrachten einen reellen Vektorraum X und

1. *eine sublineare Abbildung, d.h. eine Abbildung mit*

$$p : X \rightarrow \mathbb{R} : p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ für alle } \lambda \geq 0,$$

2. *einen Unterraum $Y \subset X$ mit einer linearen Abbildung*

$$f : Y \rightarrow \mathbb{R},$$

so dass

$$f(x) \leq p(x) \text{ für } x \in Y.$$

Dann gibt es eine lineare Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

1. *$F(x) = f(x)$ für $x \in Y$ und*
2. *$F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Der Beweis beruht auf einer Art Induktion. Da allerdings die Mächtigkeiten der beteiligten Mengen beliebig ist, muss ein mächtiges Hilfsmittel verwendet werden. Dies ist das Zornsche Lemma.

Unser Beweis besteht aus drei Schritten:

1. Ein elementare Fortsetzung
2. Vollständig geordnete Fortsetzungen haben obere Schranken.
3. Das maximale Element hat die gewünschten Eigenschaften, ansonsten erhält man einen Widerspruch zur elementaren Fortsetzung.

Wir betrachten die Menge aller Fortsetzungen

$$\mathcal{M} = \{(Z, g) \mid Y \subset Z \subset X \text{ ist Unterraum,} \\ g : Z \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist linear, } g = f \text{ auf } Y, g \leq p \text{ auf } Z\}.$$

Elementare Fortsetzung Wir nehmen an, wir hätten eine Fortsetzung auf einen Raum Z mit linearer Abbildung $g : Z \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei sei $Z \neq X$ und $z_0 \in X \setminus Z$. Wir wollen g auf $Z_0 = Z \oplus \text{span}[z_0]$ fortsetzen. Wir machen den (naheliegenden) Ansatz

$$g_0(z + \alpha z_0) = g(z) + c\alpha.$$

Dabei sei $z \in Z$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir wollen die Wahl von c so treffen, dass $(Z_0, g_0) \in \mathcal{M}$ liegt. Unabhängig von c ist offenkundig $g_0 = g$ auf Z und damit $g_0 = f$ auf Y und g_0 ist linear. Daher muss nur die letzte Bedingung beachtet werden. Daher bleibt zu zeigen

$$g(z) + c\alpha \leq p(z + \alpha z_0) \text{ für } z \in Z \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ist $\alpha = 0$, so ist die Bedingung offenkundig erfüllt, weil sie ja auf Z gilt.

Für positive α lässt sich die Bedingung umschreiben zu

$$c \leq \frac{1}{\alpha} (p(z + \alpha z_0) - g(z)) = p\left(\frac{z}{\alpha} + z_0\right) - g\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

Ist $\alpha < 0$, so erhält man

$$c \geq \frac{1}{\alpha} (p(z + \alpha z_0) - g(z)) = g\left(-\frac{z}{\alpha}\right) - p\left(-\frac{z}{\alpha} - z_0\right).$$

Die Wahl von c muss demnach so erfolgen, dass

$$\sup_{z \in Z} (g(z) - p(z - z_0)) \leq c \leq \inf_{z \in Z} (p(z + z_0) - g(z)).$$

Eine solche Wahl ist möglich, falls für eine beliebige Wahl von $z, z' \in Z$ gilt, dass

$$g(z') - p(z' - z_0) \leq p(z + z_0) - g(z).$$

Um dies nachzuprüfen, schreiben wir

$$\begin{aligned} g(z) + g(z') &= g(z + z') \\ &\leq p(z + z') \\ &= p(z - z_0 + z_0 + z') \\ &\leq p(z - z_0) + p(z' + z_0). \end{aligned}$$

Die Existenz oberer Schranken in $\mathcal{M}$ Wir definieren eine Ordnung auf der Menge $\mathcal{M}$ von Fortsetzungen, indem wir einfach setzen $(Z_1, g_1) \leq (Z_2, g_2)$, falls $Z_1 \subset Z_2$ und $g_1 = g_2$ auf Z_1 gilt.

Nun sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ eine total geordnete Menge von Fortsetzungen. Dazu müssen wir eine obere Schranke konstruieren. Setze

$$Z_* = \bigcup_{(Z, g) \in \mathcal{N}} Z$$

und $g_* : Z_* \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g_*(z) = g(z)$, falls $z \in Z$ mit $(Z, g) \in \mathcal{N}$.

Nun müssen wir zeigen, dass $(Z_*, g_*) \in \mathcal{M}$. Offenkundig ist $Y \subset Z_*$. Die Abbildung $g_* : Z_* \rightarrow \mathbb{R}$ ist wohldefiniert, denn für $z \in Z_1 \cap Z_2$ gilt entweder $Z_1 \subset Z_2$ oder umgekehrt. Wir nehmen mal an, dass der erste Fall eintritt, also $Z_1 \subset Z_2$. Dann ist $g_1(z) = g_2(z)$, da g_2 eine Fortsetzung von g_1 ist. Also ist g_* wohldefiniert. Ferner gilt $g_* = f$ auf Y (wieder wegen der Fortsetzungseigenschaft für jedes $(Z, g) \in \mathcal{N}$). Es gilt $g_* \leq p$. Das einfachste ist dies per Widerspruch einzusehen. Angenommen, es gäbe ein $z \in Z_*$ mit $p(z) < g_*(z)$. Dann ist aber $z \in Z$ für ein $(Z, g) \in \mathcal{N}$ und $g_*(z) = g(z) \leq p(z)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass Z_* ein linearer Unterraum ist und $g : Z_* \rightarrow \mathbb{R}$ linear ist. Seien also $z_1, z_2 \in Z_*$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist $z_1 \in$

$Z_1, z_2 \in Z_2$ und $(Z_1, g_1), (Z_2, g_2) \in \mathcal{N}$. Wiederum wegen der vollständigen Ordnung von $\mathcal{N}$ ist $Z_1 \subset Z_2$ oder umgekehrt. O.B.d.A. nehmen wir an $Z_1 \subset Z_2$. Z_2 ist ein linearer Raum, also ist $\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 \in Z_2$. Daraus folgt, dass Z_* ein linearer Raum ist. Nun ist

$$\begin{aligned} g_*(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2) &= g_2(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2) = \mu_1 g_2(z_1) + \mu_2 g_2(z_2) \\ &= \mu_1 g_*(z_1) + \mu_2 g_*(z_2). \end{aligned}$$

Maximale Elemente Das Lemma von Zorn garantiert nun die Existenz eines maximalen Elementes $(Z^*, g^*) \in \mathcal{M}$. Angenommen $Z^* \neq X$. Dann liefert der elementare Fortsetzungsschritt noch eine Fortsetzung auf ein (Z^{**}, g^{**}) mit $Z^{**} = Z^* \oplus \text{span}[z^{**}]$. Dies widerspricht der Maximalität von (Z^*, g^*) . Also ist $Z^* = X$. □

1.3.2 Fortsetzungseigenschaften

Satz 1.3.2.1 (Hahn-Banach (für lineare Funktionale))

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Unterraum. Dann gibt es zu $y' \in Y'$ ein $x' \in X'$ mit

$$x' = y' \text{ auf } Y \text{ und } \|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Setze $p(x) = \|y'\|_{Y'} \|x\|_X$. Dann ist erstens für $x \in Y$

$$|y'(x)| \leq \|y'\|_{Y'} \|x\|_X = p(x)$$

und zweitens p sublinear, denn

$$p(x + y) = \|y'\|_{Y'} \|x + y\|_X \leq \|y'\|_{Y'} (\|x\|_X + \|y\|_X) = p(x) + p(y).$$

Nach Satz 1.3.1.1 gibt es eine lineare Abbildung $x' : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x'(x) \leq p(x)$.

Da $-x'(x) = x'(-x) \leq p(-x) = p(x)$, folgt auch

$$|x'(x)| \leq p(x) = \|y'\|_{Y'} \|x\|_X.$$

Daraus folgt sofort

$$\|x'\|_{X'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|x'(x)|}{\|x\|_X} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|y'\|_{Y'} \|x\|_X}{\|x\|_X} = \|y'\|_{Y'}.$$

Da x' eine Fortsetzung von y' ist, folgt ebenso

$$\|y'\|_{Y'} \leq \|x'\|_{X'}.$$

Insgesamt hat man die Gleichheit.

Wir kommen zum Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dieser Fall wird auf den reellen Fall zurückgeführt. Wir fassen die Vektorräume X bzw. Y als reelle Vektorräume X_{Re} bzw. Y_{Re} auf. Sei $y'_{\text{Re}} = \text{Re } y' \in Y'_{\text{Re}}$. Es ist $\|y'_{\text{Re}}\|_{Y'_{\text{Re}}} \leq \|y'\|_{Y'}$. Ferner gilt

$$y'(x) = \text{Re } y'(x) + \text{i Im } y'(x) = y'_{\text{Re}}(x) - y'_{\text{Re}}(\text{i}x).$$

Der schon bewiesene Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ garantiert uns nun ein Funktional $x'_{\text{Re}} \in X'_{\text{Re}}$, welches y'_{Re} fortsetzt auf X_{Re} unter Erhalt der Norm. Setze nun

$$x'(x) = x'_{\text{Re}}(x) - \text{i}x'_{\text{Re}}(\text{i}x).$$

Dann ist $x' = y'$ auf Y , x' ist $\mathbb{C}$ -linear, denn x' ist $\mathbb{R}$ -linear und es gilt zusätzlich

$$x'(\text{i}x) = x'_{\text{Re}}(\text{i}x) - \text{i}x'_{\text{Re}}(-x) = \text{i}(-\text{i}x'_{\text{Re}}(\text{i}x) - x'_{\text{Re}}(-x)) = \text{i}x'(x).$$

Wir kommen zum Vergleich der Normen: sei $x \in X$, $x'(x) = re^{\text{i}\theta}$. Dann ist

$$|x'(x)| = r = \text{Re}(e^{-\text{i}\theta} x'(x)) = \text{Re } x'(e^{-\text{i}\theta} x) = x'_{\text{Re}}(e^{-\text{i}\theta} x) \leq \|x'_{\text{Re}}\|_{X'_{\text{Re}}} \|x\|_X.$$

Weiter gilt

$$\|x'_{\text{Re}}\|_{X'_{\text{Re}}} = \|y'_{\text{Re}}\|_{Y'_{\text{Re}}} \leq \|y'\|_{Y'}.$$

Daraus folgt $x' \in X'$ und $\|x'\|_{X'} \leq \|y'\|_{Y'}$. Da x' eine Fortsetzung von y' ist, gilt auch die umgekehrte Ungleichung und wir haben Gleichheit. $\square$

Satz 1.3.2.2

Es sei Y ein abgeschlossener Unterraum eines normierten Raumes X . Ferner sei $x_0 \in X \setminus Y$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit

$$x'(y) = 0 \text{ für alle } y \in Y, \|x'\|_{X'} = 1 \text{ und } x'(x_0) = \inf \{\|x_0 - y\|_X \mid y \in Y\}.$$

Beweis. Sei $Y_0 = Y \oplus \text{span}[x_0]$. Setze $d = \inf \{\|x_0 - y\|_X \mid y \in Y\}$. Wir definieren

$$y'_0(y + \alpha x_0) = \alpha d$$

für $y \in Y$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist y'_0 $\mathbb{K}$ -linear und verschwindet auf Y . Wir wollen zeigen $y'_0 \in Y'_0$ und wir berechnen $\|y'_0\|_{Y'_0}$.

Für ein $y \in Y$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $d \leq \|x_0 - \frac{1}{\alpha}(-y)\|_X$, also ist

$$|y'_0(y + \alpha x_0)| \leq |\alpha| \left\| x_0 - \frac{1}{\alpha}(-y) \right\|_X = \|\alpha x_0 + y\|_X,$$

also ist y'_0 beschränkt, also $y'_0 \in Y'_0$ und $\|y'_0\|_{Y'_0} \leq 1$.

Aus der Abgeschlossenheit von Y und der Tatsache $x_0 \notin Y$, folgt $d > 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert daher ein y_ε mit

$$\|x_0 - y_\varepsilon\|_X \leq (1 + \varepsilon)d.$$

Dann ist

$$y'_0(x_0 - y_\varepsilon) = y'_0(x_0) - y'_0(y_\varepsilon) = d - 0 = d \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \|x_0 - y_\varepsilon\|_X.$$

Wegen

$$x_0 - y_\varepsilon \neq 0$$

ist

$$\|y'_0\|_{Y'_0} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \rightarrow 1$$

mit $\varepsilon \rightarrow 0$. Nun hält man $\|y'_0\|_{Y'_0} = 1$, alles weitere folgt aus Satz 1.3.2.1. $\square$

Korollar 1.3.2.3

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum mit $x_0 \in X$. Dann gilt:

1. Ist $x_0 \neq 0$, so existiert ein $x'_0 \in X'$ mit $\|x'_0\|_{X'} = 1$ und $x'_0(x_0) = \|x_0\|_X$.
2. Ist $x'(x_0) = 0$ für alle $x' \in X'$, so ist $x_0 = 0$.
3. Definiere eine Abbildung $\ell_{x_0} : X' \rightarrow \mathbb{K}$ durch $x' \mapsto x'(x_0)$. $\ell_{x_0} \in (X')' = X''$. Dies definiert eine lineare Abbildung $J : X \rightarrow (X')' = X''$ durch

$$J(x_0)(x') = x'(x_0) \text{ oder } J(x_0) = \ell_{x_0}.$$

$$\text{Es gilt } \|Jx_0\|_{X''} = \|x_0\|_X.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Satz 1.3.2.2 mit der Wahl $Y = \{0\}$. Die zweite Aussage folgt direkt aus der ersten. Es ist $|\ell_{x_0}(x')| = |x'(x_0)| \leq \|x'\|_{X'} \|x_0\|_X$. Also gilt $\|\ell_{x_0}\|_{X''} \leq \|x_0\|_X$. Ist $x_0 \neq 0$ und x'_0 wie im ersten Teil dieses Korollars, so ist $\ell_{x_0}(x'_0) = x'_0(x_0) = \|x_0\|_X$. Also ist $\|\ell_{x_0}\|_{X''} = \|x_0\|_X$. $\square$

Definition 1.3.2.4

X'' wird als Bidualraum bezeichnet, J als kanonische Einbettung $X \hookrightarrow X''$.

Bemerkung 1.3.2.5

Der Bidualraum erlaubt es auf einfache Weise den Vervollständigungssatz für normierte Räume zu beweisen. Ist X normiert, so folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$, dass X' vollständig normierter Raum ist. X'' ist also auch vollständig normierter Raum, $J : X \rightarrow X''$ ist eine Einbettung und damit kann man X als dichten Unterraum von $X \subset \overline{J(X)} \subset X''$ auffassen.

Bemerkung 1.3.2.6

Hat x'_0 die in Korollar 1.3.2.3 Teil 1 beschriebenen Eigenschaften, so wird durch $P : x \mapsto \frac{1}{\|x_0\|_X} x'_0(x) x_0$ eine Projektion auf den von x_0 aufgespannten Raum definiert. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P(Px) &= \frac{1}{\|x_0\|_X} x'_0 \left(\frac{1}{\|x_0\|_X} x'_0(x) x_0 \right) x_0 \\ &= \frac{1}{\|x_0\|_X^2} x'_0(x) x'_0(x_0) x_0 = \frac{1}{\|x_0\|_X} x'_0(x) x_0 \\ &= Px. \end{aligned}$$

Wir werden weitere Zusammenhänge mit Projektionsoperatoren noch ausführlich kennenlernen.

1.3.3 Existenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{N}$

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir eine kleine Anwendung des Satzes von Hahn-Banach präsentieren. Wir wollen die Existenz von additiven, nicht σ -additiven Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{N}$ zeigen. Betrachte in ℓ^∞ (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) den Unterraum

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \ell^\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ existiert} \right\}.$$

Dies ist ein Unterraum, auf dem das Funktional

$$\text{mean}(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

definiert ist. Setze für $\mathbf{x} \in \ell^\infty$

$$p(\mathbf{x}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

p ist sublinear, also

$$p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y}). \quad (1.3.3.1)$$

und für alle $\lambda > 0$ gilt

$$p(\lambda \mathbf{x}) = \lambda p(\mathbf{x}). \quad (1.3.3.2)$$

Das Funktional $\text{mean}(\cdot)$ ist auf X stetig und durch p nach oben beschränkt. Also gibt ein $x' \in (\ell^\infty)'$, welches $\text{mean}(\cdot)$ auf ℓ^∞ fortsetzt und für das gilt

$$x'(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \ell^\infty.$$

Setze für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$

$$\mu(A) = x'(\chi_A).$$

Offensichtlich ist, wegen $\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B}$ für disjunkte Teilmengen A, B , μ eine additive Mengenfunktion. $\mu(\mathbb{N}) = 1$ kann man leicht nachprüfen, denn $\chi_{\mathbb{N}} \in X$. Ist $A \subset \mathbb{N}$, so definieren wir mittels der charakteristischen Funktion χ_A eine Mengenfunktion μ durch

$$\mu(A) = x'(\chi_A) \leq p(\chi_A) \leq 1.$$

Die Mengenfunktion μ ist additiv, also gilt

$$\mu(A) + \mu(A^c) = \mu(\mathbb{N}) = 1$$

und damit folgt für alle Teilmengen $A \subset \mathbb{N}$

$$0 \leq \mu(A) \leq 1.$$

Also ist μ ein additives Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$. Für endliche Mengen A gilt

$$\mu(A) = \text{mean}(\chi_A) = 0$$

und damit ist nicht σ -additiv. Damit haben wir folgenden Satz gezeigt.

Satz 1.3.3.3

Es gibt ein additives, nicht σ -additives Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$.

1.3.4 Fast orthogonale Elemente und die verlorene Kompaktheit

Lemma 1.3.4.1

Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Ist $M \neq X$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$ und

$$\inf_{m \in M} \|x - m\|_X > 1 - \varepsilon.$$

Beweis. Sei $x' \in X'$ mit $x' = 0$ auf M und $\|x'\|_{X'} = 1$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es ein $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$, so dass

$$x'(x) > \|x'\| - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

Dann ist für alle $m \in M$

$$1 - \varepsilon < x'(x) = x'(x - m) \leq \|x'\|_{X'} \|x - m\|_X = \|x - m\|_X.$$

Also ist

$$\inf_{m \in M} \|x - m\|_X \geq 1 - \varepsilon.$$

□

Satz 1.3.4.2

Es X ein linearer normierter Raum unendlicher Dimension. Dann ist die abgeschlossene Einheitsphäre

$$S_X^1 = \left\{ x \in X \mid \|x\|_X = 1 \right\}$$

nicht kompakt.

Gleiches gilt auch für die abgeschlossene Vollkugel $B_1^X(0) = \left\{ x \in X \mid \|x\|_X \leq 1 \right\}$.

Beweis. Es reicht den Beweis für S_X^1 zu führen. Wähle rekursiv eine Folge

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

mit

$$\|x_{n+1} - y\|_X \geq \frac{1}{2}$$

für alle $y \in \text{span}[x_1, \dots, x_n]$. Setze für $n \geq 1$

$$U_n = B_{\frac{1}{2}}(x_n)$$

und

$$U_0 = S_X^1 \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{4}}(x_n) \right).$$

Dann ist

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$$

eine offene Überdeckung von S_X^1 , aus der offenkundig keine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann. $\square$

1.3.5 Trennungssätze

In einem endlich dimensionalen linearen Raum ist die folgende Aussage geometrisch einsichtig: zu zwei disjunkten offenen konvexen Mengen gibt es eine Hyperebene H , die diese Mengen in folgendem Sinne trennt: H zerlegt den Raum in zwei Zusammenhangskomponenten, und jede der beiden konvexen Mengen liegt in je einer dieser Zusammenhangskomponenten. Wir wollen nun ähnliche Sätze für unendlich dimensionale Räume beweisen. Im Beweis spielt der Hahn-Banachsche Fortsetzungssatz eine zentrale Rolle, wir benötigen dazu ein entsprechendes Funktional.

Definition 1.3.5.1

1. Es sei X ein normierter Raum. Eine Teilmenge $C \subset X$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in C$ und je zwei Zahlen $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt

$$\lambda x + \mu y \in C.$$

2. Ist C eine offene, konvexe Menge in X mit $0 \in C$, so setzen wir für $x \in X$

$$p_C(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \frac{1}{\lambda} x \in C \right\}.$$

p_C wird als Minkowskifunktional für C bezeichnet.

Bemerkung 1.3.5.2

Die Konvexität entspricht genau der geometrischen Bedingung, dass eine Gerade eine konvexe Menge in einer zusammenhängenden Menge schneidet.

Lemma 1.3.5.3

Das Minkowski¹¹-Funktional hat für konvexe und offene Mengen C mit $0 \in C$ folgende Eigenschaften:

1. für positives $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x),$$

2. $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$,

3. $p_C^{-1}([0, 1)) = C$.

Beweis. Die erste Eigenschaft ist offenkundig, für die zweite beachten wir, ist

$$p_C(x) = \lambda, \quad p_C(y) = \mu,$$

so gibt es λ', μ' nahe λ, μ mit

$$\frac{1}{\lambda'}x \in C, \quad \frac{1}{\mu'}y \in C.$$

Insbesondere folgt aus der Konvexität von C , dass auch

$$\frac{\lambda'}{\lambda' + \mu'} \frac{1}{\lambda'}x + \frac{\mu'}{\lambda' + \mu'} \frac{1}{\mu'}y \in C.$$

Also ist $\frac{1}{(\lambda' + \mu')}(x + y) \in C$ und $p_C(x + y) \leq \lambda + \mu$.

Für die dritte Behauptung beachten wir $p_C(0) = 0$ und wegen $x \in C$ impliziert $[0, 1 + \varepsilon]x \subset C$. Insbesondere gibt es ein $s > 1$ mit $sx \in C$. Dann ist $\inf_{\lambda > 0} \{\frac{1}{\lambda}x \in C\} < 1$. $\square$

Lemma 1.3.5.4

Es sei X ein normierter Raum, $C \subset X$ konvex und offen. Ist $0 \notin C$, so gibt es ein $x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0$$

für alle $x \in C$.

¹¹Herrman Minkowski (22.6.1864-12.1.1909) beschäftigte sich bereits als Gymnasiast in Königsberg mit höherer Analysis. Seine akademische Laufbahn wurde durch David Hilbert geprägt. Sein bedeutsames Lebenswerk umfasst Zahlentheorie, konvexe Geometrie und verschiedene nichteuklidische Geometrien. Nach ihm benannt ist die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt der Relativitätstheorie, die von einer „indefiniten Metrik“ geprägt ist.

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und führen den allgemeinen Fall dann auf diesen zurück. Wähle $x_0 \in C$, dann ist $U = C - \{x_0\}$ offen und enthält 0. Da $0 \notin C$ ist $-x_0 \notin U$. Nun ist das Minkowskifunktional p_U sublinear und es gilt

$$p_U(-x_0) \geq 1.$$

Wir betrachten den Unterraum $Y = \text{span}[x_0]$ und setzen für $y \in Y$

$$y'(y) = tp_U(-x_0), \text{ falls } -tx_0 = y.$$

Dann ist y' offensichtlich linear und für $y \in Y$

$$y'(y) \leq p_U(y)$$

und der Fortsetzungsatz 1.3.2.1 garantiert die Existenz eines Funktional $x' \in X'$, welches y' fortsetzt und durch p_U beschränkt ist. Da für alle $x \in U$ gilt $p_U(x) \leq 1$, folgt das Lemma mit

$$x'(x) = x'(x - x_0) + x'(x_0) < 1 + (-1) = 0.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wird X zunächst als reeller Raum aufgefasst und die Existenz des entsprechenden Funktional gezeigt. Danach wird wie im Beweis zu Satz 1.3.2.1 die Existenz des komplexen Funktional mit der Schranke für den Realteil gezeigt. $\square$

Mit dem folgenden Satz zeigen wir die wesentlichen Trennungssätze für konvexe Mengen.

Satz 1.3.5.5

Es sei X ein normierter Raum, $V \subset X$ konvex. Dann gelten die beiden folgenden Aussagen.

1. *Ist V offen und $U \subset X$ konvex, $V \cap U = \emptyset$. so gibt es ein $x' \in X'$ mit*

$$\operatorname{Re} x'(v) < \operatorname{Re} x'(u) \quad \forall v \in V, \forall u \in U.$$

2. *Ist V abgeschlossen und $x_0 \notin V$, so existiert ein $x' \in X'$ mit*

$$\operatorname{Re} x'(x_0) < \inf \left\{ \operatorname{Re} x'(v) \mid v \in V \right\}.$$

Beweis.

1. Wir betrachten die Menge

$$W = V - U = \bigcup_{u \in U} (V - \{u\}),$$

die als Vereinigung offener Mengen offen ist, und wegen $U \cap V = \emptyset$ ist $0 \notin W$. W ist konvex ($0 \leq \lambda, \mu \leq 1$, $\lambda + \mu = 1$, $W \ni w_{1,2} = v_{1,2} - u_{1,2}$, so ist $\lambda w_1 + \mu w_2 = (\lambda v_1 + \mu v_2) - (\lambda u_1 + \mu u_2) \in V - U$.) Also gibt es nach Lemma 1.3.5.4 ein Funktional $x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(w) < 0 \quad \forall w \in W,$$

also

$$0 > \operatorname{Re} x'(v - u) = \operatorname{Re} x'(v) - \operatorname{Re} x'(u).$$

Dies ist die Behauptung.

2. Da V abgeschlossen und $x_0 \notin V$ ist, gibt es eine Kugel $B_\varepsilon(x_0)$, welche V nicht schneidet. $B_\varepsilon(x_0)$ ist offen und konvex, V konvex, also impliziert Teil 1 dieses Satzes, dass es ein $x' \in X'$ gibt, mit

$$\operatorname{Re} x'(w) < \operatorname{Re} x'(v), \quad w \in B_\varepsilon(x_0), \quad v \in V.$$

Die Behauptung ist nun, dass wir auf der rechten Seite zum Infimum übergehen können, links nur den Mittelpunkt einsetzen und die strikte Ungleichung erhalten. Wir erhalten aus der obigen Gleichung mit $w = x_0 + u$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} x'(x_0) + \varepsilon \|\operatorname{Re} x'\|_{X'} &= \sup \left\{ \operatorname{Re} x'(x_0) + \operatorname{Re} x'(u) \mid u \in B_\varepsilon(0) \right\} \\ &= \sup \left\{ \operatorname{Re} x'(w) \mid w \in B_\varepsilon(x_0) \right\} \\ &\leq \operatorname{Re} x'(v) \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\operatorname{Re} x'(x_0) + \|\operatorname{Re} x'\|_{X'} \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(v) \quad \forall v \in V.$$

Übergang zum Infimum rechts impliziert

$$\operatorname{Re} x'(x_0) + \|\operatorname{Re} x'\|_{X'} \varepsilon \leq \inf \left\{ \operatorname{Re} x'(v) \mid v \in V \right\}$$

und damit folgt die Behauptung. □

1.4 Eigenschaften linearer Operatoren

Es seien V, W normierte Räume. Die Elemente von $\mathcal{L}(V; W)$ werden oft als lineare Operatoren bezeichnet. Wir hatten gesehen, dass die Stetigkeit eines linearen Operators äquivalent zur Beschränktheit ist: es existiert ein $K > 0$ mit

$$\|Lv\|_W \leq K\|v\|_V.$$

Wir fassen die wesentliche Aussage nochmals zusammen: für eine lineare Abbildung sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

1. Stetigkeit
2. Stetigkeit bei Null
3. Beschränktheit
4. Existenz einer endlichen Schranke.

1.4.1 Projektoren

Definition 1.4.1.6

Ein Operator $P \in \mathcal{L}(V)$ heißt Projektor, falls $P^2 = P$. Die Menge der Projektoren in $\mathcal{L}(V)$ wird mit $\mathcal{P}(V)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.4.1.7

Das Bild eines beschränkten linearen Operators ist nicht notwendig abgeschlossen. Wir betrachten den Operator $L \in \mathcal{L}(C([-1, 1]; \mathbb{R}))$ definiert durch

$$Lf(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Dieser Operator ist linear, und beschränkt (denn $\|Lf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$). Das Bild sind alle stetig differenzierbaren Funktionen, die bei $x = 0$ verschwinden. Diese Menge ist bezüglich der durch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Topologie nicht abgeschlossen. Man sieht dies daran, dass die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| - \frac{1}{2^n} & \text{für } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

aus in 0 verschwindenden $C^1([-1, 1]; \mathbb{R})$ -Funktionen besteht und gleichmäßig auf $[-1, 1]$ gegen $f(x) = |x|$ konvergiert.

Definition 1.4.1.8

Ein Operator L in $\mathcal{L}(V; W)$ heißt Einbettung, falls L injektiv ist, d.h. $\ker L = \{0\}$ gilt und $L|_V = \mathbb{1}_V$ ist. Wir schreiben dafür auch $L : V \hookrightarrow W$.

Satz 1.4.1.9

Ist X ein normierter Raum, $P : X \rightarrow X$ eine beschränkte Projektion, so ist $\text{BILD}(P)$ abgeschlossen und es gilt

$$X = \ker(P) \oplus \text{BILD}(P).$$

Beweis. Sei $Q = \mathbb{1} - P$. Dann ist Q beschränkt, und wegen

$$Q^2 = (\mathbb{1} - P)^2 = \mathbb{1} - P - P + P^2 = \mathbb{1} - P = Q$$

ein Projektor. Es gilt

$$x \in \ker Q \iff Qx = 0 \iff x = Px \iff x \in \text{BILD}(P).$$

Daher ist $\ker Q = \text{BILD}(P)$ abgeschlossen. Da $Px = 0$ und $x = Py$ implizieren, dass $x = Py = P^2y = Px = 0$, ist $\text{BILD}(P) \cap \ker(P) = \{0\}$. Also folgt die Behauptung. $\square$

Definition 1.4.1.10

Es seien X, Y normierte Räume, $L : X \rightarrow Y$ beschränkt. Ist $\dim \ker(L) < \infty$, $\text{BILD}(L)$ abgeschlossen und gibt es einen endlichdimensionalen Raum $Z \subset Y$ mit $Y = \text{BILD}(L) \oplus Z$, so nennen wir L einen Fredholm-Operator¹². Wir sagen auch $\text{BILD}(L)$ hat endliche Kodimension.

Definition 1.4.1.11

Ein Operator L in $\mathcal{L}(V; W)$ heißt Isometrie, falls $\|Lx\|_W = \|x\|_V$ für alle $x \in V$ erfüllt ist.

Ein wichtiges algebraisches Konzept stellt die folgende Definition dar!

¹²Erik Ivar Fredholm (7.4.1866–17.8.1927) nutzte Erkenntnisse über Integralgleichungen für die Theorie partieller Differentialgleichungen. Insbesondere erkannte er die strukturelle Ähnlichkeit der Lösungstheorie gewisser partieller Differentialgleichungen mit der endlich dimensionaler linearer Gleichungen. Er ist der Begründer der nach ihm benannten Alternative.



Abbildung 12: Erik Ivar Fredholm (7.4.1866–17.8.1927)

Definition 1.4.1.12

Es sei $L \in \mathcal{L}(V; W)$ für normierte Räume V, W . Der duale Operator $L' : W' \rightarrow V'$ ist definiert durch

$$L'(w')(v) = w'(Lv).$$

Eine einfache Eigenschaft folgt aus dem nächsten Lemma, das jedoch noch nicht die ganze Wahrheit widerspiegelt.

Lemma 1.4.1.13

Es gilt $\|L'\|_{\mathcal{L}(W'; V')} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(V; W)}$.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} \|L'w'\|_{V'} &= \sup_{v \in V} \frac{|L'w'(v)|}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v \in V} \frac{|w'(Lv)|}{\|v\|_V} \\ &\leq \sup_{v \in V} \frac{\|w'\|_{W'} \|Lv\|_W}{\|v\|_V} \\ &\leq \|w'\|_{W'} \|L\|_{\mathcal{L}(V; W)}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{\|L'w'\|_{V'}}{\|w'\|_{W'}} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(V; W)}$$

für alle $w' \in W'$. Insbesondere folgt dies auch für das Supremum und damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

1.4.2 Invertierbare Operatoren

Wir wollen uns noch den invertierbaren linearen Operatoren widmen.

Satz 1.4.2.14 (Neumann¹³)

Sei X ein Banachraum und $L \in \mathcal{L}(X)$. Genügt der Operator der Voraussetzung

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|L^m\|^{\frac{1}{m}}_{\mathcal{L}(X)} < 1, \quad (1.4.2.15)$$

so ist der Operator $(\mathbb{1} - L)$ invertierbar und die Inverse hat die Darstellung

$$(\mathbb{1} - L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L^n.$$

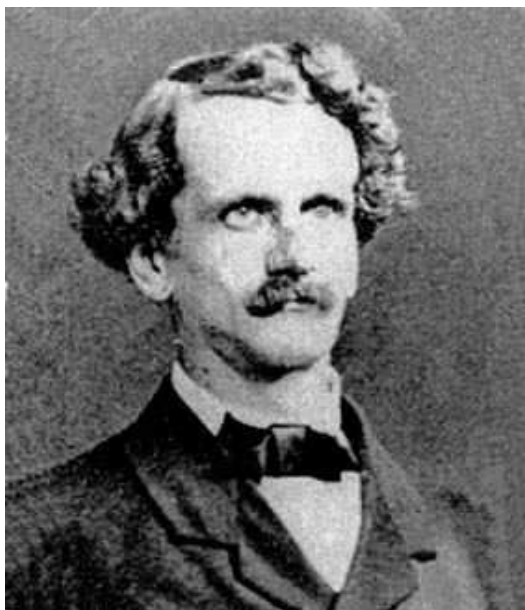


Abbildung 13: Carl Neumann (7.5.1832-27.3.1925)

¹³Carl Gottfried Neumann (7.5.1832-27.3.1925) wurde an der Universität Königsberg ausgebildet und war später Professor in Basel, Tübingen und Leipzig. Sein Hauptarbeitsgebiete waren Potentialtheorie und partielle Differentialgleichungen, er trug allerdings auch zur Differentialgeometrie bei.

Beweis. Betrachte die Teilsumme

$$S_n = \sum_{k=0}^n L^k.$$

Wir wollen die Folge $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ untersuchen und betrachten daher

$$\|S_n - S_l\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{m=l+1}^n L^m \right\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Wegen der Dreiecksungleichung kann der letzte Ausdruck nach oben durch

$$\sum_{m=l+1}^n \|L^m\|_{\mathcal{L}(X)}$$

abgeschätzt werden. Die Voraussetzung (1.4.2.15) erlaubt uns, $\|L^m\|_{\mathcal{L}(X)}$ nach oben durch ϑ^m abzuschätzen mit einer Zahl $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \vartheta < 1$. Damit hat man insgesamt

$$\|S_n - S_l\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{m=l+1}^n \vartheta^m.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ findet man nun ein N , so dass $l, n > N$ impliziert, dass

$$\|S_n - S_l\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \varepsilon.$$

Damit ist die Folge $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Nun ist $\mathcal{L}(X)$ nach Satz 1.2.2.7 vollständig und der Grenzwert

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

existiert. Damit haben wir

$$(\mathbb{1} - L)Sx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{1} - L)S_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{1} - L) \sum_{k=0}^n L^k x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - L^{n+1}x) = x.$$

Durch eine einfache Umstellung zeigt man auch $S(\mathbb{1} - L)x = x$ und S ist die Inverse zu $(\mathbb{1} - L)$. $\square$

Satz 1.4.2.16

Es seien X, Y Banachräume. Dann ist die Menge der invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(X; Y)$ offen. Genauer kann man sagen: ist $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ invertierbar und ist

$$\|T - L\|_{\mathcal{L}(X; Y)} < \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y; X)}^{-1},$$

so ist T invertierbar.

Beweis. Setze $S = L - T$. Dann ist

$$L(\mathbb{1} - L^{-1}(L - T)) = T,$$

also

$$T = L(\mathbb{1} - L^{-1}S) = (\mathbb{1} - SL^{-1})L.$$

Die Norm von $L^{-1}S$ kann abgeschätzt werden durch

$$\|L^{-1}S\|_{\mathcal{L}(X)} = \|L^{-1}(L - T)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y; X)} \|L - T\|_{\mathcal{L}(X; Y)} < 1$$

nach Voraussetzung, entsprechend für SL^{-1} . Nun wenden wir Satz 1.4.2.14 an und erhalten das gewünschte Resultat. $\square$

Bemerkung 1.4.2.17

Man beachte, dass auch die leere Menge offen ist und daher Satz 1.4.2.16 keine Aussage über die Existenz invertierbarer Operatoren macht.

1.5 Die Anwendungen des Kategoriensatzes

1.5.1 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Satz 1.5.1.18 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Raum, $C(X; Y)$ bezeichne die Menge der stetigen Abbildungen von $X \rightarrow Y$. Es sei $\mathcal{F} \subset C(X; Y)$ eine Familie mit

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty \tag{1.5.1.19}$$

für jedes $x \in X$. Dann gibt es ein $x_0 \in X$ und ein $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$\sup_{d(x, x_0) \leq \varepsilon_0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty.$$

Beweis. Setze

$$A_k = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \left\{ x \in X \mid \|f(x)\|_Y \leq k \right\}.$$

Dann sind die A_k alle abgeschlossen und die Familie der $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ bildet eine Überdeckung von X . Nach dem Kategoriensatz 1.1.3.1 ist dann für eine der Mengen $\mathring{A}_{k_0} \neq \emptyset$. Insbesondere gilt dann

$$\sup_{x \in A_{k_0}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\|_Y \leq k_0.$$

Durch Auswahl einer Kugel in $\mathring{A}_{k_0}$ wird der Satz bewiesen. □

1.5.2 Der Satz von Banach-Steinhaus

Wir wollen nun die Aussage des Satzes vom Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 1.5.1.18 spezialisieren und auf lineare Abbildungen anwenden.



Abbildung 14: Hugo Dyonizy Steinhaus (14.1.1887-25.2.1972)

Satz 1.5.2.20 (Banach-Steinhaus¹⁴)

Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X; Y)$ eine Teilmenge der linearen Operatoren $X \rightarrow Y$ mit

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty \text{ für jedes } x \in X.$$

Dann ist

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X; Y)} < \infty.$$

Beweis. Setze für $x \in X$, $T \in \mathcal{T}$

$$f_T(x) = \|Tx\|_Y.$$

Dann ist $f_T \in C(X; \mathbb{R})$ und $\mathcal{F} = \{f_T \mid T \in \mathcal{T}\}$ und die Familie $\mathcal{F}$ genügt der Bedingung (1.5.1.19). Die Aussage des Satzes 1.5.1.18 gibt uns ein $x_0 \in X$, eine Konstante $C > 0$ und eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$\|Tx\|_Y \leq C \text{ für } T \in \mathcal{T} \text{ und } \|x - x_0\|_X \leq \varepsilon_0.$$

Dann folgt für alle $T \in \mathcal{T}$ die folgende einfache Rechnung

$$\|Tx\|_Y = \frac{\|x\|_X}{\varepsilon_0} \left\| T \left(x_0 + \varepsilon_0 \frac{x}{\|x\|_X} \right) - T(x_0) \right\|_Y \leq \frac{\|x\|_X}{\varepsilon_0} 2C.$$

Damit folgt

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X; Y)} \leq \frac{2C}{\varepsilon_0}.$$

□

Eine Abschwächung der Voraussetzungen des eben angegebenen Satzes ist möglich. Wir betrachten zu Y den Dualraum Y' .

Satz 1.5.2.21

Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum mit Dualraum Y' . Ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X; Y)$, so dass für alle $x \in X$ und alle $y' \in Y'$ gilt

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} |y'(Tx)| < \infty,$$

so ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X; Y)$ beschränkt.

¹⁴Hugo Dyonizy Steinhaus (14.1.1887-25.2.1972) studierte in Lwow und Göttingen. Er promovierte bei Hilbert. Während der Besetzung Polens lebte er im Untergrund. Er war zusammen mit Banach der Gründer der polnischen Funktionalanalysischule. Neben seinen mathematischen Interessen verfolgte er auch Anwendungen. In moderner Sprache wird ein Teil seiner Arbeiten der Spieltheorie zugeordnet.

Beweis. Fixiere $y' \in Y'$ und betrachte die Familie $\mathcal{T}_{y'} = \{T'y' \mid T \in \mathcal{T}\} \subset X'$. Nun ist für jedes $x \in X$

$$\sup_{x' \in \mathcal{T}_{y'}} |x'(x)| < \infty$$

und damit ist nach dem Satz von Banach-Steinhaus

$$\sup_{x' \in \mathcal{T}_{y'}} \|x'\|_{X'} < \infty.$$

Dann ist für jedes $y' \in Y'$

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T'y'\|_{X'} < \infty$$

und wiederum nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist dann

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T'\|_{\mathcal{L}(Y'; X')} < \infty.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X; Y)} \leq \|T'\|_{\mathcal{L}(Y'; X')}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann können $x_0 \in X$, $\|x_0\|_X = 1$ und $y'_0 \in Y'$ mit Norm 1 so gewählt werden, dass gilt

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{L}(X; Y)} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y \\ &\leq |y'_0(Tx_0)| + \varepsilon \\ &= |T'y'_0(x_0)| + \varepsilon \\ &\leq \|T'y'_0\|_{X'} \|x_0\|_X + \varepsilon \\ &= \|T'y'_0\|_{X'} + \varepsilon \\ &\leq \|T'\|_{\mathcal{L}(Y'; X')} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

1.5.3 Der Satz von der offenen Abbildung

Wir kommen nun zu einem wesentlichen Satz, der ebenfalls auf Stefan Banach zurückgeht.

Satz 1.5.3.1 (Satz von der offenen Abbildung (Banach))

Es seien X, Y Banachräume. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ genau dann offen, wenn T surjektiv ist.

Beweis. Die Hinrichtung ist trivial. Da $0 \in T(X)$, folgt aus der Offenheit, dass $T(X)$ eine offene Menge U mit $0 \in U$ umfasst. Dann gibt es eine Kugel $B_\varepsilon(0)$ in U und damit ist $TX = Y$.

Wir kommen zur Rückrichtung. T ist surjektiv, daher ist

$$Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{T(B_k(0))}.$$

Nach dem Kategoriensatz 1.1.3.1 gibt es dann ein $k_0 \in \mathbb{N}$, ein $y_0 \in \overline{T(B_{k_0}(0))}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon(y_0) \subset \overline{T(B_{k_0}(0))}.$$

(Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $y_0 \in T(B_{k_0}(0))$, denn wäre $y_0 \notin T(B_{k_0}(0))$, so gäbe es ein $x_0 \in B_{k_0}(0)$ mit $\|Tx_0 - y_0\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle dann $y_0 = Tx_0$ und $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$.) Dies bedeutet, dass es zu $y \in B_\varepsilon(0)$ Elemente $x_i \in B_{k_0}(0)$ gibt mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Tx_i = y_0 + y.$$

Dann ist

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T \left(\frac{1}{k_0 + \|x_0\|_X} (x_i - x_0) \right) = \frac{1}{k_0 + \|x_0\|_X} y$$

und

$$\frac{1}{k_0 + \|x_0\|_X} \|x_i - x_0\|_X < 1.$$

Also ist

$$B_\delta(0) \subset \overline{TB_1(0)} \tag{1.5.3.2}$$

mit

$$\delta = \frac{\varepsilon}{k_0 + \|x_0\|_X}.$$

Der Satz ist bewiesen, wenn wir die Gleichung (1.5.3.2) ohne die Bildung des Abschlusses auf der rechten Seite beweisen können, eventuell bei einer weiteren Verkleinerung von δ .

Um dies zu erreichen betrachten wir $y \in B_\delta(y_0)$ und beachten, dass ein $x \in B_1(0) \subset X$ existiert mit

$$\|y - Tx\|_Y < \frac{\delta}{2}$$

oder auch

$$2\|y - Tx\|_Y < \delta.$$

Dies heißt aber

$$2(y - Tx) \in B_\delta(0).$$

Wir konstruieren zu $y \in B_\delta(0)$ Folgen

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B_1(0) \text{ und } \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B_\delta(0)$$

mit

$$y_1 = y \text{ und } y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k).$$

Die Existenz der x_k wird induktiv mit der obigen Überlegung gezeigt, denn x_k wird so gewählt, dass

$$\|y_k - Tx_k\|_Y < \frac{\delta}{2}.$$

Mit

$$Tx_k = y_k - \frac{1}{2}y_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

erhalten wir

$$2^{-k+1}Tx_k = 2^{-k+1}y_k - 2^{-k}y_{k+1}.$$

Mit Induktion sehen wir die Darstellung der Summe

$$\sum_{k=1}^m 2^{-k+1}Tx_k = y - 2^{-m}y_{m+1},$$

denn für $m = 1$ ist diese Darstellung klar und angenommen, die Behauptung ist gezeigt für m , so ergibt sich für $m + 1$

$$\sum_{k=1}^{m+1} 2^{-k+1}Tx_k = \sum_{k=1}^m 2^{-k+1}Tx_k + 2^{-m}Tx_{m+1} = y - 2^{-m}y_{m+1} + 2^{-m}(y_{m+1} - \frac{1}{2}y_{m+2}),$$

und dies entspricht der Behauptung. Betrachte die Folge

$$\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad \xi_i = \sum_{k=1}^i 2^{-k+1}x_k.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\|\xi_j - \xi_m\|_X &= \left\| \sum_{k=j+1}^m 2^{-k+1} x_k \right\|_X \\ &\leq \sum_{k=j+1}^m 2^{-k+1} \|x_k\|_X \\ &\leq \sum_{k=j+1}^m 2^{-k+1}.\end{aligned}$$

Dies wird für hinreichend große j, m beliebig klein, und wir haben gesehen, dass die Folge $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bildet. Der Grenzwert $x = \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i$ existiert, dessen Norm wird durch

$$\|x\|_X \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j+1} = 2$$

abgeschätzt und wegen der Stetigkeit von T ist $Tx = y$. Damit ist gezeigt, dass

$$B_\delta(0) \subset T\left(\overline{B_2(0)}\right) \subset T(B_3(0))$$

ist. Damit ist

$$B_{\frac{\delta}{3}}(0) \subset T(B_1(0)).$$

□

Als unmittelbare Konsequenz aus dieser Aussage erhält man:

Satz 1.5.3.3

Sind X, Y Banachräume, und ist $T : X \rightarrow Y$ linear, bijektiv und beschränkt, so ist T ein toplinearer Isomorphismus, insbesondere ist die Inverse T^{-1} beschränkt.

Beweis. Klar! □

Als Korollar zum Beweis notieren wir noch das folgende Korollar, das wir beim Beweis des Satzes vom abgeschlossenen Wertebereich benötigen werden.

Korollar 1.5.3.4

Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X; Y)$. Angenommen es gibt ein $c > 0$ mit

$$\overline{T(B_1(0))} \supset cB_1(0) \subset Y$$

dann gilt

$$T(B_1(0)) \supset \frac{c}{3}B_1(0).$$

1.5.4 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Als weitere Konsequenz aus dem Satz von der offenen Abbildung erhalten wir folgende Charakterisierung beschränkter Abbildungen.

Satz 1.5.4.1

Es seien X, Y Banachräume, $T : X \rightarrow Y$ sei linear. Dann gilt $T \in L(X; Y)$ genau dann, wenn

$$\text{graph } T = \left\{ (x, Tx) \mid x \in X \right\} \subset X \times Y$$

abgeschlossen ist.

Beweis. Erstens ist $X \times Y$ ein Banachraum, eine geeignete Norm ist z.B. $\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Ist T stetig, so ist die Abgeschlossenheit des Graphen offensichtlich.

Für die Gegenrichtung beachten wir, dass $\text{graph } T$ ein normierter linearer Raum ist, der, falls $\text{graph } T$ abgeschlossen ist, sogar vollständig ist. Wir betrachten die Projektionen $P_X : \text{graph } T \rightarrow X$ und $P_Y : \text{graph } T \rightarrow Y$. Beide sind linear und stetig, P_X ist zusätzlich bijektiv. Also ist P_X offen und damit $P_X^{-1} : X \rightarrow \text{graph } T$ stetig und linear und schließlich ist $T = P_Y \circ P_X^{-1}$ stetig. $\square$

1.5.5 Der Satz vom abgeschlossenen Wertebereich

Sei X ein Banachraum. Wir erinnern an den Dualraum X' und führen die folgende Bezeichnung ein.

Definition 1.5.5.1

Es seien X ein Banachraum, X' der Dualraum und $U \subset X$ bzw. $V \subset X'$ seien Teilmengen. Setze

$$U^\perp = \left\{ x' \in X' \mid x'(x) = 0 \text{ für alle } x \in U \right\}$$

und

$${}^\perp V = \left\{ x \in X \mid x'(x) = 0 \text{ für alle } x' \in V \right\}.$$

Wir bezeichnen $U^\perp, {}^\perp V$ jeweils als Annihilator von U bzw. V .

Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende wichtige Satz.

Satz 1.5.5.2

Es seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X; Y)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. $\text{BILD}(T)$ ist abgeschlossen.
2. $\text{BILD}(T) = {}^\perp \ker(T')$.
3. $\text{BILD}(T')$ ist abgeschlossen.
4. $\text{BILD}(T') = \ker(T)^\perp$.

Für den Beweis benötigen wir noch ein paar Hilfsmittel, darunter ein Konzept, das wir im Spezialfall bereits gesehen haben und wir uns nun kurz in voller Allgemeinheit ansehen wollen.

Satz 1.5.5.3

Sei X ein Banachraum, U ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist der Quotientenraum X/U als Vektorraum definiert. Durch

$$\|[x]\|_{X/U} = \inf \left\{ \|x - u\|_X \mid u \in U \right\}$$

wird die Quotientennorm auf X/U definiert. Diese macht X/U zum normierten linearen Raum. Dieser ist vollständig und damit ein Banachraum. Die Abbildung

$$Q_U : X \rightarrow X/U : x \mapsto [x]$$

ist linear, beschränkt und surjektiv.

Beweis. Zunächst müssen wir zeigen, dass $\|[x]\|_{X/U}$ eine Norm ist. Wieder sind alle Eigenschaften außer der Dreiecksungleichung klar. Um diese zu beweisen, seien $x_1, x_2 \in X$, betrachte

$$\begin{aligned} \|[x_1 + x_2]\|_{X/U} &= \inf \left\{ \|x_1 + x_2 - u\|_X \mid u \in U \right\} \\ &= \inf \left\{ \|x_1 - u_1 + x_2 - u_2\|_X \mid u_1, u_2 \in U \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \|x_1 - u_1\|_X \mid u_1 \in U \right\} + \inf \left\{ \|x_2 - u_2\|_X \mid u_2 \in U \right\} \\ &= \|[x_1]\|_{X/U} + \|[x_2]\|_{X/U}. \end{aligned}$$

Die Vollständigkeit von X/U folgt sofort aus der von X . Dazu wählen wir in jeder Klasse $[x_i]$ der Cauchyfolge $\{[x_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ ein Element $\tilde{x}_i$, so dass $\{\tilde{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X mit Grenzwert $\bar{x}$ bildet. Dann ist das gewünschte Element $[\bar{x}]$. Bleibt nur noch zu zeigen, dass eine solche Wahl möglich ist: sei $x_i \in [x_i]$ und u_i , so dass $\|[x_i]\|_{X/U} - 2^{-i} \leq \|x_i - u_i\|_X \leq \|[x_i]\|_{X/U} + 2^{-i}$. Setze $\xi_i = x_i - u_i$. Durch Auswahl einer Teilfolge kann man erzwingen, dass die Reihe

$$\sum_{i>2} \|[x_i] - [x_{i-1}]\|_{X/U}$$

konvergiert, dann konvergiert aber auch die Reihe

$$\sum_{i>2} \|x_i - u_i - x_{i-1} - u_{i-1}\|_X$$

und die Folge der ξ_i bildet eine Cauchyfolge. $\square$

Satz 1.5.5.4

Seien X, Y Banachräume, $T : X \rightarrow Y$ eine beschränkte, lineare Abbildung. Sei $\hat{X} = X / \ker(T)$. Dann ist die durch

$$\hat{T} : \hat{X} \rightarrow Y : [x] \mapsto Tx.$$

definierte Abbildung wohldefiniert, linear, beschränkt und injektiv.

Beweis. $\|\hat{T}[x]\|_Y = \|Tx\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \|x\|_X$ für alle $x \in [x]$. Insbesondere gilt $\|\hat{T}[x]\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \inf \left\{ \|x\|_X \mid x \in [x] \right\} = \|T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \|[x]\|_{\hat{X}}$. $\square$

Korollar 1.5.5.5

Es seien die Voraussetzungen wie im Satz 1.5.5.4. Ist $\text{BILD}(T)$ abgeschlossen, so gibt es ein $K > 0$ und zu jedem $y \in \text{BILD}(T)$ ein $x \in X$ mit $Tx = y$ und

$$\|x\|_X \leq K \|y\|_Y = K \|Tx\|_Y.$$

Beweis. $\hat{T}$ ist linear, beschränkt und bijektiv als Abbildung $\hat{X} \rightarrow \text{BILD}(T)$, also ist $\hat{T}^{-1}$ als Abbildung $\text{BILD}(T) \rightarrow \hat{X}$ beschränkt und dies impliziert die Behauptung. $\square$

Satz 1.5.5.6

Es seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X; Y)$. $\text{BILD}(T) \subset Y$ ist genau dann dicht, wenn T' injektiv ist.

Beweis. Ist $\text{BILD}(T)$ dicht und $T'y'_1 = T'y'_2$, so hat man

$$y'_1(Tx) = y'_2(Tx)$$

für alle $x \in X$ und daher $y'_1 = y'_2$.

Andererseits ist T' injektiv. Sei $y' \in Y'$, welches auf $\overline{\text{BILD}(T)}$ verschwindet. Dann ist $T'y'(x) = y'(Tx) = 0$ für alle $x \in X$ und $T'y' = 0$. Da T' injektiv ist, folgt $y' = 0$ und daher ist $\text{BILD}(T)$ dicht. $\square$

Bevor wir Satz 1.5.5.2 beweisen benötigen wir noch ein Lemma, das uns erlaubt aus der Offenheit der dualen Abbildung auf die Offenheit der ursprünglichen Abbildung zu schließen.

Lemma 1.5.5.7

Es seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X; Y)$. Der duale Operator $T' \in \mathcal{L}(Y'; X')$ sei im folgenden Sinne offen: es existiere $c > 0$ mit

$$c\|y'\|_{Y'} \leq \|T'y'\|_{X'}.$$

Dann ist der Operator T offen und insbesondere surjektiv.

Beweis. Es sei $B_1^X(0)$ die offene Einheitskugel in X und entsprechend $B_\varepsilon^Y(0)$ die offenen ε -Kugel in Y . Es reicht zu zeigen: es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon^Y(0) \subset T(B_1^X(0)).$$

Aufgrund von Korollar 1.5.3.4 reicht es sogar zu zeigen

$$B_\varepsilon^Y(0) \subset \overline{T(B_1^X(0))}.$$

Beachte, dass $\overline{T(B_1^X(0))}$ eine abgeschlossene konvexe Menge ist. Ist nun $y_0 \in B_\varepsilon(0)$ nicht in $T(B_1^X(0))$, so gibt es aufgrund des Hahn-Banachschen Trennungssatzes 1.3.5.5 ein $y' \in Y'$ mit

$$y'(y_0) < \inf \left\{ y'(v) \mid v \in \overline{T(B_1^X(0))} \right\}.$$

O.B.d.A. dürfen wir annehmen

$$y'(y_0) < -1 \leq \inf \left\{ y'(v) \mid v \in \overline{T(B_1^X(0))} \right\},$$

also (wenn wir y' durch $-y'$ ersetzen)

$$|y'(y_0)| > 1 \geq \sup \left\{ y'(v) \mid v \in \overline{T(B_1^X(0))} \right\}.$$

Damit ist für $x \in X$ mit $\|x\|_X < 1$

$$|T'y'(x)| = |y'(Tx)| \leq 1.$$

Insbesondere ist $\|T'y'\|_{X'} \leq 1$. Wir finden aber

$$|y'(y_0)| \leq \|y'\|_{Y'} \|y_0\|_Y$$

und damit

$$1 < \varepsilon \|y'\|_{Y'}.$$

Damit ist

$$1 \leq \frac{\varepsilon}{c} \|T'y'\|_{X'}.$$

Für $\varepsilon \leq c$ erhalten wir damit einen Widerspruch und das Lemma ist gezeigt. $\square$

Beweis von Satz 1.5.5.2 Wir wollen hier nur einige einfache Punkte abhaken, im Abschnitt 4.2 wird eine allgemeinere Version gezeigt werden, so dass wir uns hier kurz fassen können.

Die Äquivalenz der beiden ersten Aussagen ist klar, denn, (2) impliziert (1), ist trivial und, (1) impliziert (2) folgt dem Beweis aus Satz 1.5.5.6. Wir kommen zur Implikation (1) folgt (4). Da $\text{BILD}(T') \subset \ker(T)^\perp$ (wegen $T'y'(x) = y'(Tx) = 0$ für $x \in \ker T$) müssen wir nur noch die Umkehrung zeigen. Wir beginnen also mit einem $x' \in X'$, spezieller $x' \in \ker(T)^\perp$. Wir definieren eine Abbildung

$$z' : \text{BILD}(T) \rightarrow \mathbb{K} : y = Tx \mapsto x'(x).$$

Man beachte, dass $Tx_1 = Tx_2$ impliziert, dass $x'(x_1) = x'(x_2)$, da $x' \in \ker T^\perp$. z' ist beschränkt auf $\text{BILD}(T)$, denn mit Korollar 1.5.5.5 hat man

$$|z'(y)| \leq |x'(x)| = \|x'\|_{X'} \|x\|_X \leq \|x'\|_{X'} K \|y\|.$$

Mit dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $y' \in Y'$, welches z' fortsetzt. Nun ist $T'y' = x'$, denn

$$x'(x) = z'(Tx) = y'(Tx) = (T'y')(x).$$

Also ist $\ker T^\perp \subset \text{BILD}(T')$.

Die Implikation (4) nach (3) ist ebenfalls elementar, es bleibt die Implikation

(3) impliziert (1) oder (2). Wir zeigen (3) impliziert (1). Sei also $\text{BILD}(T')$ abgeschlossen, $Z = \overline{\text{BILD}(T)}$ der Abschluss des Bildes von T . Wir definieren $S : X \rightarrow Z : x \mapsto Tx$. Dann ist $\text{BILD}(S) \subset Z$ dicht und $S' : Z' \rightarrow X'$ injektiv. Nach dem Satz von Hahn-Banach 1.3.2.1 existiert zu $z' \in Z'$ eine Fortsetzung $y' \in Y'$. Dann ist für alle $x \in X$

$$T'y'(x) = y'(Tx) = y'(Sx) = z'(Sx) = S'z'(x).$$

Also ist

$$T'y' = S'z' \in X'.$$

Also gilt

$$\text{BILD}(T') = \text{BILD}(S')$$

und damit ist $\text{BILD}(S')$ nach Voraussetzung abgeschlossen. Insbesondere ist S' offen (auf $\text{BILD}(S')$) oder anders ausgedrückt, es existiert eine positive Konstante c mit

$$c\|z'\|_{Z'} \leq \|S'z'\|_{X'}.$$

Nach Lemma 1.5.5.7 ist S offen und damit surjektiv. Also ist $R(S) = R(T) = Z$ und der Satz ist gezeigt. $\square$

