Prof. Dr. Reiner Lauterbach SS2000

Übungen zur Funktionalanalysis mit Anwendungen

Blatt 7

Aufgabe 25 Man betrachte die reelle Gerade $\mathbb{R}$ als Maßraum (mit dem Lebesgue-Maß). Man zeige $f_n = \chi_{(n,\infty)}$ konvergiert μ-fast überall gegen null, aber nicht fast gleichmäßig.

Aufgabe 26 Es sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine fast überall beschränkte Folge auf dem endlichen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Man zeige: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge $S_\varepsilon \subset X$ mit $\mu(X \setminus S) < \varepsilon$ und $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist auf S_ε gleichmäßig beschränkt.

Aufgabe 27 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in L(\mu, X)$ und $S_n \in \mathcal{A}$ eine Folge meßbarer Mengen mit $\mu(S_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Man zeige

$$\int_{S_n} f \, d\mu \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Aufgabe 28 Man betrachte die Räume ℓ^p, die in Beispiel 1.3.5 (2) eingeführt wurden und zeige, daß

$$||c||_{\ell^p} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

für $p \geq 1$ eine Norm ist. Man zeige: (1) ℓ^p, $p \geq 1$ ist ein Banachraum und (2) für $1 \leq p < q < \infty$ ist $\ell^p \subset \ell^q$ und die Inklusion ist echt.

Abgabe22.5.2000