Übungen zur Funktionalanalysis mit Anwendungen

Blatt 6

Aufgabe 21 **(1)** Wir definieren $C_0 = [0\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Induktiv definieren wir die Menge C_{n+1} indem wir aus jedem Teilintervall von C_n das mittlere Drittel entfernen. $\mathcal{C} = \cap_{n=0}^{\infty} C_n$ nennt man die Cantormenge. Man zeige: C ist kompakt, ist gleich der Menge aller ihrer Häufungspunkte (perfekt), hat leeres Inneres und ist vom Maß null.
(2) Eine kompakte, perfekte Menge mit leerem Inneren heißt cantorartig. Man zeige: es gibt cantorartige Mengen vom positiven Maß.
(3) Man zeige: es gibt eine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $[0, 1]$, deren Klasse keine Riemann-integrierbare Funktion enthält.

Aufgabe 22 Man konstruiere eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$1.)\ f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}), \quad 2.)\ \mathrm{supp}(f) \subset [0, 1], \quad 3.)\ \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = 1;$$

Aufgabe 23 Man betrachte die Funktion ρ aus der vorigen Aufgabe. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und definiere für $h > 0$ und $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ die Funktion $u_h(x) = \frac{1}{h^n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy$. Man zeige

1. u_h ist in $C^{\infty}(\Omega')$ für jedes $\Omega' \subset \Omega$ mit $\mathrm{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > h$.
2. $\lim_{h \searrow 0} u_h = u$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum in Ω.

Aufgabe 24 **(1)** Es sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ nicht fallend. Man zeige: g hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.
(2) Jede Funktion g von beschränkter Variation läßt sich als Differenz zweier nicht-fallender Funktionen schreiben.
(3) Sind zwei Funktionen $g_1, g_1 \in BV([a, b])$ und C_i sei die Menge der Punkte in denen g_i stetig ist. Gilt $g_1 = g_2$ auf $C_1 \cup C_2$, so ist für jede Funktion $f \in C([a, b], \mathbb{R})$

$$\int_a^b f\, dg_1 = \int_a^b f\, dg_2.$$

Abgabe: 15.5.2000