Prof. Dr. Reiner Lauterbach SS2000

Übungen zur Funktionalanalysis mit Anwendungen

Blatt 5

Aufgabe 17 Man zeige, daß die metrische Topologie, die von einer Fréchet-Metrik erzeugt wird, nicht von der Wahl der Ausschöpfung abhängt.

Aufgabe 18 Der Raum $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ mit der Fréchet-Metrik aus der Vorlesung hat die Heine-Borel-Eigenschaft, d.h. beschränkte Folgen haben konvergente Teilfolgen.

Aufgabe 19 Sind die folgenden Teilmengen von $C((0,1), \mathbb{R})$ beschränkt:

1. $\left\{x^\alpha \;\middle|\; -1 \leq \alpha \leq 0\right\}$
2. $\left\{x^{-n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$?

Aufgabe 20 Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sei $\xi = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \dots \xi_n = b\}$ eine Zerlegung mit Feinheit δ_f, d.h. $\max |\xi_{i+1} - \xi_i| = \delta_f$. Für $\zeta_i \in (\xi_i, \xi_{i+1})$ setze

$$\pi_\xi^g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf f(\zeta_i)(g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)) \text{ und } \Pi_\xi^g(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup f(\zeta_i)(g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)).$$

Das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b f dg$ von f bezüglich g existiert, falls es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\delta_f < \delta$ impliziert $\Pi_\xi^g(f) - \pi_\xi^g(f) < \varepsilon$. $\lim_{\delta_f \to 0} \pi_\xi^g(f)$ ist das Riemann-Stieltjes-Integral von f bezüglich g.
Man zeige für $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ und $g \in BV([a, b])$:

1. $\int_a^b f dg$ existiert.
2. $\ell(g) : f \mapsto \int_a^b f dg \in (C([a, b], \mathbb{R}))'$, was ist $\|\ell(g)\|_{(C([a,b],\mathbb{R}))'}$?
3. Zu jedem $x_0 \in (a, b)$ existiert eine Funktion $g_{x_0} \in BV([a, b])$, so daß $f(x_0) = \int_a^b f dg_{x_0}$ ist. Was macht man für $x_0 = a, b$?

Abgabe 8.5.2000