Prof. Dr. Reiner Lauterbach SS2000

Übungen zur Funktionalanalysis mit Anwendungen

Blatt 4

Aufgabe 13

1. Man zeige Satz 3.1.4 der Vorlesung.
2. In einem metrischen linearen Raum heißt eine Menge A genau dann beschränkt, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\alpha \in \mathbb{K}$ existiert, so daß gilt $\alpha B_\varepsilon(0) \supset A$. Man begründe, warum diese Definition sinnvoll ist, und daß sie in normierten Räumen auf den üblichen Begriff der Beschränktheit führt.
3. Man zeige: ist d_F eine Fréchet-Metrik auf V, so ist eine Menge genau dann beschränkt, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Konstante M_n gibt mit $p_n(A) \leq M_n$.
4. Man zeige: $(C(\Omega, \mathbb{R}), d_F)$, d_F wie in der Vorlesung angegeben, ist nicht normierbar, d.h. es gibt keine Norm, die die gleiche Topologie wie d_F erzeugt.

Aufgabe 14

1. Es seien $(X, \mathfrak{T}_1)$, $(X, \mathfrak{T}_2)$ topologische Räume. Man zeige, $\mathfrak{T}_1$ ist genau dann feiner als $\mathfrak{T}_2$, wenn die Identität
$$\mathbb{1} : (X, \mathfrak{T}_1) \to (X, \mathfrak{T}_2)$$
stetig ist.
2. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß zwei Normen auf einem linearen Raum die gleiche Topologie erzeugen.

Aufgabe 15 In einem nomierten linearen Raum V gilt für $x_0 \in V$

$$\|x_0\|_V = \max\left\{ |f(x_0)| \;\middle|\; f \in V',\ \|f\|_{V'} = 1 \right\}.$$

Aufgabe 16 Man zeige, daß die Einheitskugel in $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt ist.

Abgabe 4.5.2000