Prof. Dr. Reiner Lauterbach SS2000

Übungen zur Funktionalanalysis mit Anwendungen

Blatt 3

Aufgabe 9

1. Man zeige: der Abschluß eines Unterraumes eines topologischen linearen Raumes ist ein Unterraum.
2. Man zeige: der Kern einer linearen Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$ eines topologischen linearen Raumes in den Skalarenkörper ist entweder abgeschlossen oder dicht.

Aufgabe 10 Es sei $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Man zeige

$$L(v)(x) = \int_0^1 K(x,y)v(y)dy$$

definiert einen stetigen linearen Operator $L : C([0,1],\mathbb{K}) \to C([0,1],\mathbb{K})$.

Aufgabe 11 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet Man zeige, daß der Operator $L : C^1(\Omega) \to C(\Omega) : f \mapsto D^j f$ stetig ist. Entsprechend zeige man, daß

$$\Delta : C^2(\Omega) \to C(\Omega) : f \mapsto \Delta f = \sum_{i=1}^{n} D^{ii} f$$

ein beschränkter linearer Operator ist.

Aufgabe 12 Für $\Omega = (0,1)$. betrachte man den Operator $\Delta = d^2/dt^2 : X = C^2(\Omega, \mathbb{R}) \to Y = C(\Omega, \mathbb{R})$. Es sei $Z = C_0^\infty((0,1), \mathbb{R})$. Man zeige:

1. Durch $z \mapsto f_z : Y \to \mathbb{R}$, mit

   $$f_z(y) = \int_0^1 z(t)y(t)dt,$$

   wird Z in den Dualraum Y' eingebettet. (Ist Z dicht in Y'?)
2. Was ist $\Delta' z$ für $z \in Z \hookrightarrow Y'$?

Abgabe 27.4.2000