Prof. Dr. Reiner Lauterbach SS2000

Übungen zur Funktionalanalysis mit Anwendungen

Blatt 12

Aufgabe 45 Man untersuche die folgenden Operatoren auf ihr Spektrum.

1. Sei $f \in C([0,1],\mathbb{C})$ und $T_f : C([0,1],\mathbb{C}) \to C([0,1],\mathbb{C}) : g \mapsto f \cdot g$.
2. $\sigma_+ : \ell^p \to \ell^p : (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \mapsto (0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots)$.
3. $\sigma_- : \ell^p \to \ell^p : (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2, \ldots) \mapsto (\gamma_2, \gamma_3, \ldots)$.

Aufgabe 46 Für einen beschränkten linearen Operator ist $\Sigma_T \neq \emptyset$, Σ_T ist abgeschlossen und es gilt $\Sigma_T \subset \overline{B_{\|T\|_{\mathcal{L}(X)}}(0)} \subset \mathbb{C}$.

Aufgabe 47 Man beweise, daß die Volterrasche Integralgleichung

$$x(t) - \int_0^t k(t,s)x(s)ds = y(t)$$

für jedes $y \in X = C([0,1],\mathbb{R})$ genau eine Lösung $x \in X$ besitzt.

Hinweis: Setze $Tx(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)ds$. Dann gilt: $\|T^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M^n}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $M = \max_{0 \leq s,t \leq 1} |k(s,t)|$.

Aufgabe 48 Es sei X ein reeller Hilbertraum, $y' \in X'$ gegeben. Man zeige:

1. $J(x) = \|x\|^2 - 2y'(x)$ ist auf X nach unten beschränkt.
2. $m = \inf_{x \in X} J(x)$ existiert. Ist eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben mit $\lim_{n\to\infty} J(x_n) = m$, so gilt $J(x_n) + J(x_m) = \frac{1}{2}\|x_n - x_m\|_X^2 + 2J\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right)$.
3. Eine solche Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.
4. Ist $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, so ist $Jx_0 = m$.
5. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in X$ gilt $J(x_0 + tx) \geq J(x_0)$ und daher ist $\langle x_0, x\rangle_X = y'(x_0)$.

Abgabe 3.7.2000