Prof. Dr. Reiner Lauterbach SS2000

Übungen zur Funktionalanalysis mit Anwendungen

Blatt 1

Aufgabe 1 Man zeige:

1. Jeder Vektorraum hat eine Basis.
2. Je zwei Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.

Aufgabe 2 Man zeige: ist V ein linearer Raum, $\mu : V \to \mathbb{K}$ eine nichttriviale lineare Abbildung, dann gibt es ein $v \in V$, so daß $\ker \mu \oplus \text{span}[v] = V$ ist.

Aufgabe 3 Es sei $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ und $L : V \to W$ linear.

1. Man zeige: der algebraische Dualraum von V ist isomorph zu $\mathbb{K}^n$.
2. Das Bild wird charakterisiert durch $\text{BILD}(L) = (\ker L^*)^\perp$, wobei

$$(\ker L^*)^\perp = \{w \in W \mid w^*(w) = 0 \text{ für alle } w^* \in \ker L^*\}\,.$$

Aufgabe 4 Man zeige, daß auf einer endlichen Menge X jede Hausdorff-Topologie $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(X)$ ist.

Abgabe: 10.4.2000