Kapitel 8

Lineare Operatoren

Wir wollen nun nochmals zum Thema lineare Operatoren zurückkehren und eine etwas verallgemeinerte Klasse dieser Operatoren ansehen.

8.1 Abgeschlossene lineare Operatoren

In diesem Abschnitt betrachten wir Operatoren, die nicht überall definiert sind. Für einen Operator, der auf einer Teilmenge von X definiert ist und werte in Y annimmt, schreiben wir auch $T : X \to Y$ mit *Definitionsbereich* $D(T)$.

Definition 8.1.1
Wir nennen einen Operator $T_1 : X \to Y$ eine Erweiterung von $T : X \to Y$, falls $D(T) \subset D(T_1)$ und $T_{1|_{D(T)}} = T$ gilt. Wir schreiben dafür $T \subset T_1$.

Bemerkung 8.1.2
Die Tatsache, daß die Operatoren nicht überall definiert sind, sorgt für Probleme verschiedenster Natur, z.B. definiert man Summen auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche. Dies kann dazu führen, daß die Definitionsbereiche von Reihen leer sind. Auch ist i.A.

$$(S + T) - T \subset S.$$

Oberstes Gebot ist sorgfältiger Umgang mit Definitinsbereichen.

Definition 8.1.3

1. *Es seien X, Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ mit Definitionsbereich $D(T)$ heißt dicht definiert, falls $\overline{D(T)} = X$ ist.*

2. *Ein dicht definierter Operator$T : X \to Y$ heißt* abgeschlossen, *falls*

$$G(T) = \left\{ (x, Tx) \;\middle|\; x \in D(T) \right\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$ ist. Die Menge der abgeschlossenen Operatoren von $X \to Y$ wird mit $\mathcal{C}(X, Y)$ bezeichnet.

Bemerkung 8.1.4
$\mathcal{C}(X, Y)$ kann metrisiert werden, wir wollen dies aber im Moment nicht vertiefen.

Lemma 8.1.5
Ein Operator $T : X \to Y$ mit $D(T)$ dicht in X, ist genau dann abgeschlossen, wenn

$$x_n \to \bar{x}, \; Tx_n \to \bar{y}$$

impliziert, daß $\bar{x} \in D(T)$ und $Y\bar{x} = \bar{y}$.

Beweis. Klar! □

Definition 8.1.6
Ein Operator heißt abschließbar, falls es eine abgeschlossene Erweiterung von T gibt.

Lemma 8.1.7
Ein Operator T ist genau dann abschließbar, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

1. *$\overline{G(T)}$ ist Graph eines linearen Operators $\bar{T}$.*

2. *$u_n \in D(T)$, $u_n \to 0$ und $Tu_n \to v$ impliziert $v = 0$.*

Beweis. Siehe Übungen. □

Beispiel 8.1.8
1. $T : C([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R})$,
$D(T) = C^1([0, 1], \mathbb{R}) \cap \left\{ u \in C([0, 1], \mathbb{R}) \;\middle|\; u(0) = u(1) = 0 \right\}$ und $Tu(t) = u'(t)$.

2. $T : L^p(\Omega, \mathbb{R}) \to L^p(\Omega, \mathbb{R})$, $D(T) = W^{2,p}(\Omega, \mathbb{R}) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ und $Tu(x) = \Delta u(x)$.

Satz 8.1.9
Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ abgeschlossen und $D(T) = X$. Dann ist T beschränkt.

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz 4.4. □

Im Kontext abgeschlossener Operatoren ist es etwas komplizierter duale, bzw. adjungierte Operatoren zu definieren.

Definition 8.1.10
1. *Seien zunächst X, Y Banachräume mit Dualräumen X', Y'. Die Operatoren $T : X \to Y$, $D(T) \subset X$, und $S : Y' \to X'$ mit $D(S) \subset Y'$ nennt man* dual zueinander, *falls für alle $x \in D(T)$ und alle $y' \in D(S)$ gilt*
$$y'(Tx) = Sy'(x). \tag{8.1}$$
2. *Entsprechend definieren wir im Hilbertraum den adjungierten Operator, seien also X, Y Hilberträume. $T : X \to Y$, $D(T) \subset X$, und $S : Y \to X$ mit $D(S) \subset Y$ nennt man* adjungiert zueinander, *falls für alle $x \in D(T)$ und alle $y \in D(S)$ gilt*
$$\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, Sy\rangle_X.$$

Wir stellen uns die natürliche nach Existenz und Eindeutigkeit dualer, bzw. adjungierter Operatoren. Darüber gibt der folgende Satz Auskunft. Im allgemeinen gibt es zu einem Operator $T : X \to Y$ viele Operatoren $S : Y' \to X'$, so daß T, S dual zueinander sind.

Satz 8.1.11
Ist $D(T)$ dicht, so gibt es genau einen Operator T', so daß jeder zu T duale S in T enthalten ist, also daß T eine Erweiterung von S ist. Eine entsprechende Aussage gilt für Hilberträume und adjungierte Operatoren.

Beweis. Wir setzen
$$D(T') = \left\{ y' \in Y' \;\middle|\; \text{es gibt ein } x' \in X' \text{ mit } y'(Tx) = x'(x)\ \forall\ x \in D(T) \right\}$$
und $T'y' = x'$. Zu zeigen ist, daß x' eindeutig durch y' festgelegt ist. Also angenommen für $x_1', x_2' \in X'$ und für alle $x \in D(T)$ gilt
$$x_1'(x) = y'(Tx) = x_2'(x).$$

Dann ist aber, da $D(T)$ dicht liegt $x'_1 = x'_2$. Offenkundig ist T' dual zu T und enthält jeden anderen dualen Operator. □

Wir wollen nun zeigen, daß duale Operatoren abgeschlossen sind. Dazu erst eine einfache Hilfsüberlegung. Die Dualitätsbeziehung Gleichung (8.1) $y'(Tx) = Sy'(x)$ schreibt sich um zu

$$-Sy'(x) + y'(Tx) = 0 \text{ oder } (-Sy', y')(x, Tx) = 0$$

wobei $X' \times Y'$ aufgefaßt wird als $(X \times Y)'$. Wir definieren einen linearen Operator

$$R : Y' \times X' \to X' \times Y' : (y', x') \mapsto (-x', y').$$

R ist offensichtlich ein toplinearer Isomorphismus von Banachräumen.

Satz 8.1.12
$S : Y' \to X'$ und $T : X \to Y$ sind genau dann dual zueinander wenn

$$R(G(S)) \perp G(T), \text{ d.h. } R(y', Sy')(x, Tx) = 0$$

für alle $x \in X$ und alle $y' \in Y'$. Eine entsprechende Aussage gilt für Hilberträume und adjungierte Operatoren.

Beweis. Nichts zu zeigen! □

Wir setzen für einen Operator $S : Y' \to X'$

$$G'(S) = RG(S).$$

Dann nimmt die Bedingung Gleichung (8.1) die Form

$$G(T) \perp G'(-S) \tag{8.2}$$

an. Wobei $\perp$ in diesem Zusammenhang bedeutet, daß für alle Paare (x, Tx) in $G(T)$ und alle Paare $(-Sy', y')$ in $G'(-S)$ gilt $(-Sy', y')(x, Tx) = 0$. Natürlich gilt insbesondere

$$G'(-T') = G(T)^{\perp}.$$

Natürlich bedeutet hier $G(T)^{\perp}$ die Menge aller Paare, die auf den Elementen von $G(T)$ verschwinden. Beachte, daß insbesondere folgt $G(T)^{\perp}$ ist Graph eines Operators.

Korollar 8.1.13
Der duale Operator eines abgeschlossenen, dicht definierten Operators ist abgeschlossen.

Beweis. Annihilatoren sind abgeschlossen. □

Bemerkung 8.1.14
Man beachte, daß das Argument auch funktioniert, wenn T nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 8.1.15
Man zeige, daß für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ die Definition des dualen Operators aus Definition 2.3.7 mit der neuen Definition übereinstimmt.

Satz 8.1.16
Sind $X : X \to Y$ und $S : Y' \to X'$ dual zueinander, und ist einer von beiden dicht definiert, so ist der andere abschließbar.

Beweis. Ist T dicht definiert, so existiert T' und ist abgeschlossen, also besitzt S eine abgeschlossene Erweiterung und ist daher abschließbar (nach Lemma 8.1.7).

Ist S hingegen dicht definiert, so ist $G'(-S)^\perp$ ein Graph in $X'' \times Y''$ (genau wie zuvor $G(T)^\perp$ sich als Graph erwiesen hat.) Da $G'(-S)$ auf $G(T)$ verschwindet, ist $J_{X\times Y}(G(T)) \subset G'(-S)$. Da $G'(-S)$ abgeschlossen ist, ist auch $\overline{J_{X\times Y}(G(T))} \subset G'(-S)$. Also ist $\overline{G(T)}$ ein Graph und T abschließbar. □

Satz 8.1.17
Sind X, Y reflexiv und $T : X \to Y$ dicht definiert und abschließbar, so ist T' dicht definiert und abschließbar und $\bar{T} = T''$ (nach geeigneter Identifikation).

Beweis. Wir betrachten ${}^\perp(G(T)^\perp) = \overline{G(T)} = G(\bar{T})$ (beachte allgemein: $U \subset X$ linearer Unterraum, ${}^\perp(U^\perp) = \bar{U}$ wegen des Satzes von Hahn-Banach 2.2.2). Daher ist $G(\bar{T}) =^\perp G'(-T')$. Dann ist T' dicht definiert, ansonsten gibt es ein $y \in Y$ mit $y \neq 0$ und $y \perp D(T')$ (in dem Sinne, daß alle Funktionale in $D(T')$ auf y verschwinden). Dann ist $(0, y) \in G'(-T')^\perp = G(\bar{T})$. Dies widerspricht der Tatsache, daß $G(\bar{T})$ ein Graph ist. $T'' : X'' \to Y''$ ist daher definiert. Wir haben $G(T'') = G'(-T')^\perp = G(\bar{T})$ (nach Identifikation). Daher ist $T'' = \bar{T}$. □

Satz 8.1.18
Sei $T \in \mathcal{C}(X,Y)$ dicht definiert. Existiert T^{-1} und ist $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, so existiert $(T')^{-1}$ und $(T')^{-1} \in \mathcal{L}(Y',X')$. Ferner gilt

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'.$$

Beweis. Angenommen $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, dann ist $(T^{-1})' \in \mathcal{L}(X',Y')$ und für $y' \in D(T')$ und $y \in Y$ gilt

$$((T^{-1})'T'y')(y)) = (T'y')(T^{-1}y) = y'(TT^{-1}y) = y'(y).$$

Also ist $(T^{-1})'(T'y') = y'$.

Umgekehrt, für $x' \in X'$ und $x \in D(T)$ ist

$$((T^{-1})'x')(Tx) = x'(T^{-1}Tx) = x'(x)$$

und damit $(T^{-1})'x' \in D(T')$ mit $T'(T^{-1})'x' = x'$. Also existiert $(T')^{-1}$ und gleich $(T^{-1})'$.

Ist $(T')^{-1} \in \mathcal{L}(X',Y')$ dannist für $x' \in X'$ und $x \in D(T)$

$$((T')^{-1}x')(Tx) = (T'(T')^{-1}x')(x) = x'(x).$$

Für jedes $x \in X$ gibt es aber ein $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} = 1$ und $x'(x) = \|x\|_X$. Für dieses x' hat man dann

$$\|x\|_X = ((T')^{-1}x')(Tx) \leq \|(T')^{-1}x'\|_{Y'}\|Tx\|_Y \leq \|(T')^{-1}\|_{\mathcal{L}(X',Y')}\|Tx\|_Y.$$

Damit ist T invertierbar und

$$\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \|(T')^{-1}\|_{\mathcal{L}(X',Y')}.$$

Damit T^{-1} beschränkt, also BILD(T) abgeschlossen. Bleibt zu zeigen, daß BILD(T) $= Y$. Angenommen y' verschwindet auf BILD(T), so ist $T'y' = 0$ und wegen der Injektivität von T' dann $y = 0$. □

Definition 8.1.19
Sei H ein Hilbertraum, dann heißt ein Operator dicht definierter, abgeschlossener Operator T

1. symmetrisch, *falls $T^* \supset T$.*
2. selbstadjungiert, *falls T symmetrisch ist und $D(T^*) = D(T)$ ist.*

Satz 8.1.20 (Friedrich)
Jeder dicht definierte symmetrische Operator besitzt eine selbstadjungierte Erweiterung.

Beweis. Siehe z.B. Yosida [16]. □

8.2 Projektoren und Spektraleigenschaften

Wir beginnen mit der Beobachtung, daß es nicht klar ist, wie man für nicht überall definierte Operatoren Vertauschbarkeit und Invarianz von Unterräumen definiert. Wir betrachten einen wichtigen Spezialfall.

Definition 8.2.1
Sei $T \in \mathcal{C}(X)$ und $A \in \mathcal{L}(X)$, dann sagen wir T vertauscht *mit A, falls*

$$AT \subset TA.$$

Die Schwierigkeit die Invarianz eines Unterraumes U zu definieren kommt daher, daß $D(T) \cap U$ nur aus 0 bestehen kann und dann nichts zu überprüfen ist. Wir wollen allerdings die Zerlegung von T in Anteile komplementärer Unterräume definieren. Ist X ein Banachraum, U, V seien komplementäre, abgeschlossene Unterräume, also

$$X = U + V,\ U \cap V = \{0\}.$$

Definition 8.2.2
Eine lineare Abbildung $P : X \to U$ heißt Projektor *auf U längs V, falls P Projektor ist und* $\mathrm{BILD}(P) = U$ *und* $\ker P = V$ *ist.*

Lemma 8.2.3
In der angegebenen Situation existiert immer ein stetiger Projektor auf U längs V.

Beweis. Wir zeigen P ist abgeschlossen und damit folgt der Satz aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge $x_n \to x$ und ist $\{Px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $Px_n \to y$, so konvergiert auch $z_n = x_n - Px_n$, sagen wir gegen z. Da $Pz_n = Px_n - P^2x_n = y_n - y_n = 0$, ist $z_n \in V$ und wegen der Abgeschlossenheit von V auch $z \in V$. Dann ist $x + z = y$ und $Py = P(x + z) = Px + Pz = Px$. Da $y \in U$ ist $Py = y$ und damit $Px = y$. □

Definition 8.2.4
Wir sagen $T : X \to X,\ D(T) \subset X$ wird durch U, V zerlegt*, falls $X = U \oplus V$ und für den Projektor auf U längs V gilt*

$$PD(T) \subset D(T), TU \subset U, TV \subset V.$$

Lemma 8.2.5
Die angegebene Bedingung ist äquivalent zu Vertauschbarkeit

$$TP \supset PT.$$

Beweis. Übung ∎

Definition 8.2.6
Wird T wie oben zerlegt, so definieren wir die Anteile T_U, T_V durch $T_U : U \to U$, $D(T_U) = D(T) \cap U$ und $T_U u = Tu \in U$. In entsprechender Weise definieren wir T_V.

Lemma 8.2.7
Ist T abgeschlossen, so gilt dies auch für T_U, bzw. T_V.

Beweis. Beachte $G(T_U) = G(T) \cap U \times U$. ∎

Wir erinnern an die Definition der Resolventenmenge und der Resolvente.

Aufgabe 8.2.8
Man zeige, daß die Resolvente eines abgeschlossenen linearen Operators T für ein $\lambda \in P(T)$ überall definiert ist.

Lemma 8.2.9
Ist $\lambda \in P(T)$, so gilt

$$R(\lambda, T)T \subset T(R(\lambda, T) = 1\!\!1 + \lambda R(\lambda, T).$$

Beweis. Offenkundig ist $D(R(\lambda, T)T) = D(T) \subset X = D(TR(\lambda, T)$ und für $u \in D(T)$ gilt

$$Tu = TR(\lambda, T)(T - \lambda 1\!\!1)u = (1\!\!1 + R(\lambda, T)(T - \lambda 1\!\!1)u.$$

Daher sind die Operatoren auf der dichten Menge BILD$(T - \lambda 1\!\!1)$ gleich und wegen der Beschränktheit sind sie überhaupt gleich. Für die linke Seite und $u \in D(T)$ gilt

$$R(\lambda, T)Tu = R(\lambda, T)Tu - \lambda R(\lambda, T)1\!\!1 u + \lambda R(\lambda, T)1\!\!1 u = u + \lambda R(\lambda, T)u.$$

∎

Satz 8.2.10
Ist $P(T) \neq \emptyset$, so kommutiert $A \in \mathcal{L}(X)$ mit T genau dann wenn A mit $R(\lambda, T)$ kommutiert.

Beweis. Folgt sofort aus der Aussage, sind $A, B \in \mathcal{L}(X)$ und A invertierbar, so kommutiert A mit B genau dann, wenn B mit A^{-1} kommutiert. $\square$

Lemma 8.2.11
Es gilt für $\lambda_1, \lambda_2 \in P(T)$ die Resolventengleichung

$$R(\lambda_1, T) - R(\lambda_2, T) = (\lambda_1 - \lambda_2) R(\lambda_1, T) R(\lambda_2, T). \tag{8.3}$$

Beweis. Folgt sofort aus der Beobachtung

$$R(\lambda_1, T)(T - \lambda_2 \mathbb{1}) R(\lambda_2, T) - R(\lambda_1, T)(T - \lambda_1 \mathbb{1}) R(\lambda_2, T) = R(\lambda_1, T) - R(\lambda_2, T).$$

$\square$

Nun wollen wir uns überlegen, daß man für die Darstellung der Resolvente die Neumannsche Reihe hat.

Satz 8.2.12
Die Resolventenmenge eines abgeschlossenen linearen Operators ist offen, $R(\cdot, T)$ ist analytisch auf jeder Zusammenhangskomponente von $P(T)$ und $P(T)$ ist das Holomorphiegebiet *von $R(\cdot, T)$, d.h. es gibt keine analytische Fortsetzung von $R(\cdot, T)$ jenseits des Randes von $P(T)$.*

Beweis. Wir betrachten die Neumannsche Reihe

$$S(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}.$$

Diese Reihe konvergiert für hinreichend kleines $|\lambda - \lambda_0|$. Für $u \in D(T)$ ist dann

$$S(\lambda)(T - \lambda \mathbb{1}) u = u,$$

denn

$$R(\lambda_0, T)(T - \lambda \mathbb{1}) u = R(\lambda_0, T)(T - \lambda_0 \mathbb{1} + \lambda_0 \mathbb{1} - \lambda \mathbb{1}) u = u + (\lambda_0 - \lambda) R(\lambda_0, T) u$$

und damit

$$\begin{aligned}
S(\lambda)(T - \lambda \mathbb{1}) u &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, T)^n R(\lambda_0, T)(T - \lambda \mathbb{1}) u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, T)^n (u + (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0, T) u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, T)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{n+1} R(\lambda_0, T)^{n+1} \\
&= u.
\end{aligned}$$

Wir müssen noch $(T-\lambda 1\!\!1)S(\lambda)$ betrachten. Der Operator $(T-\lambda 1\!\!1)$ ist abgeschlossen und für $u \in X$ ist

$$S_n(\lambda)u = \sum_{j=0}^{n} (\lambda-\lambda_0)^j R(\lambda_0,T)^{j+1} u \in D(T) = D(T-\lambda 1\!\!1),$$

konvergiert gegen $S(\lambda)u$ und

$$\begin{aligned}
(T-\lambda 1\!\!1)S_n(\lambda)u &= \sum_{j=0}^{n} (\lambda-\lambda_0)^j (T-\lambda 1\!\!1) R(\lambda_0,T) R(\lambda_0,T)^j u \\
&= \sum_{j=0}^{n} (\lambda-\lambda_0)^j (T-\lambda_0 1\!\!1+\lambda_0 1\!\!1-\lambda 1\!\!1) R(\lambda_0,T)) R(\lambda_0,T)^j u \\
&= \sum_{j=0}^{n} (\lambda-\lambda_0)^j (1\!\!1-(\lambda-\lambda_0) R(\lambda_0,T)) R(\lambda,T)^j u \\
&= u-(\lambda-\lambda_0)^{n+1} R(\lambda_0,T)^{n+1} u \\
&\to u.
\end{aligned}$$

Also ist (Definition von Abgeschlossenheit) $S(\lambda)u \in D(T)$ und $(T-\lambda)S(\lambda)u = u$. □

Definition 8.2.13
Das Spektrum eines abgeschlossenen linearen Operators ist separiert, *wenn es eine geschlossene, rektifizierbare Kurve Γ in $P(T) \subset \mathbb{C}$ gibt, so daß Σ_T in beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ nichttriviale Anteile hat und $\Gamma \cap \Sigma_T = \emptyset$ ist.*

Satz 8.2.14
Sei Σ_T wie beschrieben, separiert mit Anteilen Σ_1, Σ_2, wobei Σ_1 im beschränkten Teil von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ liege. Dann gibt es eine Zerlegung von $X = U \oplus V$ und eine entsprechende Zerlegung von T in Anteile T_U, T_V so daß die Spektra von T_U mit σ_1 und T_V mit Σ_2 zusammenfallen. Ferner gilt $T_U \in \mathcal{L}(U)$.

Beweis. Wir definieren einen Projektor durch

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda,T)\, d\lambda.$$

Wir erinnern uns an den Integralsatz von Cauchy aus der Funktionentheorie, siehe z.B. Conway [3] und schließen, daß der Wert des Integrals unabhängig vom Integrationsweg ist, solange die Homotopieklasse in $R(T)$ erhalten bleibt. Also ist

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\Gamma}} R(\lambda, T)d\lambda,$$

wobei $\tilde{\Gamma}$ eine Kurve ist, die außerhalb von Γ verläuft. Damit kann man P^2 in der Form

$$P^2 = \left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\Gamma}} R(\lambda', T)d\lambda'\right)\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R(\lambda, T)d\lambda\right)$$

darstellen, dies ergibt

$$P^2 = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\tilde{\Gamma}}\int\limits_{\Gamma} R(\lambda', T)R(\lambda, T)d\lambda d\lambda'.$$

Unter Verwendung der Resolventengleichung (8.3) wird dies

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\tilde{\Gamma}}\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{1}{\lambda' - \lambda}\right)\left(R(\lambda', T) - R(\lambda, T)\right) d\lambda d\lambda' \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left(\int\limits_{\tilde{\Gamma}} R(\lambda', T)\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{\lambda' - \lambda}\right) d\lambda d\lambda' \right. \\ &\qquad \left. - \int\limits_{\tilde{\Gamma}}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{\lambda' - \lambda}\right) R(\lambda, T)d\lambda d\lambda'\right). \end{aligned}$$

Die Windungszahl von $\tilde{\Gamma}$ bezüglich $\lambda \in \Gamma$ ist 1 und die Windungszahl von Γ bezüglich $\lambda' \in \tilde{\Gamma}$ ist Null. Daher verschwindet der erste Term und der zweite wird nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge mit dem Cauchyschen Integralsatz zu

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R(\lambda, T)d\lambda.$$

Also ist $P^2 = P$.

P ist beschränkt, linear, also eine Projektion auf $M = \mathrm{BILD}(P)$ längs $N = \ker(P) = \mathrm{BILD}(\mathbb{1} - P)$. Offenkundig vertauscht P mit der Resolvente $R(\zeta, T)$ für $\zeta \in P(T)$ und damit wird T in die entsprechenden Anteile T_M bzw. T_N zerlegt. Für $\zeta \in P(T)$ folgt aus der Vertauschbarkeit von $R(\zeta, T)$ mit P, daß die entsprechenden Anteile $(R(\zeta, T))_M$, bzw. $(R(\zeta, T))_N$ existieren und diese sind natürlich die Inversen von $T_M - \zeta\mathbb{1}_M$, bzw. $T_N - \zeta\mathbb{1}_N$. Damit ist klar $P(T) \subset P(T_M), P(T_N)$.

Wir wollen nun zeigen, daß $\Sigma_2 \subset P(T_M)$. Für $\zeta \in P(T)$ und $u \in M$ gilt

$$(R(\zeta, T)_M u = R(\zeta, T)u = R(\zeta, T)Pu.$$

Ist nun $\zeta \notin \Gamma$ so kann man (unter Verwendung der Resolventengleichung) weiterschreiben

$$R(\zeta, T)Pu = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R(\lambda, T)R(\zeta, T)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{1}{\lambda - \zeta}\left(R(\lambda, T) - R(\zeta, T)\right)d\lambda. \tag{8.4}$$

Wegen des Cauchyschen Integralsatzes ist dies

$$R(\zeta, T)Pu = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{1}{\lambda - \zeta}R(\lambda, T)d\lambda.$$

Die rechte Seite ist außerhalb von Γ holomorph, damit hat $R(\zeta, T)P$ eine holomorphe Fortsetzung auf die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Damit ist $\Sigma(T_M) \subset Sigma_1$. Aus Gleichung folgt aber auch für ζ innerhalb Γ

$$R(\zeta, T)P = R(\zeta, T) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R(\lambda)\frac{1}{\zeta - \lambda}d\lambda.$$

Damit hat

$$R(\zeta, T)(\mathbb{1} - P) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R(\lambda)\frac{1}{\zeta - \lambda}d\lambda.$$

eine holomorphe Fortsetzung die beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ und $\Sigma(T_N) \subset \Sigma_2$. Da ein Punkt in $P(T_M) \cap P(T_N)$ auch in $R(T)$ liegt, folgt $\Sigma(T_M) = \Sigma_1$ und $\Sigma(T_N) = \Sigma_2$. Es gilt

$$PT \subset TP = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R(\lambda, T)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda R(\lambda, T)d\lambda,$$

denn P kommutiert mit der Resolvente und daher mit T. Die erste Gleichheit in der obigen Gleichung entsteht durch die Darstellung des Integrals als Grenzwert einer Folge von endlichen Summen S_n (Riemann-Integral). Da T ist linear und vertauscht mit der endlichen Summation. Also hat man S_n ist konvergent, $TS_n = S_n \circ T$. Da in jedem Summanden der Term $TR(\lambda, T) = 1 + \lambda R(\lambda, T)$ steht, konvergiert die Folge und die Abgeschlossenheit von T erlaubt uns zu schließen , daß TP definiert ist und die angegebene Darstellung hat. Die zweite Gleichheit folgt aus $TR(\lambda, T) = \mathbb{1} + \lambda R(\lambda, T)$ und dem Cauchyschen Integralsatz. Schließlich sieht man, daß der rechteste Term einen beschränkten Operator darstellt. Damit ist T_M beschränkt. □

Wir betrachten nun kurz Eigenwerte, die isoliert im Spektrum liegen.

Definition 8.2.15
Ein Eigenwert λ_0 heißt isolierter Eigenwert eines Operators T, falls es eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von λ_0 gibt mit $(U \setminus \{\lambda_0\}) \subset R(T)$.

Betrachten wir die eben durchgeführte Konstruktion des Operators T_M so hat T_M ein Spektrum, das nur aus dem Punkt λ_0 besteht. Wir betrachten die Neumannsche Reihe

$$L_n(\lambda_0, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{-n-1} (T_M - \lambda \mathbb{1})^n.$$

Diese Reihe konvergiert überall außer bei $\lambda = \lambda_0$. Mit

$$D = (T - \lambda \mathbb{1})P = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0) R(\lambda, T) d\lambda \in \mathcal{L}(X)$$

ergibt sich die Darstellung

$$R(\lambda, T)P = -\frac{1}{\lambda - \lambda_0} P - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} D^n.$$

Da $R_N(\lambda, T)(\mathbb{1} - P)$ bei $\lambda = \lambda_0$ holomorph ist, ist

$$R(\lambda, T)(\mathbb{1} - P) = \sum_{n=0}^{\infty} S^n$$

mit

$$S = \lim_{\zeta \to \lambda_0} R(\zeta, T)(\mathbb{1} - P).$$

Dann hat man die Darstellung als Laurentreihe[1]

$$R(\lambda, T) = -\frac{1}{\lambda - \lambda_0} P - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} D^n + \sum_{n=0}^{\infty} S^{n+1}.$$

Der Anteil D heißt der *quasinilpotente* Anteil. Ist M endlich dimensional, so ist D nilpotent.

8.3 Operatoren mit kompakter Resolvente

Aufgabe 8.3.1
Wir definieren die erweiterte Resolventenmenge, bzw. das erweiterte Spektrum von T durch $R_{erw}(T) = R(T) \cup \{\infty\}$, falls T beschränkt ist und $\Sigma_{erw}(T) = \Sigma_T \cup \{\infty\}$, falls T nicht beschränkt ist. Durch $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ wird $\Sigma_{erw}(T)$ auf $\Sigma_{erw}(T^{-1})$ abgebildet.

Satz 8.3.2
Eigenwerte kompakter Operatoren haben keinen Häufungspunkt ungleich Null.

Beweis. Angenommen, wir hätten einen solchen Häufungspunkt, dann enthält jede Umgebung unendlich viele weitere Eigenwerte. Eine geschlossene Kurve, die λ_0 im mathematisch positiven Sinne einmal umläuft, hat positive Windungszahl für unendlich viele Eigenwerte und der zugehörige Unterraum M ist unendlichdimensional. Die Einschränkung T_M ist natürlich kompakt und bildet daher die abgeschlossene Einheitskugel auf eine relativ kompakte Menge ab. Da BILD(T) eine offene Umgebung der Null enthält erhalten wir einen Widerspruch. □

Lemma 8.3.3
Es sei T ein abgeschlossener linearer Operator. Gibt es ein $\lambda_0 \in P(T)$ mit $R(\lambda_0, T)$ ist kompakt, so ist $R(\lambda, T)$ für alle $\lambda \in P(T)$ kompakt.

Beweis. Folgt sofort aus der Resolventengleichung. □

---

[1] Pierre Alphonse Laurent (18.7.1813-2.9.1854) war Ingenieur in Le Havre und entdeckte, die nach ihm benannte Darstellung holomorpher Funktionen mit isolierten Singularitäten.

Definition 8.3.4
Ein abgeschlossener linearer Operator T mit $R(\lambda, T)$ ist kompakt für $\lambda \in P(T)$ heißt Operator mit kompakter Resolvente.

Satz 8.3.5
Operatoren mit kompakter Resolvente haben abzählbares Spektrum, das nur aus Eigenwerten besteht und sich höchstens bei unendlich häuft.

Beweis. Folgt aus dem zuvor Gesagten! □

8.4 Der Satz vom abgeschlossenen Wertebereich

Für abgeschlossene lineare Operatoren gilt der Satz vom abgeschlossenen Wertebereich.

Satz 8.4.1
Sei T dicht definiert und abgeschlossen, so daß T' existiert. Dann ist $\mathrm{Im}(T)$ *genau dann abgeschlossen, wenn auch* $\mathrm{BILD}(T')$ *abgeschlossen ist und es gilt dann*

$$\begin{aligned} \mathrm{BILD}(T)^{\perp} &= \ker(T') \\ \ker(T)^{\perp} &= \mathrm{BILD}(T'). \end{aligned}$$

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf Kato [11] Beweis zu Satz 5.13 im Kapitel IV. □