Kapitel 6

Kompakte Operatoren

In diesem Kapitel betrachten wir Operatoren, die in mehrfacher Hinsicht ausgezeichnet sind. Historisch sind entstanden durch die Betrachtung von Integraloperatoren, die wir ja auch schon in den Übungen betrachtet hatten.

6.1 Kompakte Operatoren

Definition 6.1.1
Es seien X, Y Banachräume. Ein Operator $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt kompakt, wenn er beschränkte Mengen in X auf relativ kompakte *Mengen in Y abbildet. Die Menge der kompakten Opertoren von $X \to Y$ werde mit $\mathcal{K}(X, Y)$ bezeichnet.*

Beispiel 6.1.2

1. *Es sei $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten*

$$Lx(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)\ ds.$$

Dieser Operator ist als Operator $L : C([0,1], \mathbb{R} \to C([0,1], \mathbb{R})$ kompakt.

2. *Operatoren mit endlich dimensionalem Bild sind kompakt.*

Satz 6.1.3
Sind X und Y Banachräume, und ist $T : X \to Y$ kompakt, so folgt aus $x_n \rightharpoonup x_0$, daß $Tx_n \to_Y Tx_0$ konvergiert.

Beweis. Angenommen $x_n \rightharpoonup x_0$, dann folgt, da T beschränkt ist, daß $Tx_n \rightharpoonup Tx_0$. Angenommen, die Folge $y_n = Tx_n$ konvergiert in der Normtopologie nicht gegen $y_0 = Tx_0$. Dann gibt es eine Teilfolge y_{n_k}, die von y_0 wegbeschränkt ist, also für eine Konstante $K > 0$ gilt

$$\|y_{n_k} - y_0\|_Y > K$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent ist, ist die Folge nach Satz 5.2.9 (1) beschränkt, T ist als kompakt vorausgesetzt und demnach hat die Folge $y_{n_k} = Tx_{n_k}$ eine konvergente Teilfolge. Diese konvergiert dann gegen ein Element $z \neq y_0$. Diese Teilfolge y_{n_k} konvergiert dann auch schwach gegen z. Da der schwache Grenzwert eindeutig ist, ist $z = y_0$ und dies ist ein Widerspruch. □

Für den nächsten Satz benötigen wir noch ein Hilfsmittel aus der Topologie.

Definition 6.1.4
Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes X heißt total beschränkt*, wenn zu jedem $\varepsilon >$ eine endliche Anzahl von Punkten x_i, $i = 1, \ldots, n$ existiert mit*

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i).$$

Es gilt der wichtige Satz.

Satz 6.1.5
Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $K \subset X$ abgeschlossen. Dann ist K genau dann kompakt, wenn K total beschränkt ist.

Beweis. Ist K kompakt, so ist K offensichtlich total beschränkt. Deshalb brauchen wir uns nur mit der Gegenrichtung zu beschäftigen. Sei also K total beschränkt. Wir zeigen K ist folgenkompakt. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K und $\eta > 0$. Dann gibt es eine endliche Überdeckung von K mit Kugeln $B_\eta(\xi_j)$, $j = 1, \ldots, n(\eta)$. Eine dieser Kugeln $B_\eta(\xi^1)$ enthält unendlich viele Glieder der Folge, wir wählen diese als Teilfolge $y_{n_k^1}$ aus. Angenommen, wir hätten bereits eine Kugel mit Radius $\frac{\eta}{2^m}$ gefunden und darin eine Teilfolge $y_{n_k^m}$ unserer ursprünglichen Folge. Dann überdecken wir $B_{\frac{\eta}{2^m}}(\xi^m)$ mit endlich vielen Kugeln des Radius $\frac{\eta}{2^{m+1}}$. Davon gibt es eine mit unendlich vielen Folgengliedern und wir konstruieren die entsprechende Teilfolge. Wir wählen nun die Folge

$$\{y_{n_k^k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

aus. Das m-te Glied und alle darauf folgenden sind in $B_{\frac{\eta}{2^m}}(\xi^m)$. Daher ist diese Folge eine Cauchyfolge, der Grenzwert existiert und ist in K. Damit ist K folgenkompakt. $\square$

Satz 6.1.6
Es seien U, X, Y, Z Banachräume. Die Menge der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(X,Y)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{L}(X,Y)$, ferner gilt für $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, $T_1 \in \mathcal{L}(U,X)$ und $T_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $TT_1 \in \mathcal{K}(U,Y)$ und $T_2T \in \mathcal{K}(X,Z)$.

Bemerkung 6.1.7
Ist $X = Y$, so besagt der vorstehende Satz, daß $\mathcal{K}(X,Y)$ ein zweiseitiges, abgeschlossenes Ideal *in $\mathcal{L}(X,Y)$ ist.* [1]

Beweis von Satz 6.1.6: Beschränkte Operatoren bilden beschränkte Mengen wieder auf beschränkte Mengen ab, deshalb ist TT_1 kompakt. Ist eine Menge relativ kompakt, so gilt dies auch für das Bild unter einem beschränkten Operator (stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt! Für stetige Abbildungen gilt $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, vgl. Aufgabe 7 (4). Ist also $\bar{A}$ kompakt, so gilt $f(A) \subset f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$, da $f(\bar{A})$ abgeschlossen ist.) Bleibt zu zeigen, daß die kompakten Operatoren einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{L}(X,Y)$ bilden. Seien $L \in \overline{\mathcal{K}(X,Y)}$ und $B \subset X$ eine beschränkte Menge gegeben. Wir müssen zeigen, daß LB relativ kompakt ist. Sei

$$C = \sup_{x \in X} \|x\|_X.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit

$$\|L - K\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Wir überdecken KB mit endlich vielen Kugeln $B_r(y_i)$, $i = 1, \ldots, s$ mit Radius $r = \frac{\varepsilon}{2}$. Sei V die Vereinigung der Kugeln $B_\varepsilon(y_i), i = 1, \ldots s$. Dann ist $LB \subset V$, denn für $x \in B$ gibt es dann ein y_i mit $\|Kx - y_i\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist aber

$$\|Lx - y_i\|_Y \leq \|Lx - Kx\|_Y + \|Kx - y_i\|_Y \leq \|L - K\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2C} C + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist $\overline{LB}$ total beschränkt, also kompakt. $\square$

[1] Man beachte ein (zweiseitiges) Ideal I in einem Ring R ist eine Teilmenge, die selbst ein Ring ist, und für die zusätzlich gilt $RI \subset I$, $IR \subset I$.

Satz 6.1.8
Seien X, Y Banachräume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist genau dann kompakt, wenn T' kompakt ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß aus T ist kompakt folgt, daß T' kompakt ist. Sei S die abgeschlossene Einheitskugel in X, S' die abgeschlossene Einheitskugel in Y'. Wir betrachten eine Folge $y'_k \in S'$ und die Funktionen

$$F_j(y) = y'(y) : Y \to \mathbb{R}.$$

Die Menge $M = \overline{TS}$ ist kompakt und die F_j eingeschränkt auf M ist gleichgradig stetig, denn

$$|F_j(y_1) - F_j(y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|_Y.$$

Daher kann aus der Folge $F_{j_{|M}}$ eine konvergente Teilfolge $F_{j_{k_{|M}}}$ausgewählt werden. (Begründung: Satz von Ascoli-Arzela oder man wähle eine abzählbare, dichte Teilmenge z_k mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß zu jedem $\delta > 0$ eine endliche Menge Z_δ der z_k ausgewählt werden kann, so daß für jeden Punkt y gilt $\inf\left\{\|y - z\|_Y \;\middle|\; z \in Z_\delta\right\} < \delta$. Wähle dann für jeden Punkt eine konvergente Teilfolge, und dann Diagonalfolge etc.. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit ist diese dann überall konvergent.) Dann konvergiert $y'_{j_k}(Tx) = T'y'_{j_k}(x)$ gleichmäßig für $x \in S$ und dies beweist die Behauptung.

Wir kommen zur Gegenrichtung. Ist T' kompakt, so ist nach dem ersten Teil T'' kompakt. Dies impliziert unmittelbar, daß T kompakt ist. □

6.2 Spektraleigenschaften

Wir wollen nun über Spektraleigenschaften kompakter Operatoren sprechen. Dazu betrachten wir zunächst den Begriff des Eigenwertes aus der linearen Algebra. In diesem Abschnitt seien der Einfachheit halber alle auftretenden Vektorräume komplex. Sei also X ein endlich dimensionaler, komplexer Vektorraum und $A : X \to X$ eine lineare Abbildung. Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A, falls es einen Vektor $x \in X$, $x \neq 0$ gibt, mit

$$Ax = \lambda x, \text{ oder } (A - \lambda \mathbb{1})x = 0.$$

Dies ist aber äquivalent zu $A - \lambda\mathbb{1}$ ist nicht injektiv oder auch zu $A - \lambda\mathbb{1}$ ist nicht surjektiv. Injektivität und Surjektivität sind in endlich dimensionalen Räumen für Abbildungen $X \to X$ äquivalent! Die Gesamtheit aller Eigenwerte bildet das *Spektrum* der Matrix Aund wird mit Σ_A bezeichnet.

Aufgabe 6.2.1
Man zeige: die Funktion $f_A : \mathbb{C} \setminus \Sigma_A \to \mathbf{GL}(X) : \lambda \mapsto (A - \lambda 1\!\!1)^{-1}$ *ist* holomorph[2].

In einem unendlich dimensionalen Raum fallen Injektivität und Surjektivität nicht zusammen, also muß man beim Begriff des Spektrums genauer unterscheiden. Wir beginnen mit einer linearen Abbildung $T : X \to X$, die nicht notwendig beschränkt ist.

Definition 6.2.2

1. *Eine komplexe Zahl* λ *heißt* Eigenwert *von* T, *wenn* $T - \lambda 1\!\!1$ *nicht injektiv ist, oder es ein* $x \in X$, $x \neq 0$ *gibt, mit*
$$Tx = \lambda x.$$
Die Menge aller Eigenwerte werde mit Σ_T^E *bezeichnet.*

2. *Eine komplexe Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$ *liegt im* kontinuierlichen Spektrum, *wenn* $T - \lambda 1\!\!1$ *injektiv ist, das Bild* $\mathrm{BILD}(T)$ *dicht in* X *liegt und die Inverse* $(T - \lambda 1\!\!1)^{-1}$ *nicht beschränkt ist. Die Menge aller Punkte im kontinuierlichen Spektrum bezeichnen wir mit* Σ_T^C.

3. *Eine komplexe Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$ *liegt im* Residualspektrum, *wenn* $T - \lambda 1\!\!1$ *injektiv ist, das Bild* $\mathrm{BILD}(T)$ *nicht dicht in* X *liegt. Die Menge aller Punkte im Residualspektrum bezeichnen wir mit* Σ_T^R.

4. *Das* Spektrum Σ_T *des Operators* T *ist definiert als*
$$\Sigma_T = \Sigma_T^E \cup \Sigma_T^C \cup \Sigma_T^R.$$

5. *Das Komplement*
$$P_T = \mathbb{C} \setminus \Sigma_T$$
bezeichnen wir als Resolventenmenge *von* T.

[2] Wir erinnern an den Begriff der holomorphen Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als eine Abbildung, die einer der beiden äquivalenten Bedingungen genügt: (i) sie ist komplex differenzierbar, (ii) sie ist analytisch (d.h. als Potenzreihe darstellbar). Für Abbildungen von $\mathbb{C}$ in komplexe Räume definiert man einen Begriff der *Holomorphie* durch die Darstellbarkeit einer konvergenten Potenzreihe.

Definition 6.2.3
Die Resolvente *einer linearen Abbildung T ist die Funktion*

$$R(T,\cdot) : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto (T - \lambda 1\!\!1)^{-1}.$$

Aufgabe 6.2.4

1. *In einem Banachraum X gibt es zu jedem abgeschlossenen Unterraum $Y \neq X$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ mit*

$$\|[x]\|_{X/Y} > 1 - \varepsilon.$$

2. *Ein Banachraum ist genau dann endlich dimensional, wenn die abgeschlossene Einheitskugel kompakt ist.*

3. *Ein Banachraum ist genau dann endlich dimensional, wenn die Abbildung $1\!\!1_X : X \to X$ kompakt ist.*

4. *Hat ein beschränkter linearer Operator auf einem Banachraum X für einen Wert $\lambda \in P_T$ eine kompakte Resolvente, so ist der Raum X endlich dimensional.*

Aufgabe 6.2.5
Ist T ein beschränkter, linearer Operator, so ist P_T offen und es gilt

$$P_T = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; T - \lambda 1\!\!1_X \text{ ist bijektiv} \right\}.$$

Aufgabe 6.2.6
Ist T ein beschränkter, linearer Operator, so ist $R(T,\cdot)$ eine analytische Abbildung.

Definition 6.2.7
Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist der Unterraum

$$E_\lambda = \left\{ x \in X \;\middle|\; Tx = \lambda x \right\}.$$

Entsprechend definieren wir

$$E'_\lambda = \left\{ x' \in X' \;\middle|\; T'x' = \lambda x' \right\}.$$

Satz 6.2.8
Ist $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $T \in \mathcal{K}(X)$, so ist $\ker(T - \lambda 1\!\!1) = E_\lambda$ endlich dimensional, entsprechendes gilt für $E'_\lambda = \ker(T' - \lambda 1\!\!1_{X'})$.

Beweis. Offensichtlich ist E_λ ein abgeschlossener Unterraum. Daher ist ist die Einheitskugel B_1^λ in E_λ beschränkt. Damit ist TB_1^λ relativ kompakt. Da $TB_1^\lambda = \lambda B_1^\lambda$ ist $\overline{B_1^\lambda}$ kompakt und daher ist E_λ endlich dimensional. Der gleiche Beweis wird auf E'_λ angewendet. □

Satz 6.2.9
Die Bildräume von $T - \lambda 1\!\!1$ bzw. $T' - \lambda 1\!\!1_{X'}$ sind abgeschlossen.

Beweis. Es reicht die Abgeschlossenheit von $\mathrm{BILD}(T-\lambda 1\!\!1)$ zu beweisen, weil die zweite Aussage dann aus dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich Satz 4.5.2 folgt. Betrachte eine Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{BILD}(T-\lambda 1\!\!1)$ welche gegen einen Wert $y_0 \in X$ konvergiert. Zu zeigen ist $y_0 \in \mathrm{BILD}(T - \lambda 1\!\!1)$. Sei x_n, so gewählt daß $Tx_n - \lambda x_n = y_n$.

In einem ersten Schritt zeigen wir, daß es eine beschränkte Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $Tz_n - \lambda z_n = y_n = Tx_n - \lambda x_n$. Sei dazu $\|[x_n]\|_{X/E_\lambda}$. Ist die Folge $\{\|[x_n]\|_{X/E_\lambda}\}_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so gibt es eine Teilfolge $\{\|[x_{n_k}]\|_{X/E_\lambda}\}_{k\in\mathbb{N}}$, welche gegen unendlich konvergiert. Sei

$$\bar{x}_{n_i} = \frac{1}{\|[x_{n_k}]\|_{X/E_\lambda}} x_{n_k}.$$

Dann ist

$$\|[\bar{x}_{n_k}]\|_{X/E_\lambda} = 1.$$

Also gibt es Punkte $v_{n_k} \in E_\lambda$, so daß $w_{n_k} = \bar{x}_{n_k} - v_{n_k}$ die Norm $\|w_{n_k}\|_X \leq 2$ haben. Dann folgt aber

$$(T - \lambda 1\!\!1_X) w_{n_k} = (T - \lambda 1\!\!1_X)\bar{x}_{n_k} = \frac{1}{\|[x_{n_k}]\|_{X/E_\lambda}} y_{n_k} \to 0.$$

da T kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge der Tw_{n_k}. Dann konvergiert aber die Folge der w_{n_k} selbst (beachte: $(T - \lambda 1\!\!1)w_{n_k}$ und Tw_{n_k} konvergent $\lambda \neq 0$ impliziert w_{n_k} konvergiert). Sei also w_{n_k} gegen w_0 konvergent. Dann konvergiert $(T - \lambda 1\!\!1_X)w_0 = 0$ und $\|[w]\|_{X/E_\lambda} = 1$. Dies ist ein Widerspruch, der zeigt, daß die Folge der $\|[x_n]\|_{X/E_\lambda}$ beschränkt ist. Damit kann man ein Folge v_n in E_λ angeben, so daß $x_n - v_n$ beschränkt ist. Wähle nun $z_n = x_n - v_n$. Dies ist eine beschränkte Folge.

Im zweiten Schritt wählen wir (unter Ausnutzung der Kompaktheit von T) aus der Folge der z_i eine Teilfolge $\{z_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ aus, so daß Tz_{i_k} konvergiert. Dann konvergiert $z_{n_k} \to y_0 + \lim Tz_{n_k}$. Sei $\lim z_{n_k} = x_0$. Dann ist $Tx_0 = y_0$ und die Behauptung ist gezeigt. □

Der Satz vom abgeschlossenen Wertebereich garantiert nun daß $\text{BILD}(T - \lambda\mathbb{1}_X) =^{\perp} \ker(T' - \lambda\mathbb{1}'_X)$. Sei nun

$$E_\lambda^n = \ker(T - \lambda\mathbb{1}_X)^n.$$

Es ist klar, daß

$$(T - \lambda\mathbb{1}_X)^n = (-1)^n\lambda^n\mathbb{1}_X + \sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}(-1)^{n-\nu}\lambda^{n-\nu}T^\nu$$

ist und daher eine kompakte Störung der Identität ist. Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Dimension $\dim E_\lambda^n$ endlich (und natürlich monoton wachsend in n).

Satz 6.2.10
$e(n) = \dim E_\lambda^n$ ist beschränkt, genauer es gibt ein $k \in N$, so daß für $n < k$ $e(n) < e(n+1)$ ist und $e(n) = e(k)$ für alle $n \geq k$.

Beweis. Zu zeigen ist $e(n) = e(n+1)$ impliziert, daß $e(n) = e(n+m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Ist dies gezeigt, so sei $k = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; e(n) = e(n+1)\right\}$. Dann folgt, für $n < k$ die strenge Monotonie und $n \geq k$ die Konstanz der Folge $e(n)$.

Sei also $e(n) = e(n+1)$, wegen $E_\lambda^n \subset E_\lambda^{n+1}$, impliziert dies, daß $E_\lambda^n = E_\lambda^{n+1}$. Sei also $x \in E_\lambda^{n+k}$, $k \geq 1$ d.h. $L^{n+k}x = 0$ für $L = T - \lambda\mathbb{1}_X$. Dann ist $L^kx \in \ker L^n$ und $L^{k-1}x \in \ker L^{n+1}$. Da $\ker L^n = \ker L^{n+1}$ ist, ist dann auch $L^{k-1}x \in \ker L^n$ und $x \in E_\lambda^{n+k-1}$. Ist $n + k - 1 > n$, so läßt sich dieser Schritt wiederholen und es folgt $E_\lambda^{n+k} = E_\lambda^n$ und speziell $e(n+k) = e(n)$. □

Korollar 6.2.11
Ist $\text{BILD}(T - \lambda\mathbb{1}_X) = X$, so ist $E_\lambda = \{0\}$.

Beweis. Angenommen, die Aussage ist falsch und x_0 ist so gewählt, daß $Lx_0 = (T - \lambda\mathbb{1}_X)x_0 = 0$. Konstruiere eine Folge $\{x\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Lx_n = x_{n-1}$ für $n \geq 1$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$L^{n+1}x_n = 0 \text{ aber } L^nx_n = x_0.$$

Daher ist $E_\lambda^n \neq E_\lambda^{n+1}$ und dies ergibt einen Widerspruch. □

Korollar 6.2.12
Es gilt $\mathrm{BILD}(T - \lambda 1\!\!1_X) = X$ *genau dann wenn* $E_\lambda = \{0\}$.

Beweis. Die eine Richtung wurde eben gezeigt. Für die andere Richtung überlegen wir uns, daß $E_\lambda = \{0\}$ impliziert, daß $\mathrm{BILD}(T' - \lambda 1\!\!1_{X'}) = X'$ und daher wegen Korollar 6.2.11 folgt $E'_\lambda = \{0\}$ und damit wieder mit dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich $\mathrm{BILD}(L) = X$. ☐

Satz 6.2.13
Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ *ist* $\dim E_\lambda = \dim E'_\lambda$.

Für den Beweis benötigen wir noch eine nützliche Hilfsaussage.

Lemma 6.2.14
Sind $x'_1, \ldots, x'_n$ *linear unabhängige Funktionale in* X', *so gibt es Elemente* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *mit* $x'_j(x_i) = \delta_{ij}$ *für* $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$.

Beweis. Sei $K_j = \ker x'_j$ und

$$M_j = \bigcap_{k=1, k\neq j}^{n} K_j.$$

Wir zeigen

$$M_j \subset K_j \text{ genau dann wenn } x'_j \in \mathrm{span}[x'_1, \ldots x'_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x'_n]. \tag{6.1}$$

Beginnen wir mit der Rückrichtung, also $x'_j \in \mathrm{span}[x'_1, \ldots x'_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x'_n]$. Sei $x \in M_j$. Nach Definition verschwinden alle x'_k, $k \neq j$ im Punkt x und da x'_j eine Linearkombination dieser x'_k ist auch $x'_j(x) = 0$ und $x \in K_j$, also $M_j \subset K_j$.

Wir kommen zur Hinrichtung.
Sei also $M_j \subset K_j$. Wir betrachten eine Abbildung

$$A : X \to \mathbb{K}^{n-1} : x \mapsto \left(x'_1(x), \ldots x'_{j-1}(x), x'_{j+1}(x), \ldots, x'_n(x)\right).$$

Dann ist $AX \subset \mathbb{K}^{n-1}$ ein abgeschlossener Unterraum. Darauf definieren wir ein Funktional ψ durch

$$\psi(Ax) = x'_j(x).$$

Zunächst ist zu zeigen, daß ψ wohldefiniert ist. Ist $Ax_1 = Ax_2$, so ist $x_1 - x_2 \in \ker A = M_j \subset K_j$ und $x'_j(x-1) = x'_j(x_2)$.

Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung von ψ auf $\mathbb{K}^{n-1}$, nennen wir diese wieder ψ. Dieses Funktional hat die Form

$$\psi(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i, \ \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Für $x \in X$ gilt daher mit $\beta_i = \alpha_i, \ i < j, \beta_i = \alpha_{i-1}, \ i > j$

$$\sum_{i \neq j} \beta_i x_i'(x) = \psi(Ax) = x_j'(x).$$

Also ist x_j' Linearkombination der restlichen Funktionale.

Mit der Hilfsaussage aus Gleichung (6.1) läßt sich nun der Satz beweisen. Sei $x_j \in M_j \setminus K_j$. Dann ist $x_j'(x_j) \neq 0$ und $x_k'(x_j) = 0$ für $k \neq j$. Durch Normalisierung ist der Satz bewiesen. □

Beweis von Satz 6.2.13. Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis für E_λ und $\xi_1, \ldots, \xi_m$ eine Basis für E_λ'. Nun gibt es (nach dem Satz von Hahn-Banach) $x_1' \ldots, x_n'$ mit $x_i'(x_j) = \delta_{ij}$, $i, 1 = 1, \ldots, n$. Gleichzeitig gibt es auch nach Lemma 6.2.14 $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in X$ mit $\xi_i(\zeta_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Wir zeigen zunächst $n \geq m$ und nehmen daher an $n < m$. Dann setzen wir

$$Sx = Tx + \sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\zeta_i.$$

S ist kompakt (als Summe eines kompakten Operators und eines mit endlich dimensionalen Bild). Wir beweisen zunächst die Zwischenbehauptung

$$\ker S - \lambda 1\!\!1_X = \{0\}. \tag{6.2}$$

Angenommen $x \in \ker S - \lambda 1\!\!1_X$. Dann ist $\lambda x = Sx$ und

$$Tx - \lambda x = \sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\zeta_i.$$

Wenden wir auf diese Gleichung ξ_j an, so erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\zeta_i \right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\xi_j(\zeta_i) \\ &= x_j'(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_j'(x) &= \xi_j(Tx - \lambda \mathbb{1}_X x) \\ &= (T'\xi_j - \lambda\xi_j)x \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $\xi_j \in E_\lambda'$. Also ist $x_j'(x) = 0$, $j = 1, \ldots, n$ und daher $Tx = \lambda x$ und $x \in E_\lambda$. Also ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i x_i.$$

Wir wenden x_j' auf diese Gleichung an und finden

$$0 = x_j'(x) = \sigma_j.$$

Also ist $x = 0$ oder

$$\ker S - \lambda \mathbb{1}_X = \{0\}.$$

Nach Korollar 6.2.12 ist dann $\mathrm{BILD}(S - \lambda \mathbb{1}_X) = X$ und speziell existiert ein $x \in X$ mit

$$Sx - \lambda x = \zeta_{n+1}.$$

Dann erhalten wir

$$1 = \xi_{n+1}(\eta_{n+1}) = \xi_{n+1}(Sx - \lambda x) = \xi_{n+1}\left(Tx - \lambda x - \sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\zeta\right) = 0,$$

denn $Tx - \lambda x$ ist nach Konstruktion im $\ker \xi_{n+1}$ und $\xi_{n+1}(\zeta_j) = 0$ für $j \leq n$. Dies ist ein Widerspruch und $m \leq n$.

Für den zweiten Schritt überlegen wir uns, daß die bisher bewiesene Aussage impliziert

$$\dim E_\lambda'' \leq \dim E_\lambda'.$$

Offenkundig ist $\dim E_\lambda'' \geq \dim E_\lambda$ und damit ist die Behauptung gezeigt. □

6.3 Fredholm-Operatoren

Wir erinnern an die Definition 2.3.5 eines Fredholmoperators. In engem Zusammenhang damit steht der sogenannte Fredholmindex, den wir jetzt einführen.

Definition 6.3.1
Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein Fredholmoperator. Dann nennt man die Differenz

$$\mathrm{ind}(T) = \dim\ker T - \operatorname{codim} \mathrm{BILD}(T)$$

den Fredholmindex *von T.*

Satz 6.3.2
Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, dann ist $\mathbb{1}_X + T$ ein Fredholmoperator vom Fredholmindex 0.

Beweis. Wir hatten bereits gesehen, daß der Kern und Bild von $\mathbb{1}+T$ abgeschlossen ist. Da $\dim\ker(\mathbb{1}_X + T) = \dim\ker(\mathbb{1}_{X'} + T')$ ist aufgrund des Satzes vom abgeschlossenen Wertebereiches Satz 4.5.2 $\operatorname{codim}\mathrm{BILD}(\mathbb{1}_X + T) = \dim\ker(\mathbb{1}_{X'} + T') = \dim\ker(\mathbb{1}_X + T)$ und damit ist die Behauptung gezeigt. □

Allgemeiner gilt der wichtige Satz, den wir hier nur zitieren wollen und dessen Beweis in der Literatur zu finden ist.

Satz 6.3.3
Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ und $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein Fredholmoperator mit $\mathrm{ind}(L) = k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $L+T$ ein Fredholmoperator mit

$$\mathrm{ind}(L+T) = k = \mathrm{ind}(L).$$

Beweis. Siehe z.B. Hirzebruch & Scharlau [7] oder auch das sehr schöne Buch von Booss[3]. □