Kapitel 5

Schwache Topologien

5.1 Reflexivität

Definition 5.1.1
Es sei X ein Banachraum, X' der Dualraum und X'' der Bidualraum. *Die Abbildung*

$$J : X \to X'' \text{ mit } Jx(x') = x'(x) \text{ für alle } x' \in X'$$

heißt kanonische Einbettung.

Definition 5.1.2
Ein Banachraum X heißt reflexiv, *falls die kanonische Einbettung ein toplinearer Isomorphismus ist.*

Beispiel 5.1.3

1. $L^p(\Omega, X)$ ist für $1 < p < \infty$ reflexiv, $L^1(\Omega, X)$ und $L^\infty(\Omega, X)$ sind beide nicht reflexiv.

2. $C([0,1], \mathbb{R})$ ist nicht reflexiv.

Satz 5.1.4

1. *Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.*

2. *Ist X reflexiv, so ist X' reflexiv.*

Beweis. siehe Übungen. □

Bemerkung 5.1.5
Es gibt nicht-reflexive Räume, die toplinear isomorph zu ihrem Bidualraum sind, Beispiele sind sogenannte Jamesräume[1], *siehe z. B.* WERNER *[11].*

5.2 Topologien und Funktionale

Wir beginnen mit einem Banachraum X.

Definition 5.2.1

1. *Die* schwache Topologie *auf einem Banachraum X ist die gröbste Topologie, so daß alle $x' \in X'$ stetig sind.*

2. *Ist X' der* Dualraum *zu X, so ist die* schwach*-Topologie, *die gröbste Topologie auf X', so daß alle Funktionale $x'' \in X''$ der Form $x'' = Jx$ stetig sind.*

Bemerkung 5.2.2
Die schwache Topologie ist schwächer als die Normtopologie, da ja auch für die Normtopologie alle beschränkten Funktionale stetig sind. Entsprechendes gilt für die schwach-Topologie.*

Im nächsten Satz beschreiben wir Konvergenz und Umgebungsbasen für die schwache, bzw. die schwach*-Topologie.

Definition 5.2.3

1. *Für ein Tripel $(n, \xi, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times (X')^n \times \mathbb{R}_+$ sei*
$$U_{(n,\xi,\varepsilon)} = \left\{ x \in X \;\middle|\; |x'_k(x)| < \varepsilon, k = 1, \ldots, n \right\},$$
wobei $\xi = (x'_1, \ldots, x'_n)$.

2. *Entsprechend setzen wir für ein Tripel $(n, \eta, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times X^n \times \mathbb{R}_+$*
$$V_{(n,\eta,\varepsilon)} = \left\{ x' \in X' \;\middle|\; |x'(x_k)| < \varepsilon, k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Satz 5.2.4
Die Mengen

[1] James

1. *$U_{(n,\xi,\varepsilon)}$ bilden eine Nullumgebungsbasis für die schwache Topologie von X.*

2. *$V_{(n,\eta,\varepsilon)}$ bilden eine Nullumgebungsbasis für die schwach* Topologie auf X'.*

Beweis. Es reicht die Aussage für die Topologie auf X zu beweisen, der Rest ist dann analog. Offenkundig sind in der schwachen Topologie die Mengen der Form

$$U_{(1,x',\varepsilon)} = \left\{ x \in X \;\middle|\; |x'(x)| < \varepsilon \right\}$$

offen. Dann sind auch endliche Schnitte davon offen und jede der Mengen $U_{(n,\xi,\varepsilon)}$ ist eine offene Nullumgebung. Offenkundig ist jedes Funktional stetig, wenn die Familie $U_{(n,\xi,\varepsilon)}$ als Nullumgebungsbasis gewählt wird. □

Definition 5.2.5

1. *Wir nennen eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent, wenn für jedes $x' \in X'$ die Folge $\{x'(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.*

2. *Die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen $x_0 \in X$ falls*

$$\lim_{n\to\infty} x'(x_n) = x'(x)$$

ist. Wir schreiben dafür $x_n \rightharpoonup x_0$.

3. *Entsprechend nennen eine Folge $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ schwach* konvergent, wenn für jedes $x \in X$ die Folge $\{x'_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.*

4. *Die Folge $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach* gegen $x'_0 \in X'$ falls*

$$\lim_{n\to\infty} x'_n(x) = x'_0(x)$$

ist. Wir notieren diesen Sachverhalt durch $x'_n \rightharpoonup_* x'_0$

5. *Eine Folge nennen wir eine schwache (oder eine schwach*) Cauchyfolge, wenn für jedes $x' \in X'$ die Folge $x'(x_n)$ eine Cauchyfolge (für jedes $x \in X$ die Folge $x'_n(x)$ eine Cauchyfolge) ist.*

6. *Entsprechend nennen wir X, bzw. X' schwach, bzw. schwach* vollständig wenn jede schwache (schwach*) Cauchyfolge einen schwachen (schwach*) Grenzwert hat.*

Bemerkung 5.2.6
Aus der schwachen Konvergenz folgt nicht, daß der schwache Grenzwert existiert. Allerdings hat man den folgenden Satz.

Satz 5.2.7
Der schwache (bzw. schwach) Grenzwert ist eindeutig.*

Beweis. Folgt einfach aus der Tatsache $x'(x) = 0$ für alle $x' \in X'$ impliziert $x = 0$. □

Wir benötigen den folgenden Satz um weitere Aussagen über die schwache Topologie machen zu können. Dieser Satz hat allerdings auch eine eigenständige Bedeutung.

Satz 5.2.8
Ist X ein normierter Raum und X' separabel, so ist auch X separabel.

Beweis. Sei $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein abzählbare, dichte Teilmenge in X'. Dann gibt es zu jedem x'_n ein x_n mit $\|x_n\|_X = 1$ und

$$|x'_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|_{X'}.$$

Sei Z die Menge aller Linearkombinationen der Elemente $x_n, n \in \mathbb{N}$ mit rationalen Koeffizienten. Z ist eine abzählbare Menge.

Behauptung: $\overline{Z} = X$. Angenommen diese Behauptung sei nicht wahr, dann gibt es ein nichttriviales Funktional $\bar{x}'$ welches auf $\overline{Z}$ verschwindet. Sei x'_{n_k} eine Teilfolge, die gegen $\bar{x}'$ konvergiert. Dann ist

$$\|\bar{x}' - x'_{n_k}\|_{X'} \geq |(\bar{x}' - x'_{n_k})(x_{n_k})| = |x'_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{\|x'_{n_k}\|_{X'}}{2}.$$

Da die linke Seite gegen null konvergiert, tut dies auch die rechte Seite. □

Satz 5.2.9
Konvergiert $x_n \rightharpoonup x$ in einem normierten Raum X, so gilt

1. *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*

2. *Der schwache Grenzwert ist im kleinsten abgeschlossenen Unterraum, der alle Folgenglieder umfaßt.*

3. *Es gilt $\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit angewandt auf die Funktionale $Jx_n \in X''$.

Wir kommen zur zweiten Behauptung: Angenommen, diese ist falsch, dann sei Z der entsprechende Unterraum. Wir nehmen an, daß dieser den Grenzwert x_0 nicht enthalte. Dann gibt es, nach Hahn-Banach, ein Funktional x_0', welches auf Z verschwindet und bei x_0 den Wert $1 = x_0'(x_0)$ annimmt. Dies ist ein Widerspruch zur schwachen Konvergenz $x_n \rightharpoonup x_0$.

Die dritte Behauptung ist ebenfalls klar: für $x' \in X'$ gilt

$$|x'(x)| = \lim_{n\to\infty} |x'(x_n)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x'\|_X \|x_n\|_X .$$

Wählen wir x', so daß $x'(x) = \|x\|_X$ folgt die Behauptung unmittelbar. □

5.3 Kompaktheit

Satz 5.3.1
Eine beschränkte, schwach abgeschlossene Teilmenge eines reflexiven Banachraumes ist schwach folgenkompakt.

Beweis. Siehe Übungen. □

Korollar 5.3.2
Ein reflexiver Banachraum X ist schwach vollständig.

Beweis. Siehe Übungen. □

Der Hauptsatz dieses Abschnittes macht eine wichtige Kompaktheitsaussage.

Satz 5.3.3
Es sei X ein Banachraum, dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in X' schwach kompakt.

Beweis. Wir betrachten den Fall eines reellen Raumes, der komplexe Fall ist ganz ähnlich.

Zu $x \in X$ betrachten wir das reelle Intervall $I_x = [-\|x\|_X, \|x\|_X]$. Es sei

$$C = \prod_{x\in X} I_x .$$

Nach dem Satz von Tychonov 1.2.10 (3) ist C kompakt. Wir betrachten nun die Menge $B' = \left\{ x' \in X' \;\middle|\; \|x'\|_{X'} \leq 1 \right\}$. Wir wollen zeigen, daß diese Menge kompakt ist. Wir konstruieren nun eine Abbildung $T : B' \to C$. Dazu sei $P_x : C \to I_x : \tau \mapsto \tau_x$. Setze

$$Tx' \in C \text{ durch } P_x(Tx') = x'(x).$$

Offenkundig ist $Tx'(x) \in I_x$. Die Zuordnung T ist injektiv, denn $Tx'_1 = Tx'_2$ bedeutet, daß $x'_1(x) = x'_2(x)$ für alle $x \in X$ und daher $x'_1 = x'_2$. Nun ist $TB' \subset C$. Die Konstruktion der Umgebungsbasen in X' für die schwache Topologie impliziert, daß T in beide Richtungen stetig ist. Daher ist B' genau dann kompakt, wenn dies für TB' zutrifft. Daher genügt es zu zeigen, daß TB' abgeschlossen ist. Sei also $\sigma \in \overline{TB'}$. Wir ordnen diesem nun eine $\mathbb{R}$-wertige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ zu. $f(x) = P_x\sigma$. Wir wollen zeigen, daß diese Abbildung linear ist. Dazu seien $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und es sei das Element U der Umgebungsbasis von σ gegeben, das durch die Forderung $\zeta \in U$ falls

$$|P_{x_1}\sigma - P_{x_1}\zeta| < \varepsilon, \; |P_{x_2}\sigma - P_{x_2}\zeta| < \varepsilon,$$

und

$$|P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\sigma - P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\zeta| < \varepsilon$$

definiert ist (beachte die Topologie in Produkten). Da $\sigma \in \overline{TB'}$, gibt es in jeder Umgebung Elemente in TB'. Sei Tx' ein solches Element. Dann ist

$$|P_{x_1}\sigma - P_{x_1}Tx'| < \varepsilon, \; |P_{x_2}\sigma - P_{x_2}Tx'| < \varepsilon,$$

und

$$|P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\sigma - P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}Tx'| < \varepsilon.$$

Wegen der Linearität von x' können wir nun abschätzen

$$\begin{aligned} |\lambda_1 P_{x_1}\sigma + \lambda_2 P_{x_2}\sigma - P_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\sigma \quad &\le \quad |\lambda_1|(P_{x_1}\sigma - x'(x_1)| + \lambda_2|P_{x_2}\sigma - x'(x_2)| + \\ |\mathbb{P}_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\sigma - x'(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| \quad & \\ &\le \quad (|\lambda_1 + \lambda_2 + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig ist, folgt die Linearität der Auswertung von σ. Da das zugehörige Funktional auch beschränkt ist, ist $\sigma \in TB'$) und der Beweis ist erbracht. $\square$

Satz 5.3.4
Ist X separabel, so ist $\overline{B_1(0)} \subset X'$ schwach* folgenkompakt.

Beweis. Die Separabilität impliziert das erste Abzählbarkeitsaxiom und dann folgt aus kompakt, folgenkompakt. □

Satz 5.3.5
Ist X reflexiv und separabel, so ist $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.

Beweis. Mit X ist auch X'' separabel und damit auch X'. $B_1(0) \subset X''$ ist schwach* folgenkompakt, bezüglich der Anwendung der Funktionale auf $x' \in X'$. Dann ist aber auch $B_1(0) \subset X$ schwach folgenkompakt. □