Kapitel 4

Der Bairesche Kategoriensatz und seine Konsequenzen

In diesem Kapitel begegnen wir den wesentlichen Grundprinzipien der Funktionalanalysis. Diese beruhen auf einem wichtigen Satz, dem sogenannten Kategoriensatz. Wir beweisen diesen im ersten Abschnitt, die weiteren Abschnitte wollen wir nutzen um die weitreichenden Konsequenzen zu untersuchen.

4.1 Kategoriensatz

Satz 4.1.1
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine abzählbare Familie abgeschlossener Teilmengen von X. Ist

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k,$$

so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß das Innere von A_{k_0} nichtleer ist.

Beweis. Wir nehmen an, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathring{A}_k = \emptyset.$$

Dann ist für jede offene Menge $U \subset X$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U \setminus A_k$$

offen und nichtleer. Insbesondere gibt es zu $\varepsilon \leq \frac{1}{k}$ eine offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ mit

$$\overline{B_\varepsilon(x)} \subset U \setminus A_k.$$

Wir konstruieren nun eine Folge von Punkten x_k und Kugeln $B_{\varepsilon_k}(x_k)$ mit

$$\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1})$$

und $\varepsilon_k \leq \frac{1}{k}$. Sei U offen wie zuvor. Wähle $\varepsilon_1 \leq 1$ und $x_1 \in U \setminus A_1$, so daß $\overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset U \setminus A_1$. Angenommen x_k, B_{ε_k} sei gewählt. Wähle $x_{k+1} \in B_{\varepsilon_k}(x_k) \setminus A_{k+1}$ und $\varepsilon_{k+1} < \frac{1}{k+1}$, so daß

$$\overline{B_{\varepsilon_{k+1}}(x_{k+1})} \in B_{\varepsilon_k}(x_k) \setminus A_{k+1}.$$

Dies ist nach der Vorbemerkung möglich und induktiv wird eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften bestimmt.

Dann ist die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und damit konvergent, also existiert

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k \in X.$$

Für jedes k ist $x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}$ und da $\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \cap A_k = \emptyset$ ist $x \notin A_k$. Insbesondere ist

$$x \notin \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k = X.$$

Dieser Widerspruch beweist die Behauptung. $\square$

Oft wird der Satz anders formuliert. Zunächst ein paar Definitionen.

Definition 4.1.2
Eine Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raumes ist nirgends dicht, *wenn das Innere von $\bar{A}$ leer ist.*

Definition 4.1.3
Eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raum heißt von erster Kategorie, *wenn sie abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist, andernfalls von* zweiter Kategorie.

Nun besagt der *Bairesche Kategoriensatz*, daß ein vollständiger metrischer Raum von zweiter Kategorie ist.

Satz 4.1.4 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $(Y, \|\cdot\|_Y$ ein normierter Raum, $C(X, Y)$ bezeichne die Menge der stetigen Abbildungen von $X \to Y$. Es sei $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ eine Familie mit

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty \tag{4.1}$$

für jedes $x \in X$. Dann gibt es ein $x_0 \in X$ und ein $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$\sup_{d(x,x_0)\leq\varepsilon_0} \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty.$$

Beweis. Setze

$$A_k \cap_{f\in\mathcal{F}} \left\{x \in X \;\middle|\; \|f(x)\|_y \leq k\right\}.$$

Dann sind die A_k alle abgeschlossen und die Familie der $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ bildet eine Überdeckung von X. Nach dem Kategoriensatz ist dann für eine der Mengen $\mathring{A}_{k_0} \neq \emptyset$. Insbesondere gilt dann

$$\sup_{x\in A_{k_0}} \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\|_Y \leq k_0.$$

Durch Auswahl einer Kugel in $\mathring{A}_{k_0}$ wird der Satz bewiesen. □

4.2 Der Satz von Banach-Steinhaus

[1] Wir wollen nun die Aussage des Satzes vom Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 4.1.4 spezialisieren und auf lineare Abbildungen anwenden.

Satz 4.2.1 (Banach-Steinhaus)
Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ eine Teilmenge der linearen Operatoren $X \to Y$ mit

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty \text{ für jedes } x \in X.$$

Dann ist

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

[1] Hugo Dyonizy Steinhaus (14.1.1887-25.2.1972) studierte in Lwow und Göttingen. Er promovierte bei Hilbert. Während der Besetzung Polens lebte er im Untergrund. Er war zusammen mit Banach der Gründer der polnischen Funktionalanalysisschule. Neben seinen mathematischen Interessen verfolgte er auch Anwendungen. In moderner Sprache wird ein Teil seiner Arbeiten der Spieltheorie zugeordnet.

Beweis. Setze für $x \in X$, $T \in \mathcal{T}$

$$f_T(x) = \|Tx\|_Y.$$

Dann ist $f_T \in C(X, \mathbb{R})$ und $\mathcal{F} = \left\{ f_T \;\middle|\; T \in \mathcal{T} \right\}$ und die Familie $\mathcal{F}$ genügt der Bedingung (4.1). Die Aussage des Satzes 4.1.4 gibt uns ein $x_0 \in X$, eine Konstante $C > 0$ und eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$\|Tx\|_Y \leq C \text{ für } T \in \mathcal{T} \text{ und } \|x - x_0\|_X \leq \varepsilon_0.$$

Dann folgt für alle $T \in \mathcal{T}$ die folgende einfache Rechnung

$$\|Tx\|_Y = \frac{\|x\|_X}{\varepsilon_0} \left\| T\left(x_0 + \varepsilon_0 \frac{x}{\|x\|_X} \right) - T(x_0) \right\| \leq \frac{\|x\|_X}{\varepsilon_0} 2C.$$

Damit folgt

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{2C}{\varepsilon_0}.$$

□

Eine Abschwächung der Voraussetzungen des eben angegebenen Satzes ist möglich. Wir betrachten zu Y den Dualraum Y' .

Satz 4.2.2
Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum mit Dualraum Y'. Ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, so daß für alle $x \in X$ und alle $y' \in Y'$ gilt

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} |y'(Tx)| < \infty$$

so ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ beschränkt.

Beweis. Fixiere $y' \in Y'$ und betrachte die Familie $\mathcal{T}_{y'} = \left\{ T'y' \;\middle|\; T \in \mathcal{T} \right\} \subset X'$. Nun ist für jedes $x \in X$

$$\sup_{x' \in \mathcal{T}_{y'}} |x'(x)| < \infty$$

und damit ist nach dem Satz von Banach-Steinhaus

$$\sup_{x' \in \mathcal{T}_{y'}} \|x'\|_{X'} < \infty.$$

Dann ist für jedes $y' \in Y'$

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T'y'\|_{X'} < \infty$$

und wiederum nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist dann

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T'\|_{\mathcal{L}}(Y', X') < \infty.$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|T'\|_{\mathcal{L}(Y',X')}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann können $x_0 \in X$, $\|x_0\|_X = 1$ und $y_0' \in Y'$ mit Norm 1 so gewählt werden, daß gilt

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y \\
&\leq |y_0'(Tx_0)| + \varepsilon \\
&= |T'y'(x)| + \varepsilon \\
&\leq \|T'y'\|_{X'}\|x\|_X + \varepsilon \\
&= \|T'y'\|_{X'} + \varepsilon \\
&\leq \|T'\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}',\mathcal{X}')} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

4.3 Der Satz von der offenen Abbildung

Wir kommen nun zu einem wesentlichen Satz, der ebenfalls auf Stefan Banach zurückgeht.

Satz 4.3.1 (Satz von der offenen Abbildung (Banach))
Es seien X, Y Banachräume. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ genau dann offen, wenn L surjektiv ist.

Beweis. Die Hinrichtung ist trivial. Da $0 \in TX$ folgt aus der Offenheit, daß TXT eine offene Menge U mit $0 \in U$ umfaßt. Dann gibt es eine Kugel $B_\varepsilon(0)$ in U und damit ist $TX = Y$.

Wir kommen zur Rückrichtung. T ist surjektiv, daher ist

$$Y = \cup_{k \in N} \overline{T(B_k(0))}.$$

Nach dem Kategoriensatz 4.1.1 gibt es dann ein $k_0 \in \mathbb{N}$ ein $y_0 \in B_{k_0}(0)$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon(y_0) \subset \overline{T(B_{k_0}(0))}.$$

(Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $y_0 \in TX$, denn wäre $y_0 \notin TX$, so gäbe es ein $x_0 \in X$ mit $\|Tx_0 - y_0\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle dann $y_0 = Tx_0$ und $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$.) Dies bedeutet, daß es zu $y \in B_\varepsilon(0)$ Elemente $x_i \in B_{k_0}(0)$ gibt mit

$$\lim_{i\to\infty} Tx_i = y_0 + y.$$

Dann ist

$$\lim_{i\to\infty} T\left(\frac{1}{k_0 + \|x_0\|_X}(x_i - x_0)\right) = \frac{1}{k_0 + \|x_0\|_X} y$$

und

$$\frac{1}{k_0 + \|x_0\|_X}\|x_i - x_0\|_X < 1.$$

Also ist

$$B_\delta(y_0) \subset \overline{TB_1(0)} \tag{4.2}$$

mit

$$\delta = \frac{\varepsilon}{k_0 + \|x_0\|_X}.$$

Der Satz ist bewiesen, wenn wir die Gleichung (4.2) ohne die Bildung des Abschlusses auf der rechten Seite beweisen können, eventuell bei einer weiteren Verkleinerung von δ.

Um dies zu erreichen betrachten wir $y \in B_\delta(y_0)$ und beachten, daß ein $x \in B_1(0) \subset X$ existiert mit

$$\|y - Tx\|_Y < \frac{\delta}{2}$$

oder auch

$$2\|y - Tx\|_Y < \delta.$$

Dies heißt aber

$$2(y - Tx) \in B_\delta(0).$$

Wir konstruieren zu $y \in B_\delta(0)$ Folgen

$$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_1(0) \text{ und } \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_\delta(0)$$

mit

$$y_1 = y \text{ und } y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k).$$

Die Existenz der x_k wird induktiv mit der obigen Überlegung gezeigt, denn x_k wird so gewählt, daß

$$\|y_k - Tx_k\|_Y < \frac{\delta}{2}.$$

Betrachte

$$\frac{1}{2^{k+1}} y_{k+1} = \frac{1}{2^k} y_k - T(\frac{1}{2^k} x_k).$$

Es ist dann

$$Tx_k = y_k - \frac{1}{2} y_{k+1},\ k = 1, 2 \ldots$$

und

$$2^{-k+1} Tx_k = 2^{-k+1} y_k - 2^{-k} y_{k+1}.$$

Mit Induktion sehen wir die Darstellung der Summe

$$\sum_{k=1}^{m} 2^{-k+1} Tx_k = y - 2^{-m} y_{m+1},$$

denn für $m = 1$ ist diese Darstellung klar und angenommen, die Behauptung ist gezeigt für m, so ergibt sich für $m + 1$

$$\sum_{k=1}^{m+1} 2^{-k+1} Tx_k = sum_{k=1}^{m} 2^{-k+1} Tx_k + 2^{-m} Tx_{m+1} = y - 2^{-m} y_{m+1} + 2^{-m}(y_{m+1} - \frac{1}{2} y_{m+2}),$$

und dies entspricht der Behauptung. Betrachte die Folge

$$\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}},\ \xi_i = \sum_{k=1}^{i} 2^{-k} x_k.$$

Nun ist

$$\|\xi_j - \xi_m\|_X \ = \ \| \sum_{k=j+1}^{m} 2^{-k} x_k \|_X$$

$$\leq \sum_{k=j+1}^{m} 2^{-k} \|x_k\|_X$$
$$\leq \sum_{k=j+1}^{m} 2^{-k}.$$

Dies wird für j, m hinreichend groß beliebig klein, und wir haben gesehen, daß die Folge $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bildet. Der Grenzwert existiert $x = \lim_{i\to\infty} \xi_i$, dessen Norm wird durch

$$\|x\|_X \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j+1} = 2$$

abgeschätzt und wegen der Stetigkeit von T ist $Tx = y$. Damit ist gezeigt, daß

$$B_\delta(0) \subset T\left(\overline{B_2(0)}\right) \subset T(B_3(0))$$

ist. Damit ist

$$B_{\frac{\delta}{3}}(0) \subset T(B_1(0).$$

□

Als unmittelbare Konsequenz aus dieser Aussage erhält man:

Satz 4.3.2
Sind X, Y Banachräume, und ist $T : X \to Y$ bijektiv und beschränkt, so T ein toplinearer Isomorphismus, insbesondere ist die Inverse T^{-1} beschränkt.

Beweis. Klar! □

4.4 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Als weitere Konsequenz aus dem Satz von der offenen Abbildung erhalten wir folgende Charakterisierung beschränkter Abbildungen.

Satz 4.4.1
Es seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ sei linear. Dann gilt $T \in L(X, Y)$ genau dann, wenn

$$\operatorname{graph} T = \left\{(x, Tx) \;\middle|\; x \in X\right\} \subset X \times Y$$

abgeschlossen ist.

Beweis. Erstens ist $X \times Y$ ein Banachraum, eine geeignete Norm ist z.B. $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Ist T stetig, so ist die Behauptung, $\operatorname{graph} T$ offensichtlich. Für die Gegenrichtung beachten wir, daß $\operatorname{graph} T$ ein Banachraum ist. Wir betrachten die Projektionen $P_X : \operatorname{graph} T \to X$ und $P_Y : \operatorname{graph} T \to Y$. Beide sind linear und stetig, P_X ist zusätzlich bijektiv. Also ist $P_X^{-1} : X \to \operatorname{graph} T$ stetig und linear und $T = P_Y \circ P_X^{-1}$ ist stetig. $\square$