Kapitel 3

Einige Funktionenräume

In diesem Kapitel werden wir einige Funktionenräume kennenlernen. Wir wollen dabei darauf vorbereiten die Dualräume zu bestimmen und weitere wichtige Eigenschaften herausarbeiten. Der Zusammenhang zwischen der abstrakten Theorie und den konkreten Räumen ist die Grundlage der Anwendbarkeit der Funktionalanalysis, insbesondere auf partielle Differentialgleichungen, aber auch auf andere Probleme der angewandten und numerischen Mathematik, wie auch der Quantenmechanik.

3.1 Der Raum $C(\Omega, \mathbb{R})$

Wir erinnern an Beispiel 1.3.2 (2). Dort hatten wir für kompaktes Ω den Raum $C(\Omega, \mathbb{R})$ definiert und mit einer Metrik versehen. In Beispiel 2.1.7 hatten wir diesen Raum mit einer Norm versehen und uns überlegt, daß es sich um einen Banachraum handelt und hatten auch zwei unterschiedliche stetige lineare Funktionale auf dem Raum angegeben. Wir wollen nun diesen Raum und seine nächsten Verwandten etwas systematischer untersuchen.

Es sei Ω ein *Gebiet* im $\mathbb{R}^n$, d.h. Ω ist offen und zusammenhängend. Vieles von dem, was wir im folgenden sagen wollen, ist auch für allgemeinere Situationen richtig, z.B. für Mannigfaltigkeiten. Diese Verallgemeinerung ist nicht nur aus mathematischer Ästhetik wichtig, sondern auch für viele Anwendungen, gerade auch in der Mechanik. Trotz dieser Wichtigkeit wollen wir nicht näher darauf eingehen, denn wenn man die Theorie in einem Fall verstanden hat, wird der Weg zur komplizierteren Situation nicht schwer werden.

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir uns mit dem Raum $C(\Omega, \mathbb{R})$ beschäftigen, ähnliche Ergebnisse gelten auch für die entsprechenden Räume $C^k(\Omega, \mathbb{R})$ und $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Normen hatten wir bisher nur auf dem Raum beschränkter Funktionen definiert. Der Raum $C(\Omega, \mathbb{R})$ enthält natürlich auch unbeschränkte Funktionen, daher muß die Topologie anders definiert werden.

Definition 3.1.1
Sei $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Kompakta in Ω mit folgenden Eigenschaften

1. $K_i \subset (K_{i+1})^0$,
2. $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i = \Omega$
3. *zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_n$.*

Dann nennen wir $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung *des Gebietes Ω und setzen*

$$p_n(f) = \sup_{x\in K_n} |f(x)|.$$

Man prüft leicht nach

SN1 $p_n : C(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, d.h. $p_n \geq 0$,

SN2 $p_n(\alpha f) = |\alpha| p_n(f)$,

SN3 $p_n(f+g) \leq p_n(f) + p_n(g)$.

Definition 3.1.2
Sei V ein linearer Raum, eine Abbildung $p : V \to \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften [SN1-3] wird als Halbnorm *bezeichnet.*

Man beachte den Unterschied zwischen einer Norm und einer Halbnorm: $p(f) = 0$ impliziert **nicht**, daß $f = 0$ ist. Allerdings gilt in unserem Beispiel offensichtlich

$$p_n(f) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

impliziert $f = 0$. Wir definieren eine *Fréchet-Metrik*[1] $d_F : C(\Omega, \mathbb{R}) \times C(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ durch

$$d_F(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}. \tag{3.1}$$

[1] Maurice René Fréchet (2.9.1879–4.6.1973) fand in seiner Dissertation den Begriff des metrischen Raumes und baute darauf ein neues abstraktes Gebäude auf. Er führte die Begriffe *separabel* und *kompakt* ein. Er hatte Vorbehalte gegen die Theorie der normierten Räume von Banach und legte mit seinem Begriff der Ableitung die Grundlagen der nichtlinearen Funktionalanalysis.

Lemma 3.1.3
$(C(\Omega, \mathbb{R}), d_F)$ ist ein metrischer linearer Raum.

Beweis. Es ist nur die Dreiecksungleichung nachzuweisen. □

Allgemeiner gilt:

Satz 3.1.4
Ist V ein linearer Raum mit Halbnormen $p_n, n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $x = 0$ ist, dann führt die Konstruktion aus Gleichung (3.1) auf einen metrischen linearen Raum.

3.2 Räume differenzierbarer Funktionen

Auf dem Gebiet Ω betrachten wir die Menge der stetigen beschränkten Funktionen $C_b(\Omega, \mathbb{K})$. Wie wir bereits für kompaktes Ω in Beispiel 2.1.7 gesehen hatten, definiert

$$\|f\|_\infty = \sup \left\{ |f(x)| \;\middle|\; x \in \Omega \right\}$$

eine Norm auf diesem Raum.

Definition 3.2.1
Der Träger *einer stetigen Funktion f ist der Abschluß der Menge der Punkte, in denen f nicht verschwindet, in Zeichen*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\left\{ x \in \Omega \;\middle|\; f(x) \neq 0 \right\}}.$$

Definition 3.2.2
Die Menge der stetigen Funktionen auf Ω mit kompakten Träger wollen wir mit $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ bezeichnen: also

$$C_0(\Omega, \mathbb{R}) = \{ f \in C(\Omega, \mathbb{R}) \mid \operatorname{supp}(f) \subset \Omega \textit{ ist kompakt} \}.$$

Bemerkung 3.2.3
Auf einem Gebiet mit kompakten Abschluß hat nicht jede stetige Funktion kompakten Träger, wir haben verlangt, daß der Träger eine kompakte Teilmenge von Ω ist.

Lemma 3.2.4
$C_0(\Omega, \mathbb{R})$ ist mit $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Raum, allerdings ist dieser Raum nicht vollständig.

Beweis. Die erste Aussage ist klar, man beachte daß $\operatorname{supp}(f+g) \subset \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$ ist. Die Vereinigung zweier kompakter Mengen in Ω ist wieder kompakt.

Die zweite Aussage überlegen wir uns im Moment nur für das Beispiel $C_0([0,1],\mathbb{R})$, eine allgemeine Konstruktion wird uns später von der Richtigkeit im allgemeinen überzeugen.

Sei
$$f_n = \sup\left\{0, 1 - \left(2 + \frac{1}{n}\right)\left|\frac{1}{2} - x\right|\right\}.$$
$f_n \to 1 - 2\left|\frac{1}{2} - x\right|$ mit $n \to \infty$. Dies hat den Träger $[0,1] \not\subset (0,1)$. □

Verlangt man neben der Stetigkeit noch Differenzierbarkeit, gelangt man in natürlicher Weise auf die Räume $C^k(\Omega,\mathbb{R})$ und $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, die wir nun definieren wollen, vgl. auch Beispiel 1.3.4.

Definition 3.2.5
Es sei Ω ein Gebiet, die Menge der Funktionen
$$C_b^k(\Omega,\mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \text{ für } |\alpha| \le k \text{ ist } D^\alpha f \text{ beschränkt}\}.$$
$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \le k} \sup\{|D^\alpha f(x)| \mid x \in \Omega\}$$
ist eine Norm auf $C^k(\Omega,\mathbb{R})$. Wiederum finden wir einen Unterraum $C_0^k(\Omega,\mathbb{R})$.

Lemma 3.2.6
$C_b^k(\Omega,\mathbb{R})$ ist mit der angegebenen Norm ein Banachraum. $C_0^k(\Omega,\mathbb{R})$ ist ein normierter, jedoch nicht vollständiger Unterraum.

Beweis. In der Analysis lernt man den Satz kennen, daß eine Folge von Funktionen, deren Ableitungen gleichmäßig konvergieren und die an einer Stelle einen Grenzwert besitzt, gleichmäßig konvergent ist. Die Grenzfunktion ist differenzierbar und ihre Ableitung ist der Grenzwert der Folge der Ableitungen. Dieser Satz wird hier auf geradlinige Weise angewendet.

Die Aussage bezüglich $C_0^k(\Omega,\mathbb{R})$ werden wir in der Allgemeinheit noch kennenlernen. Ein Spezialfall kann wie oben konstruiert werden. □

Beispiel 3.2.7
Ein Beispiel eines Operators zwischen zwei Banachräumen $X = C_b^2(\Omega,\mathbb{R})$ und $Y = C_b(\Omega,\mathbb{R})$ ist der *Laplaceoperator*[2] $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

[2]Pierre Simon Laplace (28.3.1749–5.3.1827) war während der französischen Revolution

Abbildung 3.1: Pierre Simon Laplace (28.3.1749–5.3.1827)

ein Gebiet sei. Dieser Operator ist linear und beschränkt, das erste ist klar, das zweite sieht man wie folgt. Sei $u \in X$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|_\infty &= \sup_{x\in\Omega}\left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right| \\ &\le \sum_{i=1}^n \sup_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right| \\ &\le \|u\|_{C^2}. \end{aligned}$$

Die Frage nach der Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = f$ wird dann die Frage nach der Surjektivität von $\Delta : C^2(\Omega,\mathbb{R}) \to C(\Omega,\mathbb{R})$. Tatsächlich werden viele der zu erlernenden Techniken für solche Fragen enorm wichtig sein. Wir werden dies als roten Faden immer wieder sehen.

Weitere wichtige Räume bestehen aus Funktionen, die beliebig oft differenzierbar sind. Solche kennen wir aus der Analysis: Polynome und trigonometrische Polynome sind typische Beispiele. In der Analysis lernt man auch Sätze über die Approximierbarkeit stetiger Funktionen durch (trigonometrische) Polynome. Dies übersetzt sich in Aussagen über die Dichtheit von bestimmten Funktionenräumen in anderen Funktionenräumen.

---

engagiert und wechselte danach mehrfach die politische Richtung. Seine mathematischen Untersuchungen betreffen partielle Differentialgleichungen, Kugelflächenfunktionen, Himmelsmechanik, Strömungsmechanik und die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Definition 3.2.8
Mit $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$, mit $C_b^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ den Unterraum all der Funktionen, die mitsamt allen Ableitungen beschränkt sind.

$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ ist die Teilmenge der Funktionen in $C_b^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, die einen kompakten Träger besitzen.

Auf der Menge $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ kann man keine Norm einführen wie in den Fällen zuvor, immerhin können wir noch eine (Fréchet-)Metrik definieren:

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(f, g)}{1 + p_k(f, g)},$$

wobei für eine Ausschöpfung $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$p_k(f, g) = \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x \in K_n} |D^\alpha f(x) - D^\alpha g|$$

sei.

Lemma 3.2.9
d ist eine Metrik auf $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

3.3 Funktionen beschränkter Variation

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen, die auf reellen Intervallen definiert sind und Werte in $\mathbb{R}$ annehmen.

Definition 3.3.1
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Wir definieren die (erweiterte positive reelle) Zahl

$$V_a^b f = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \;\middle|\; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \right\}$$

als die totale Variation *von f auf $[a, b]$. Erweiterte reelle Zahl bedeutet hier, daß $V_a^b f \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ liegt. Ist $V_a^b f < \infty$ wird f als Funktion* beschränkter Variation *bezeichnet. Die Menge der Funktionen von beschränkter Variation auf $[a, b]$ wird mit $\mathrm{BV}([a, b])$ bezeichnet.*

Lemma 3.3.2
$\mathrm{BV}([a,b])$ *wird mit* $\|u\|_{\mathrm{BV}([a,b])} = |u(a)| + V_a^b u$ *zum Banachraum.*

Beweis. Ist $\|u\|_{\mathrm{BV}([a,b])} = 0$, so ist $u(a) = 0$. Wäre $u(x) \neq 0$, so wäre offenbar $V_a^b u \neq 0$. Die Eigenschaft **N2** einer Norm ist klar. Kommen wir zur Dreiecksungleichung **N3**. Der erste Term $|u(a) + v(a)| \leq |u(a)| + |v(a)|$ erfüllt offenbar die Dreiecksungleichung. Bleibt zu zeigen

$$V_a^b(u+v) \leq V_a^b u + V_a^b v.$$

Für jede Unterteilung von $[a,b]$ der Form $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |(u+v)(x_k) - (u+v)(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} |u(x_k) - u(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |v(x_k) - v(x_{k-1})|.$$

Diese Ungleichheit bleibt beim Übergang zum Supremum erhalten. Wir müssen noch die Vollständigkeit des Raumes beweisen. Dazu zunächst die folgende Hilfsaussage: ist $u \in BV([a,b])$, so ist $|u(x) - u(y)| \leq V_x^y u$. Ist nun $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $BV([a,b])$, dann ist $\{u_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchyfolge und demzufolge konvergent. Sei nun $x \in [a,b]$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u_m(x)| &= |u_n(x) - u_n(a) - u_m(x) + u_m(a) + u_n(a) - u_m(a)| \\
&\leq |u_n(x) - u_n(a) - u_m(x) + u_m(a)| + |u_n(a) - u_m(a)| \\
&\leq V_a^x(u_n - u_m) + |u_n(a) - u_m(a)|.
\end{aligned}$$

Damit wird $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes x zur Cauchyfolge und ist damit konvergent gegen eine Funktion u.

Es bleibt zu zeigen, daß $u \in BV([a,b])$ ist. Sei $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} V_a^b u_n$. $M < \infty$, da $\{u\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder Zerlegung ξ von $[a,b]$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für $n > N$

$$\sum_{\xi_i \in \xi} |u_n(\xi_i) - u_n(\xi_{i+1})| < M\varepsilon$$

ist. Dann ist aber $V_a^b u \leq M$. □

3.4 Das Lebesgue-Integral

Bevor wir die wichtige Klasse von Funktionenräumen integrierbarer Funktionen widmen, wollen wir uns erst ein wenig mit dem Lebesgueschen[3] Integral-

[3]Henri Léon Lebesgue (28.6.1875-26.7.1941) erkannte die Unzulänglichkeit des Riemannschen Integralbegriffes und fand die nach ihm benannte Verallgemeinerung. Damit

begriff beschäftigen.

Abbildung 3.2: Henri Léon Lebesgue (28.6.1875-26.7.1941)

3.4.1 σ-Algebren

Wir wiederholen zunächst die wesentlichen Begriffe aus der Maßtheorie.

Definition 3.4.1
Es sei Ω eine Menge, eine Familie $\mathcal{B}$ von Teilmengen von Ω heißt Algebra, *falls gilt*

1. $\Omega \in \mathcal{B}$;
2. $\emptyset \in \mathcal{B}$;
3. $S \in \mathcal{B}$ *impliziert* $S^c = \Omega \setminus S \in \mathcal{B}$;
4. *mit* $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$, *ist auch* $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{B}$.

Lemma 3.4.2
Ist $\mathcal{B}$ eine Algebra, so ist mit S_1, S_2 auch $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{B}$.

---

prägte Lebesgue die mathematische Entwicklung grundlegend. Die moderne Theorie partieller Differentialgleichungen wäre ohne dieses Werk nicht denkbar. Lebesgue arbeitete auch über andere Probleme, z.B. Variationsrechnung.

Beweis. Mit $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$ sind auch S_1^c, S_2^c in $\mathcal{B}$, damit dann auch $S_1^c \cup S_2^c \in \mathcal{B}$ und schließlich auch $(S_1^c \cup S_2^c)^c \in \mathcal{B}$. Nun ist $S_1 \cap S_2 = (S_1^c \cup S_2^c)^c$. □

Definition 3.4.3
*Eine Algebra $\mathcal{B}$ heißt σ-*Algebra*, falls mit $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch $\cup_{i\in\mathbb{N}} S_i \in \mathcal{B}$ ist.*

Definition 3.4.4
Eine Abbildung $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ heißt additives Maß *auf Ω, falls $\mu(\emptyset) = 0$ ist und gilt:*

1. *sind $S_1, \dots S_n \in \mathcal{B}$ disjunkt, so ist*
$$\mu(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i).$$
2. *μ ist σ-subadditiv, d.h. ist $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Mengen in $\mathcal{B}$ und ist $S \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} S_i$, , $S \in \mathcal{B}$, so ist*
$$\mu(S) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i).$$
Man beachte, hier braucht man keine σ-Algebra.

Lemma 3.4.5
Es sei $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra. Ein additives Maß ist monoton und σ-additiv, d.h. sind $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$, $S_1 \subset S_2$, so ist $\mu(S_1) \le \mu(S_2)$, bzw. sind $S_i \in \mathcal{B}$, $i \in \mathbb{N}$ und $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \ne j$, so hat man
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i).$$

Beweis. Zunächst ist $\mu(S_2) = \mu(S_2 \setminus S_1) + \mu(S_1) \ge \mu(S_1)$. Für die Gleichheit in der zweiten Aussage stellt man fest, daß
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i)$$
bereits aus der Definition folgt. Dann folgt aber
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i\right) \ge \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(S_i)$$
für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Definition 3.4.6

1. *Ein* halboffener Quader *in* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Menge der Form*

$$\begin{aligned} Q &= [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\infty \leq a_i \leq x_i < b_i \leq \infty,\ i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

2. *$\mathcal{B}_0$ bestehe aus allen Mengen, die sich als (endliche) disjunkte Vereinigung halboffener Quader darstellen lassen.*

3. *Für einen halboffenen Quader Q sei $\mu_0(Q) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.*

Lemma 3.4.7
$\mathcal{B}_0$ ist eine Algebra und μ_0 kann zu einem additiven Maß auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden.

Beweis. Die Eigenschaften einer Algebra sind leicht nachzuprüfen. Klar ist auch, daß μ additiv auf $\mathcal{B}_0$ fortgesetzt werden kann. Es bleibt die letzte Eigenschaft aus Definition 3.4.4 nachzuprüfen. O.B.d.A. sind alle beteiligten Quader endlich, ansonsten ist die Aussage offenbar richtig. Es seien $S_i = [a_1^i, b_1^i) \times \ldots [a_n^i, b_n^i)$ und $S \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$, $S \in \mathcal{B}_0$. Dann ist S eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Quader $S = \cup_{j=1}^m Q_j$ und

$$Q_j = [\alpha_1^j, \beta_1^j) \times \ldots \times [\alpha_n^j, \beta_n^j).$$

Wir betrachten offene Erweiterungen der S_i in der Form

$$S_i^\varepsilon = (a_1^i - \varepsilon(b_1^i - a_1^i), b_1^i + \varepsilon(b_1^i - a_1^i)) \times \ldots \times (a_n^i - \varepsilon(b_n^i - a_n^i), b_n^i + \varepsilon(b_n^i - a_n^i))$$

und eine abgeschlossene Verkleinerung von S der Form

$$S^\delta = \cup_{j=1}^m Q_j^\delta$$

mit

$$Q_j^\delta = [\alpha_1^j + \delta(\beta_1^j - \alpha_1^j), \beta_1^j - \delta(\beta_1^j - \alpha_1^j)] \times \ldots \times [\alpha_n^j + \delta(\beta_1^j - \alpha_1^j), \beta_n^j - \delta(\beta_1^j - \alpha_1^j)].$$

Nun ist S^δ kompakt und wird von den (offenen Mengen) S_i^ε überdeckt, also reichen endlich viele davon aus, sagen wir $S_{j_k}^\varepsilon$, $k = 1, \ldots, r$. Also gilt

$$\mu_0(S^\delta) \leq \sum_{k=1}^r \mu_0(S_{j_k}^\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{r} (1+2\varepsilon)^n \mu_0(S_{j_k}) \\ &\leq (1+2\varepsilon)^n \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(S_j). \end{aligned}$$

(Man beachte, daß formal $\mu_0(S^\delta)$ bzw. $\mu_0(S_{j_k})$ nicht definiert sind. Wir benutzen die offensichtliche Erweiterung von μ_0 für offene und abgeschlossene Quader.) Mit $\varepsilon, \delta \to 0$ folgt die Behauptung. □

Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

LS1 f ist monoton steigend

LS2 f ist oberhalb-halbstetig in dem Sinne

$$\lim_{x \searrow y} f(x) = f(y),$$

führen wir für Quader Q eine Verallgemeinerung des additiven Maßes μ_0 ein

$$\mu_f(Q) = \prod_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i)).$$

Es gilt eine entsprechende Aussage, daß μ_f zu einem additiven Maß auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden kann.

3.4.2 Äußere Maße

Definition 3.4.8
Das zu einem additiven Maß μ auf einer Algebra $\mathcal{B}$ gehörige äußere Maß μ^* *ist für Mengen $A \subset \Omega$ definiert durch*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(S_i) \,\middle|\, A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i, \; S_i \in \mathcal{B} \right\}.$$

Lemma 3.4.9
μ^* ist σ-subadditiv und für $A \in \mathcal{B}$ gilt

$$\mu(A) = \mu^*(A).$$

Beweis. Zu zeigen ist, daß für eine Folge von Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nun gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $S_{nk} \in \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$ mit

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{nk}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Dann gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n,k=1}^{\infty} S_{nk}$$

und

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \mu(S_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. Damit folgt aber auch, daß auf $\mathcal{B}$ die Werte von μ und μ^* übereinstimmen. □

Definition 3.4.10
Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt Nullmenge, *falls $\mu^*(N) = 0$.*

Wir haben die folgenden einfachen Aussagen für Nullmengen.

Lemma 3.4.11
Teilmengen und abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

Beweis. Folgt sofort aus dem Lemma 3.4.9. □

Wir führen noch folgende Sprechweise ein: eine Eigenschaft gilt *μ-fast überall*, wenn sie für alle Punkte außerhalb einer Nullmenge richtig ist.

Die äußeren Maße zu μ_0 bzw. μ_f seien μ_0^* bzw. μ_f^*. Das erste nennen das äußere Lebesgue-Maß, das zweite das äußere Lebesgue-Stieltjes-Maß[4].

[4] Thomas Jean Stieltjes (29.12.1856-31.12.1894) studierte als gebürtiger Niederländer in Delft und war Professor in Groningen. Er habilitierte in Paris und wurde danach Professor

3.4.3 Treppenfunktionen

Nun sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, Ω eine Menge mit einer Algebra $\mathcal{B}$ und einem additiven Maß μ. μ^* sei das zugehörige äußere Maß.

Definition 3.4.12
Eine Treppenfunktion *von* $f : \Omega \to X$ *bezüglich* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften*

1. $f(\Omega)$ *ist endlich.*
2. *für jedes* $x \in X$ *ist* $f^{-1}(x) \in \mathcal{B}$.
3. *für* $0 \neq x \in X$ *ist* $\mu(f^{-1}(x)) < \infty$.

Setze

$$T(\mu, X) = \{f : \Omega \to X \mid f \text{ ist Treppenfunktion}\}.$$

Lemma 3.4.13
Eine Funktion $f : \Omega \to X$ *ist genau dann Treppenfunktion, wenn sie eine Darstellung der Form*

$$f(\omega) = \sum \chi_{S_i}(\omega)\alpha_i$$

mit $\alpha_i \in X$ *und charakteristischen Funktionen* χ_{S_i}, $S_i \in \mathcal{B}$ *und* $\mu(S_i) < \infty$ *hat. Dabei heißt eine* $\mathbb{R}$*-wertige Funktion* charakteristische Funktion *einer Menge* S*, wenn*

$$\chi_S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \omega \in S \\ 0 & \text{für} \quad \omega \notin S \end{cases}$$

Beweis. Klar! □

Definition 3.4.14
Sei $f \in T(\mu, X)$. *Wir definieren das* $\mu-$Integral *von* f *über* Ω *durch*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{0 \neq x \in f(\Omega)} \mu(f^{-1}(x))x.$$

---

in Toulouse, wo er auch starb. Nach Arbeiten auf verschiedenen Gebieten der Mathematik verallgemeinerte er 1894 den Riemannschen Integralbegriff zu dem, was wir heute als Riemann-Stieltjes-Integral bezeichnen.

Eine alternative Darstellung folgt sofort aus der Darstellung der Treppenfunktion f als Summe charakteristischer Funktionen. Ist $f = \sum_{i=1}^{m} \chi_{S_i}\alpha_i$, so ist

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu(S_i)\alpha_i.$$

Wir bemerken, daß $T(\mu, X)$ ein linearer Raum ist, und das Integral eine lineare Abbildung von $T(\mu, X)$ nach X darstellt. Das folgende Lemma sammelt einige einfache, aber wichtige Aussagen.

Lemma 3.4.15

1. *Ist $f \in T(\mu, X)$, so ist die Abbildung $x \mapsto \|f(x)\|_X$ in $T(\mu, \mathbb{R})$.*

2. $$\left\| \int_\Omega f \, d\mu \right\|_X \leq \int_\Omega \|f\|_X d\mu.$$

3. $$\|f\|_{T(\mu,X)} = \int_\Omega \|f\|_X d\mu.$$

   ist eine Halbnorm auf $T(\mu, X)$.

Beweis. Einfach nachprüfen! □

Wir führen auf $T(\mu, X)$ eine *Äquivalenzrelation* ein, d.h.

$$f \sim g \iff f - g = 0 \ \mu\text{-fast überall.}$$

Lemma 3.4.16
Sei $N(\mu, X) = \{f \in T(\mu, X) \mid f \sim 0\}$. $N(\mu, X)$ ist ein linearer Unterraum von $T(\mu, X)$, auf dem die Halbnorm $\|\cdot\|_{T(\mu,X)}$ verschwindet, und $\bar{T}(\mu, X) = T(\mu, X)/N(\mu, X)$ ist ein linearer normierter Raum.

Beweis. Dies ist leicht nachzuprüfen. □

3.4.4 Vervollständigung

Nach Satz 1.2.22 gibt es eine Vervollständigung des Raumes $\bar{T}(\mu, X)$, die wir mit $\tilde{T}(\mu, X)$ bezeichnen wollen. Wir erinnern uns daran, daß die Elemente der Vervollständigung Klassen von Cauchyfolgen sind.

Lemma 3.4.17
Es sei $[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]$ eine solche Klasse in $\tilde{T}(\mu, X)$. Dann gibt es eine Nullmenge N und eine Folge $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in $[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]$, so daß für $\omega \in \Omega \setminus N$ gilt,

$$f(\omega) = \lim_{j\to\infty} f_j(\omega)$$

existiert.

Die Klasse $[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]$ enthält genau dann die Nullklasse, wenn $f = 0$ $\mu-$fast überall.

Beweis. Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in [\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]$ ein Repräsentant. Wir wählen eine Teilfolge aus, die wir o.B.d.A. wieder als f_k bezeichnen, für die gilt

$$\int\limits_\Omega \|f_k - f_l\|_X d\mu \leq 2^{-i} \text{ für } k, l \geq i.$$

Sei

$$g_j = \sum_{i=1}^{j} \|f_i - f_{i+1}\|_X.$$

Die Folge der g_j ist monoton wachsend, daher existiert der (endliche oder nicht endliche) Grenzwert

$$g(\omega) = \lim_{j\to\infty} g_j(\omega) \in [0, \infty] \text{ für alle } \omega \in \Omega,$$

und für das Integral ergibt sich

$$\int\limits_\Omega g_j d\mu = \sum_{i=1}^{j} \int\limits_\Omega \|f_i - f_{i+1}\|_X d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist dann die Menge

$$A_j(\varepsilon) = \left\{\omega \in \Omega \mid g_j(\omega) > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \in \mathcal{B}.$$

Es gilt dann

$$1 \geq \int\limits_{\Omega} g_j d\mu \geq \frac{1}{\varepsilon}\mu(A_j(\varepsilon)).$$

Es ist $A_j(\varepsilon) \subset A_{j+1}(\varepsilon)$ und

$$N = \{\omega \in \Omega \mid g(\omega) = \infty\} \subset \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, g(\omega) > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \subset \bigcup_j A_j(\varepsilon).$$

Daher ist

$$\mu^*(N) \leq \lim_{j\to\infty} \mu(A_j(\varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

Damit ist N eine Nullmenge, $g < \infty$ außerhalb von N und $f_k(\omega)$ eine Cauchyfolge außerhalb N. Damit ist der erste Teil gezeigt.

Wir kommen zum zweiten Teil. Wir beginnen mit der Hinrichtung. O.B.d.A. ist

$$f(\omega) = \lim_{i\to\infty} f_i(\omega), \omega \in \Omega \setminus N.$$

Wir müssen zeigen, daß $\tilde{N} = \{\omega \mid f(\omega) \neq 0\} \setminus N$ eine Nullmenge ist. Dazu wählen wir eine Teilfolge f_k mit

$$\int\limits_{\Omega} \|f_k\|_X d\mu \leq 2^{-k}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ setze

$$N_{\varepsilon k} = \{\omega \mid \|f_k\|_X > \varepsilon\} \in \mathcal{B},\ N_\varepsilon = \{\omega \mid \|f\|_X > \varepsilon\} \setminus N.$$

Dann ist für $k_0 \in \mathbb{N}$

$$N_\varepsilon \subset \bigcup_{k>k_0} N_{\varepsilon k}.$$

Für das äußere Maß ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu^*(N_\varepsilon) &\leq \sum_{k>k_0} \mu(N_{\varepsilon k}) \\ &\leq \sum_{k>k_0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Omega} \|f\|_X d\mu \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} 2^{-k_0} \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Also ist N_ε und damit auch $\{\omega \mid \|f\|_X > 0\} \setminus N$ eine Nullmenge.

Nun kommen wir zur Rückrichtung. Sei $f = 0$, zu zeigen ist, die Klasse $[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]$ enthält eine Nullfolge bzgl. $\|\cdot\|_{T(\mu,X)}$. Wir nehmen an

$$0 = f(\omega) = \lim_{k\to\infty} f_k(\omega),\ \ \omega \in \Omega \setminus N.$$

Wie zuvor dürfen wir annehmen, daß

$$\int_\Omega \|f_k - f_{k+1}\|_X \, d\mu \le 2^{-k}.$$

Sei $S_l = \{\omega \mid f_l(\omega) \neq 0\}$, $S_l \in \mathcal{B}$ und $\mu(S_l) < \infty$. Dann ist für $k > l$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|f_k\|_X d\mu &\le \int_{S_l} \|f_k\|_X d\mu + \int_{\Omega\setminus S_l} \|f_k\|_X \, d\mu \\
&\le \varepsilon\mu(S_l) + \int_{\{\omega \,\mid\, \|f_k(\omega)\|_X > \varepsilon\}} \|f_k\|_X \, d\mu + \int_{\Omega\setminus S_l} \|f_k - f_l\|_X d\mu \\
&\le \varepsilon\mu(S_l) + \int_{\{\omega \,\mid\, \|f_k(\omega)\|_X > \varepsilon\}} \|f_k\|_X d\mu + 2\int_\Omega \|f_k - f_l\|_X d\mu
\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert gegen null für $\varepsilon \to 0$. Den zweiten Summanden schätzen wir ab, indem wir uns überlegen, daß f_l auf der angegebenen Menge beschränkt ist, sagen wir durch F_l (Treppenfunktionen nehmen nur endlich viele Werte außerhalb einer Nullmenge an). Also wird dieser Summand durch

$$F_l \; \mu\left(\left\{\omega \;\middle|\; \|f_k(\omega)\|_X > \varepsilon\right\}\right)$$

nach oben abgeschätzt. Wir kommen auf diesen Ausdruck zurück. Der dritte Ausdruck konvergiert für $k, l \to \infty$ gegen null, da die Folge eine Cauchyfolge in der Normtopologie von $T(\mu, X)$ ist. Also bleibt nur der zweite Ausdruck übrig. Können wir nun zeigen, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{\omega \mid \|f_k\|_X > \varepsilon\}) = 0,$$

so folgt die Behauptung.

Sei

$$S_{kl} = \left\{ \omega \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} \|f_i - f_{i+1}\|_X > \varepsilon \right\} \in \mathcal{B}.$$

Dann gilt

$$\varepsilon\mu(S_{kl}) \leq \int_\Omega \sum_{i=k}^{l} \|f_i - f_{i+1}\|_X d\mu \leq \sum_{i=k}^{l} 2^{-i} \leq 2^{-k+1},$$

und $S_{kl} \subset S_{k,l+1}$. Für $\omega \in \Omega \setminus \left(N \cup \bigcup_{l\in\mathbb{N}} S_{kl}\right)$ gilt

$$\|f_k(\omega)\|_X \leq \|f_{l+1}(\omega)\|_X + \sum_{i=k}^{l} \|f_i(\omega) - f_{i+1}(\omega)\|_X.$$

Der erste Ausdruck konvergiert gegen null für $l \to \infty$ und der zweite ist durch ε nach oben beschränkt. Also, ist

$$\{\omega \mid \|f_k\|_X > \varepsilon\} \subset N \cup \bigcup_{l\in\mathbb{N}} S_{kl}.$$

daraus folgt nun

$$\begin{aligned} \mu(\{\omega \mid \|f_k\|_X > \varepsilon\}) &= \mu * (\{\omega \mid \|f_k\|_X > \varepsilon\}) \\ &\leq \mu^*(N) + \mu^* \left(\bigcup_{l\in\mathbb{N}} S_{kl} \right) \\ &\leq \lim \mu(S_{kl}) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} 2^{-k+1} \to 0 \text{ für } k \to \infty. \end{aligned}$$

□

3.4.5 Integrierbare Funktionen

Wir betrachten nun eine spezielle Klasse von Funktionen.

Definition 3.4.18
Wir definieren die Klasse der μ-integrierbaren Funktionen durch

$$\tilde{L}(\mu, X) = \left\{ f : \Omega \to X \mid f = \lim_{k\to\infty} f_k \mu\text{-fast überall}, \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \tilde{T}(\mu, X) \right\}$$

Lemma 3.4.19
Durch $f \equiv g$, *falls* $\{\omega \mid f(\omega) - g(\omega) \neq 0\}$ *eine Nullmenge ist, wird eine Äquivalenzrelation auf* $\tilde{L}(\mu, X)$ *definiert. Setze* $L(\mu, X) = \tilde{L}(\mu, X)/\equiv$, *d.h. sei* $\tilde{N} = \{f : \Omega \to X \mid f = 0 \ \mu - \text{fast überall}\}$, *so ist* $L(\mu, X) = \tilde{L}(\mu, X)/\tilde{N}$.

Definition 3.4.20
Definiere eine Abbildung

$$T : \tilde{T}(\mu, X) \to L(\mu, X) : [\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}] \mapsto f,$$

wobei f *wie oben definiert ist.*

Lemma 3.4.21
T *ist ein toplinearer Isomorphismus von* $\tilde{T}(\mu, X)$ *auf* $L(\mu, X)$.

Beweis. Zunächst ist T wohldefiniert. Angenommen, man wählt eine andere Teilfolge in der Klasse von Cauchyfolgen aus, so konvergiert die Differenzfolge gegen 0 und daher sind die zugeordneten Funktionen μ-fast überall gleich.

Nach Definition von $L(\mu, X)$ ist T surjektiv. Angenommen, es seien zwei Klassen $[\{f_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}]$, $[\{f_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}]$ gegeben mit

$$T[\{f_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}] = T[\{f_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}].$$

Dann finden wir Repräsentanten $\{f_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{f_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$, die außerhalb einer jeweiligen Nullmenge N_1 bzw. N_2 gegen f_1 bzw. f_2 konvergieren. Nun ist $N' = N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge und auf $\Omega \setminus N'$ sind beide Folgen konvergent. f_1 und f_2 sind außerhalb einer Nullmenge N_3 gleich, also auf $\Omega \setminus (N' \cup N_3)$ ist $f_1 = f_2$. Daher konvergiert die Folge $\{f_k^1 - f_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ außerhalb von $N = N' \cup N_3$ gegen 0. Daher enthält die Klasse von $[\{f_k^1 - f_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}]$ eine Nullfolge in der Norm $\|\cdot\|_{T(\mu,X)}$.

Aufgrund der Definition ist T in beiden Richtungen normerhaltend. □

3.4.6 Das Lebesgue Integral

Definition 3.4.22
Sei $[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]$ *eine Klasse in* $\tilde{T}(\mu, X)$ *und* $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ *außerhalb der Nullmenge* N. *Wir definieren das* Lebesgue Integral *von* f *durch*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu.$$

Lemma 3.4.23
Der in Definition 3.4.22 angegebene Grenzwert existiert und das Lebesgue Integral ist wohldefiniert.

Beweis. Es gilt

$$\left\| \int_\Omega f_k \, d\mu - \int_\Omega f_l \, d\mu \right\|_X \leq \int_\Omega \|f_k - f_l\|_X d\mu \to 0$$

für $k, l \to \infty$. Also existiert der angegebene Grenzwert. Wie oben bereits argumentiert wurde, hängt dieser nicht von der Wahl der Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ab. □

Satz 3.4.24
Das Lebesgue Integral hat folgende Eigenschaften:

(L1) *$T(\mu, X) \subset L(\mu, X)$, das Lebesgue Integral ist linear auf $L(\mu, X)$ und*

$$\int_\Omega \chi_E \alpha d\mu = \mu(E)\alpha$$

für $E \in \mathcal{B}$ mit $\mu(E) < \infty$ und $\alpha \in X$.

(L2) *Ist $f \in L(\mu, X)$, so ist $\|f\|_X \in L(\mu, \mathbb{R})$ und es gilt*

$$\left\| \int_\Omega f \, d\mu \right\|_X \leq \int_\Omega \|f\|_X d\mu.$$

(L3) *Für $f \in L(\mu, X)$ und $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\int_\Omega \|f\|_X \, d\mu \geq \varepsilon \mu^* \left(\{\omega \in \Omega \mid \|f(\omega)\|_X > \varepsilon\} \right).$$

(L4) *$L(\mu, X)$ ist ein Banachraum mit Norm*

$$\|f\|_{L(\mu,X)} = \int_\Omega \|f\|_X \, d\mu.$$

(L5) *$T(\mu, X)$ ist dicht in $L(\mu, X)$.*

Beweis. (**L1**) Ist $f \in T(\mu, X)$, setze $f_k = f$ und betrachte $[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]$. Dies ist eine punktweise und bezüglich der Norm konvergente Folge. Es gilt

$$T[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}] = f.$$

(**L2**) Sei $f \in L(\mu, X)$. Wir betrachten eine Klasse $[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]$ in $\tilde{T}(\mu, X)$ mit $T[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}] = f$. Nun folgt

$$\int\limits_\Omega |\, \|f_k\|_X - \|f_l\|_X \,|\, d\,\mu \leq \int\limits_\Omega \|f_k - f_l\|_X \; d\mu \to 0$$

für $k, l \to \infty$, d.h. wir haben $[\{\|f_k\|_X\}_{k\in\mathbb{N}}] \in \tilde{T}(\mu, \mathbb{R})$. Nun konvergiert eine Teilfolge $\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ der Ausgangsfolge gegen f, damit konvergiert die Teilfolge $\{\|f_{k_i}\|_X\}_{i\in\mathbb{N}}$ gegen $\|f\|$. Damit ist $T[\{\|f_k\|_X\}_{k\in\mathbb{N}}] = \|f\|_X$. Für jedes k hat man nun

$$\left\| \int\limits_\Omega f_k \; d\mu \right\|_X \leq \int\limits_\Omega \|f_k\|_X d\mu,$$

daraus folgt nun die behauptete Ungleichung.
(**L3**) Wir beginnen mit einer Klasse $[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]$ in $\tilde{T}(\mu, X)$ mit $T([\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}]) = f$. Also, außerhalb einer Nullmenge gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f.$$

Wir dürfen (durch Übergang zu einer weiteren Teilfolge) o.B.d.A. annehmen, daß

$$\int\limits_\Omega \|f_{k+1} - f_l\|_X \; d\mu \leq 2^{-k}.$$

Für $\omega \in \Omega \setminus N$ und $\varepsilon > \delta > 0$ folgt aus

$$\|f(\omega)\|_X > \varepsilon,$$

$$\|f_k(\omega)\|_X > \delta \text{ oder } \|f(\omega) - f_k(\omega)\|_X > \varepsilon - \delta.$$

Wir betrachten zunächst den zweiten Fall

$$\begin{aligned} \|f(\omega) - f_k(\omega) &= \lim_{i\to\infty} \|f_i(\omega) - f_k(\omega)\|_X \\ &\leq \sum_{i\geq k} \|f_{i+1}(\omega) - f_i(\omega)\|_X. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, daß für ein $l > k$, welches von ω abhängt,

$$\sum_{k\leq i\leq l} \|f_{i+1}(\omega) - f_i(\omega)\|_X > \varepsilon - \delta.$$

Damit ist die Menge $\{\omega \mid \|f\|_X > \varepsilon\}$ enthalten in

$$N \cup \{\omega \mid \|f_k\|_X > \delta\} \cup \bigcup_{l\geq k} \left(\sum_{k\leq i\leq l} \{\omega \mid \|f_{i+1} - f_i\|_X\} > \varepsilon - \delta \right).$$

Die Vereinigung auf der rechten Seite ist monoton steigend in l und damit folgt wegen der Grenzwerteigenschaft des äußeren Maßes, daß

$$\begin{aligned} \mu^*(\{\omega \mid \|f\|_X > \varepsilon\}) &\leq \mu(\{\omega \mid \|f_k\|_X > \delta\}) \\ &\quad + \lim_{l\to\infty} \mu \left(\sum_{k\leq i\leq l} \{\omega \mid \|f_{i+1} - f_i\|_X\} > \varepsilon - \delta \right) \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int\limits_\Omega \|f_k\|_X \, d\mu + \frac{1}{\varepsilon - \delta} \sum_{k\leq i\leq l} \int\limits_\Omega \|f_{i+1} - f_i\|_X \, d\mu \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int\limits_\Omega \|f_k\|_X \, d\mu + \frac{1}{\varepsilon - \delta} 2^{1-k}. \end{aligned}$$

Aufgrund von (**L2**) gilt

$$\int\limits_\Omega \|f\|_X \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \|f_k\|_X \, d\mu.$$

Daraus folgt mit $k \to \infty$ und $\delta \to \varepsilon$ die Behauptung.
(**L4**),(**L5**) T ist eine Isometrie, $\tilde{T}(\mu, X)$ ist ein Banachraum, in dem nach Definition $T(\mu, X)$ dicht liegt. □

3.4.7 Konvergenzsätze

Lemma 3.4.25
Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(\mu, X)$ mit

$$f_k \to_{L(\mu,X)} f,$$

so gibt es eine Teilfolge, die punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert. (Hier bedeutet $\to_{L(\mu,X)}$ Konvergenz in der Norm des Raumes $L(\mu, X)$.)

Beweis. Dieser Beweis ist einem früheren Beweis recht ähnlich, wir wollen uns auf die wesentlichsten Schritte beschränken.

Durch Wahl einer Teilfolge erreichen wir

$$\int_\Omega \|f - f_k\|_X \, \mathrm{d}\mu \leq 2^{-k}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, setze

$$N_\varepsilon = \left\{ \omega \mid \limsup_{k\to\infty} \|f - f_k\|_X > \varepsilon \right\}.$$

Für jedes j ist

$$N_\varepsilon \subset \bigcup_{k\geq j} \{\omega \mid \|f - f_k\|_X > \varepsilon\}.$$

Damit folgt für alle j

$$\mu^*(N_\varepsilon) \leq \sum_{k\geq j} \mu^*(\{\omega \mid \|f - f_k\|_X > \varepsilon\}).$$

Nach (**L3**) können wir weiter abschätzen

$$\mu^*(N_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k\geq j} \int_\Omega \|f - f_k\|_X \, d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} 2^{1-j} \to 0 \text{ für } j \to \infty.$$

Also ist N_ε eine Nullmenge und damit auch die Menge

$$\left\{ \omega \mid \limsup_{i\to\infty} \|f - f_k\|_X > 0 \right\}.$$

□

Satz 3.4.26
Im Raum $L(\mu, X)$ gelten die folgenden Aussagen.

1. *Sind $f, g \in L(\mu, \mathbb{R})$ und ist $f \leq g$ μ-fast überall, so gilt*

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu.$$

2. *Ist $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L(\mu, X)$ und konvergiert $f_k \to f$ μ-fast überall, so ist $f \in L(\mu, X)$ und $\|f - f_k\|_{L(\mu,X)} \to 0$ für $k \to \infty$.*

3. *Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(\mu, \mathbb{R})$ mit $0 \leq f_k \nearrow f$ μ-fast überall und es gebe eine gleichmäßige Schranke C mit*

$$\int_\Omega f_k \, d\mu \leq C \text{ für alle } k.$$

   Dann ist $f \in L(\mu, X)$, $f_k \to_{L(\mu,X)} f$ für $k \to \infty$ und es gilt

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu.$$

Beweis. (1) Es gilt

$$\int_\Omega g \, d\mu - \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega |g - f| \, d\mu \geq \left| \int_\Omega (g - f) \, d\mu \right| \geq 0.$$

(2) $L(\mu, X)$ ist vollständig, also gibt es ein g mit $f_k \to_{L(\mu,X)} g$ für $k \to \infty$. Dann gibt es eine Teilfolge, die punktweise μ-fast überall gegen g konvergiert. Also ist $f = g$.
(3) Die Folge der Integrale ist monoton steigend nach (**L1**) und beschränkt nach Voraussetzung. Also existiert der Grenzwert der Folge der Integrale. Ist nun $l \geq k$, so ist $f_l(\omega) \geq f_k(\omega)$ für alle ω. Dann ist

$$\int_\Omega |f_l - f_k| \, d\mu = \int_\Omega f_l \, d\mu - \int_\Omega f_k \, d\mu \to 0 \text{ für } k, l \to \infty.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz 3.4.27
$C_0(\mathbb{R}^n, X)$ ist dicht in $L(\mu, X)$.

Beweis. Zunächst muß gezeigt werden, daß $C_0(\mathbb{R}^n, X) \subset L(\mu, X)$. $T(\mu, X)$ ist dicht in $C_0(\mathbb{R}^n, X)$ (bezüglich der durch $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ induzierten Norm). Daher ist $C_0(\mathbb{R}^n, X) \subset L(\mu, X)$. Da aber $T(\mu, X)$ auch dicht in $L(\mu, X)$ liegt, reicht es, die Dichtheit von $T(\mu, X)$ in $C_0(\mathbb{R}^n, X)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L(\mu,X)}$ zu beweisen. Dazu reicht es, die Approximierbarkeit von charakteristischen Funktionen halboffener Quader durch stetige Funktionen mit kompakten Träger zu beweisen. (Beachte, Treppenfunktionen verlangen endliches Maß, jedoch keine Einschränkung an den Träger, z.B. sind charakteristische Funktionen unbeschränkter Mengen endlichen Maßes zugelassen. Allerdings wird zur Konstruktion die von halboffenen Quadern erzeugte Algebra betrachtet. Verlangt man nun, daß die Menge der Punkte, in denen die Funktion nicht verschwindet, in dieser Algebra ist und endliches Maß hat, so ist der Träger beschränkt!!).

Sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $S \subset \Omega$ ein halboffener Quader, d.h. $S = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots [a_n, b_n) \subset \Omega$ und χ_S sei die charakteristische Funktion von S. Setze

$$f_\varepsilon(x) = \max\left(0, 1 - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{dist}(x, S)\right) x.$$

Ist S kompakt, so ist auch der Träger von f_ε kompakt, offenkundig ist f_ε stetig. Es gilt

$$\chi_S \leq f_\varepsilon \leq \chi_{\operatorname{supp}(f_\varepsilon)}.$$

Dann ist

$$\int_\Omega |f_\varepsilon - \chi_S| \, d\mu \leq \int_\Omega (\chi_{\operatorname{supp}(f_\varepsilon)} - \chi_S) \, d\mu = \mu(\chi_{\operatorname{supp}(f_\varepsilon)} \setminus S) \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$. □

Lemma 3.4.28
Sei nun $\mathcal{B}_1$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{B}$ enthält. Für $\chi_S \in L(\mu, \mathbb{R})$ gilt dann:

1. *Es gibt $S_k \in \mathcal{B}_0$ mit $\chi_{S_k} \to \chi_S$ in $L(\mu, \mathbb{R})$ für $k \to \infty$.*

2. *Es gibt ein $S' \in \mathcal{B}_1$ mit $\chi_S = \chi_{S'}$ μ-fast überall.*

3. *Für alle $A \in \mathcal{B}_1$ ist $\chi_{S \cap A} \in L(\mu, \mathbb{R})$.*

Beweis. (1) Zu χ_S gibt es eine Folge $f_k \in T(\mu, \mathbb{R})$ mit $f_k \to \chi_S$ für $k \to \infty$. Sei

$$E_k = \left\{ \omega \;\middle|\; f_k(\omega) \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Es gilt dann

$$|\chi_{S_k} - \chi_S| \leq |\chi_{S_k} - f_k| + |f_k - \chi_S|.$$

Nun können χ_S und χ_{S_k} nur die Werte $0, 1$ annehmen und $|f_k - \chi_{S_k}| < \frac{1}{2}$, also ist $|\chi_{S_k} - f_k| < |f_k - \chi_S|$. Damit wird

$$|\chi_{S_k} - \chi_S| \leq 2|f_k - \chi_S|$$

abgeschätzt und die Behauptung folgt.
(2) Sei χ_{S_k} wie im ersten Teil. Dann gibt es eine Nullmenge N, so daß

$$\chi_{S_k}(x) \to \chi_S(x), k \to \infty, x \notin N.$$

Mit

$$E' = \bigcap_j \bigcup_{i \geq j} S_i \in \mathcal{B}_1$$

ist dann

$$S \setminus N = \bigcap_j \bigcup_{i \geq j} S_i \setminus N.$$

(3) Wir setzen

$$\mathcal{Z} = \{A \subset \Omega \mid \chi_{S \cap A} \in L(\mu, \mathbb{R})\}.$$

Dann ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}$, denn ist $A \subset \mathcal{B}$ und χ_{S_k} wie in (1), so ist

$$|\chi_{S_k \cap A} - \chi_{S_l \cap A}| \leq |\chi_{S_k} - \chi_{S_l}|$$

und damit $\{\chi_{S_k \cap A}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L(\mu, \mathbb{R})$. Da $\chi_{S_k} \to \chi_S$ μ-fast überall (zumindest für eine Teilfolge, zu der wir o.B.d.A. übergegangen sind), folgt auch $\chi_{S_k \cap A} \to \chi_{S \cap A}$ μ-fast überall. Dann ist aber auch $\chi_{A \cap S} \in L(\mu, \mathbb{R})$, d.h. $A \in \mathcal{Z}$.

Sind nun $S_1, S_2 \in \mathcal{B}_1$, so ist $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{B}_1$. Um dies einzusehen, betrachten wir $S_{ik}, i = 1, 2, k \in \mathbb{N}$ mit

$$\chi_{S_{ik}} \to_{L(\mu, \mathbb{R})} \chi_{S \cap S_i}.$$

Aufgrund der obigen Überlegungen kann man zu einer μ-fast überall konvergenten Teilfolge übergehen, so daß also gilt

$$\chi_{S_{ik}} \to \chi_{A \cap S_i} \ \mu\text{-fast überall} .$$

Dann konvergiert aber auch

$$\chi_{S_{1k} \cap S_{2k}} \to \chi_{A \cap S_1 \cap S_2}$$

μ-fast überall. Also ist $\chi_{A \cap S_1 \cap S_2} \in L(\mu, \mathbb{R})$, also $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{Z}$.

Nun betrachten wir zu $S \in \mathcal{Z}$ die Menge $S^c = A \setminus S$ und wollen zeigen $S^c \in \mathcal{Z}$. Nun ist

$$\chi_{S^c} = \chi_A - \chi A \cap S \in L(\mu, \mathbb{R}).$$

Schließlich betrachten wir eine aufsteigende Folge $S_i \in \mathcal{Z}$. Zu zeigen ist

$$S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \in \mathcal{Z}.$$

Es ist $\chi_{A \cap S} \leq \chi_A \in L(\mu, \mathbb{R})$. Damit ist $\chi_{A \cap S} \in L(\mu, \mathbb{R})$. Also ist $\mathcal{Z}$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{B}$ umfaßt und damit ist $\mathcal{Z} \subset \mathcal{B}_1$. □

Definition 3.4.29

Wir führen die Menge

$$\mathcal{A} = \left\{ S \in \Omega \,\middle|\, \exists S' \in \mathcal{B}_1 : \ \chi_S = \chi_{S'} \right\}$$

ein und definieren darauf

$$\bar{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty] : S \mapsto \begin{cases} \int\limits_{\Omega} \chi_S d\mu, & \text{falls } \chi_{S \cap A} \in L(\mu, \mathbb{R}) \ \forall A \in \mathcal{B}_1 \\ \\ \infty, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

3.4.8 Maße, Maßräume und Meßbarkeit

Definition 3.4.30

Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum, *falls $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω ist und μ ein* Maß *ist, d.h. μ ist endlich additiv und σ-additiv in dem Sinne, daß für disjunkte Mengen $S_i \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i).$$

Eine Menge $S \subset \Omega$ heißt meßbar, *falls $S \in \mathcal{A}$. Das Maß heißt* vollständig, *falls $S \subset N$, $\mu(N) = 0$ impliziert, daß $S \in \mathcal{A}$.*

Lemma 3.4.31
$\bar{\mu}$ ist eine Erweiterung des Maßes μ von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{A}$ und $\{\Omega, \mathcal{A}, \bar{\mu}\}$ ist ein vollständiger Maßraum. Ferner gilt

N ist genau dann eine μ-Nullmenge, falls $N \in \mathcal{A}$ mit $\bar{\mu}(N) = 0$.

Beweis. Sei $S \in \mathcal{B}$. Ist $\bar{\mu}(S) = \infty$, so ist auch $\mu(S) = \infty$. Für $\bar{\mu} < \infty$ hat man zunächst $\mu(S) = \mu^*(S)$, und wegen **(L3)** gilt für jedes $0 < \varepsilon < 1$

$$\varepsilon \mu^*(S) \leq \int_\Omega \chi_S \, d\mu,$$

zusammen also

$$\mu(S) = \mu^*(S) \leq \int_\Omega \chi_S \, d\mu = \bar{\mu}(S) < \infty.$$

Ist $\mu(S) < \infty$, so $\chi_{S \cap A} \in L(\mu, \mathbb{R})$ für alle $A \in \mathcal{B}_1$ wegen Lemma 3.4.28 (3). Daher gilt dies auch für alle $A \in \mathcal{A}$. Da $\chi_S \in T(\mu, \mathbb{R})$ ist $\bar{\mu}(S) = \mu(S)$ nach **(L1)**. Daher ist $\bar{\mu}$ eine Erweiterung von μ. Da $\mathcal{B}_1$ eine σ-Algebra ist und da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Ist N eine μ-Nullmenge, so ist

$$\chi_N = \chi_\emptyset = 0 \ \mu - \text{fast überall},$$

und damit $N \in \mathcal{A}$ und $\chi_N = 0 \in L(\mu, \mathbb{R})$. Also ist

$$\bar{\mu}(N) = \int_\Omega \chi_N \, d\mu = 0.$$

Für die Umkehrung sei $N \in \mathcal{A}$ und $\bar{\mu}(N) = 0$. Also gilt

$$0 = \bar{\mu}(N) = \int_\Omega \chi_N \, d\mu \geq \mu^*(N).$$

Daher ist N eine μ-Nullmenge. Da Teilmengen von μ-Nullmengen wieder μ-Nullmengen sind, ist damit die *Vollständigkeit des Maßes* gezeigt.

Als nächstes zeigen wir die Additivität des Maßes $\bar{\mu}$.
Dazu seien $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$ disjunkt mit $\bar{\mu}(S_i) < \infty$. (Ist $\bar{\mu}(S_i) = \infty$, so ist $S_1 \cup S_2 \supset S_i$ und $\bar{\mu}(S_1 \cup S_2) = \infty$ und wir haben $\bar{\mu}(S_1 \cup S_2) = \bar{\mu}(S_1) + \bar{\mu}(S_2) = \infty$. Beachte die Monotonie des Integrals in der Funktion, wende dies auf charakteristische Funktionen an, nutze solche, so daß $\chi_{S_i} = \chi_{S_i'}$ μ-fast überall!) Sei $B \in \mathcal{B}_1$, dann ist $S_i \cap B \in \mathcal{B}_\infty$ und $S_1 \cup S_2 \cap B \in \mathcal{B}_1$ und es gilt

$$\chi_{S_1 \cup S_2 \cap B} = \chi_{S_1 \cap B} + \chi_{S_2 \cap B}.$$

Wegen der Additivität des Integrals in $L(\mu, X)$ folgt die Behauptung, d.h.

$$\bar{\mu}(S_1 \cup S_2) = \bar{\mu}(S_1) + \bar{\mu}(S_2).$$

Wir kommen zur σ-Additivität von $\bar{\mu}$. Es seien $S_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ disjunkt. Setze $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$. Ist $\bar{\mu}(S) < \infty$, so ist für jedes $A \in \mathcal{B}_1$ die Funktion $\chi_{S \cap A} \in L(\mu, \mathbb{R})$. Wegen $S_i \subset S$ und $A \cap S_i \subset A \cap S$ folgt auch $0 \leq \chi_{S_i \cap A} \leq \chi_{S \cap A}$ und $\chi_{S_i \cap A} \in L(\mu, \mathbb{R})$ und daher $\bar{\mu}(S_i) < \infty$ für alle i. Insbesondere hat man

$$\sum_{i \leq k} \bar{\mu}(S_i) = \int_\Omega \chi_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k} \leq \bar{\mu}(S) < \infty.$$

Damit ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(S_i)$$

konvergent und kleiner oder gleich $\bar{\mu}(S)$. Für die Umkehrung nehmen wir an, daß die Reihe konvergent sei. Für $A \in \mathcal{B}_1$ gilt dann

$$\chi_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k \cap A} \nearrow \chi_{S \cap A}$$

für $k \to \infty$. Wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz ist dann $\chi_{S \cap A} \in L(\mu, R)$ und

$$\bar{\mu}(S) = \int_\Omega \chi_S \, d\mu \leq \lim_{k \to \infty} \chi_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(S_i).$$

$\square$

Beispiel 3.4.32
Hier sind zwei Beispiele für Maßräume.

1. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_0$ sei wie zuvor die Menge der endlichen Vereinigungen von halboffenen Quadern mit dem additiven Maß μ_0. Dann ist das zugehörige Maß $\bar{\mu}_0$ auf $\mathcal{A}$ das Lebesgue-Maß. Die Algebra $\mathcal{A}_0$ besteht aus den Lebesgue-Nullmengen und den Borelmengen. Die Borelalgebra ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen umfaßt. Die Elemente der Borelalgebra nennt man Borelmengen.

2. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A}_0$ die Lebesgue-Algebra. Das *Dirac-Maß*[5] δ_{x_0}, das im Punkt x_0 konzentriert ist, hat die Eigenschaft

$$\delta_{x_0}(S) = 1 \text{ genau dann, wenn } x_0 \in S,$$

ansonsten ist $\delta_{x_0}(S) = 0$.

Lemma 3.4.33
Sei $f \in L(\mu, X)$. Dann gilt:

1. *Für $S \in \mathcal{A}$ ist $\chi_S f \in L(\mu, X)$.*

2. *Setze*

$$\nu(S) = \int_S f \, d\mu = \int_S \chi_E f \, d\mu,$$

für $A \in \mathcal{B}_1$. Dann ist ν σ-additiv (mit Werten in X). Es gilt

$$\|\nu(S)\|_X \to 0 \text{ für } \mu(S) \to 0.$$

Beweis. Zu 1.) Wähle Treppenfunktionen f_k mit $f_k \to f$ in $L(\mu, X)$. Ist dann $S' \in \mathcal{B}_1$ mit $\chi_S = \chi_{S'}$ μ-fast überall, so ist $\chi_{S'} f \in L(\mu, X)$. Dann gilt dies aber auch für $\chi_S f$. Wegen

$$|\chi_S f_k - \chi_S f_l| \leq |f_k - f_l|$$

bildet $\{\chi_S f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L(\mu, X)$. Wegen der Vollständigkeit ist der Grenzwert in $L(\mu, X)$. Da $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ μ-fast überall gegen f konvergiert, gilt dies auch für $\chi_S f_k \to \chi_S f$. Also ist $\chi_S f$ der Grenzwert und in $L(\mu, X)$.

[5]Paul Adrienne Maurice Dirac (8.8.1902-20.101984) lehrte als Physiker in Cambridge (1932-1969). Er lieferte grundlegende Beiträge zur Quantenmechanik und Quantenelektrodynamik, erhielt 1933 mit Schrödinger den Nobelpreis für Physik. Die von ihm eingeführte und nach ihm benannte δ-Funktion wurde erst später im Rahmen der Distributionstheorie mathematisch rigoros begründet.

Zu 2.) Zunächst folgt die Additivität sofort aus der Additivität des Integrals. Wir beachten, daß es zum Beweis der σ-Additivität ausreicht zu zeigen, daß für eine aufsteigende Familie von Mengen $S_i \subset S_{i+1}$, $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ gilt $\nu(S_i) \to \nu(S)$. Wir haben

$$\lim_{i \to \infty} \chi_{S_i} f = \chi_S f$$

punktweise und

$$\int\limits_{S_i} |f| \, d\mu \leq \int\limits_{S} |f| \, d\mu < \infty.$$

Ist nun $i < j$, so gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} |\chi_{S_j} f - \chi_{S_i} f| \, d\mu &= \int\limits_{S_j \setminus S_i} |f| \, d\mu \\ &= \int\limits_{\Omega} |\chi_{S_j} f| \, d\mu - \int\limits_{\Omega} |\chi_{S_i} f| \, d\mu \end{aligned}$$

Dies konvergiert gegen null für $i, j \to \infty$, da die Folge $\{\int\limits_{S_i} |f| \, d\mu\}_{j \in \mathbb{N}}$ monoton nichtfallend und beschränkt, also konvergent ist. Also konvergiert $\{\chi_{S_k} f\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $\chi_S f$ in $L(\mu, X)$, also wie behauptet $\nu(S_i) \to \nu(S)$.

Es bleibt die behauptete Konvergenzeigenschaft zu zeigen. □

Definition 3.4.34
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : \Omega \to X$ heißt meßbar, *falls*

1. *Urbilder offener Mengen in X meßbar sind, und*

2. *es eine Nullmenge N gibt, so daß $f(\Omega \setminus N)$ separabel ist.*

Bemerkung 3.4.35
Ist X separabel, so ist die zweite Bedingung hinfällig.

Definition 3.4.36

1. *Ist (Y, d) ein metrischer Raum, so nennt man die kleinste σ-Algebra, welche alle offenen Mengen enthält,* Borelalgebra *und ihre Elemente* Borelmengen.

2. *Ist $\phi : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine Abbildung, so daß das Urbild offener Mengen jeweils eine Borelmenge ist, so nennt man ϕ eine* Borelfunktion.

Lemma 3.4.37
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum und $f : \Omega \to X$ meßbar, dann gilt:

1. *Ist Y ein Banachraum, $\varphi : X \to Y$ eine Borelfunktion, so ist $\varphi \circ f$ meßbar.*

2. *Ist $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine μ-fast überall gegen f konvergente Folge meßbarer Funktionen, so ist f meßbar.*

3. *Ist $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen, so ist $\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j$ und $\liminf_{j\to\infty} f_j$ meßbar.*

Beweis. (1) ist klar.
(2) Sei $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ für $x \in \Omega \setminus N$, wobei N so gewählt sei, daß $\mu(N) = 0$ ist und $f_j(\Omega \setminus N)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ separabel ist. Ist nun $U \subset X$ offen, so setzen wir

$$U_i = \left\{ x \in U \;\middle|\; B_{\frac{1}{i}}(x) \subset U \right\}.$$

Dann hat man für $x \in \Omega \setminus N$

$$f(x) \in U \iff \text{es gibt } i, k \text{ mit } f_j(x) \in U_i \text{ für alle } j \geq k.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$f^{-1}(U) \setminus N = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\geq k} f_j^{-1}(U_i) \setminus N.$$

Diese Menge ist in $\mathcal{A}$ und

$$f(\Omega \setminus N) \subset \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} f_j(\Omega \setminus N)}.$$

Und dies ist separabel.
(3) Ist fast trivial! $\square$

Satz 3.4.38
(Egorov)[6] *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum wie zuvor, $\mu(\Omega) < \infty$. Es seien $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen und f meßbar. Dann sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert μ-fast überall gegen f.*

2. *$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert μ-gleichmäßig gegen f, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge S_ε mit $\mu(\Omega\setminus S_\varepsilon) < \varepsilon$ und $\{f_{j|S_\varepsilon}\}_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f_{|S_\varepsilon}$.*

Beweis. Wir beginnen mit (2) $\Rightarrow$ (1). Betrachte $S_{\frac{1}{n}}$ und $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{\frac{1}{n}}$. Dann ist $\mu(\Omega \setminus S) = 0$. Für $x \in S$ konvergiert $f_j(x) \to f(x)$.

Wir kommen zu (1) $\Rightarrow$ (2). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $S \in \mathcal{A}$ mit $\mu(\Omega\setminus S) = 0$ und $f_j(x) \to f(x)$ für $x \in S$. Setze

$$S_{k,n} = \left\{ x \in S \;\middle|\; |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ für } j \geq k \right\}.$$

Dann ist $S_{k,n} \in \mathcal{A}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\bigcup_k S_{k,n} = S \text{ und } S_{k,n} \subset S_{k+1,n}.$$

Daher gibt es ein k_n mit

$$\mu(S \setminus S_{k_n,n}) \leq 2^{-n}.$$

Sei dann

$$E_\varepsilon = \bigcap_n S_{k_n,n}.$$

Es ist $\mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ und auf E_ε konvergiert f_j für $j \to \infty$ gleichmäßig gegen f. $\square$

Lemma 3.4.39
Wir haben:

1. *Ist $f \in L(\mu, X)$, so ist f meßbar.*

[6] Dimitri Fedorowitsch Egorov (22.12.1869-10.9.1931) arbeitete über Differentialgeometrie, Integralgleichungen und Variationsrechnung. Der hier angegebene Satz begründete eine Moskauer Schule zur Untersuchung von Funktionen reeller Veränderlicher.

2. *Ist $g \in L(\mu, \mathbb{R}), f : \Omega \to X$ meßbar, $|f| \leq g$ μ-fast überall, so ist $f \in L(\mu, X)$.*

Bemerkung 3.4.40
Die zweite Aussage in Lemma 3.4.39 bezeichnet man als Majorantenkriterium.

Beweis. (1) Seien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ Treppenfunktionen mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L(\mu,X)} = 0.$$

Dann gibt es eine μ-fast überall konvergente Teilfolge. Jedes Element dieser Teilfolge ist meßbar, somit auch f, nach Lemma 3.4.37 Teil (2).
(2) Wir beginnen mit dem Fall $X = \mathbb{R}^m$. Sei N eine Nullmenge, so daß außerhalb N gilt $|f| \leq g$. Zu gegebenem $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine endliche Überdeckung S_j^k $j = 1, \dots, r_k$ von $S^{m=1} = \left\{x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \|x\|_{\mathbb{R}^m} = 1\right\}$ mit disjunkten Borelmengen, welche einen Durchmesser von weniger als $\frac{1}{k}$ besitzen. (Eine solche Überdeckung ist möglich!) Wähle $\alpha_j^k \in S_j^k$ und eine Nullmenge N mit $|f(x)| \leq |g(x)|$ für $x \notin N$. Für $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, j_k$ betrachten wir

$$S_{ij} = \left\{x \in \Omega \setminus N \;\middle|\; f(x) \neq 0, \frac{i-1}{k} < \frac{|f(x)|}{g(x)} \leq \frac{i}{k}, \frac{f(x)}{|f(x)|} \in S_j\right\}.$$

Nun sind f, g meßbar und damit $S_{ij} \in \mathcal{A}$. Setze

$$f_k = \sum_{i,j} \frac{i-1}{k} \chi_{S_{ij}} g \alpha_j.$$

Dann ist fast überall $|f(x) - f_k(x)| \leq \frac{2}{k} g(x)$, denn für $x \in S_{ij}$ gilt

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &= \left|\frac{i-1}{k} g(x) \left(\alpha_j - \frac{f(x)}{|f(x)|}\right)\right| \\ &\quad + \left|\left(\frac{i-1}{k} - \frac{|f(x)|}{g(x)}\right) g(x) \frac{f(x)}{|f(x)|}\right|. \end{aligned}$$

Nun ist $\chi_{S_{ij}} g \in L(\mu, \mathbb{R})$ und damit

$$\int_\Omega |f_k - f_l| \, d\mu \leq \int_\Omega \left(\frac{2}{k} + \frac{2}{l}\right) g \, d\mu \to 0 \text{ für } k, l \to \infty.$$

Da $f_k \to f$ fast überall folgt die Behauptung aus Satz 3.4.26 zweiter Teil.

Der Fall eines allgemeinen Banachraumes wird auf diesen Fall zurückgeführt. $\square$

Lemma 3.4.41 (Fatou)
[7] *Ist* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L(\mu, \mathbb{R})$ *eine Folge von Funktionen mit*

1. $f_j \geq 0$ *μ-fast überall für alle* j *und*
2. $$\int\limits_\Omega f_j \, d\mu \leq C < \infty$$

   für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$,

so ist $\liminf_{j\to\infty} f_j \in L(\mu, \mathbb{R})$ *und es gilt*

$$\int\limits_\Omega \liminf_{j\to\infty} f_j \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int\limits_\Omega f_j \, d\mu.$$

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ und

$$g_k = \inf_{i\geq k} f_i.$$

Dann hat man fast überall

$$0 \leq g_k \leq f_j, \text{ für alle } j \geq k.$$

Dann ist g_k meßbar und integrierbar und es gilt

$$\int\limits_\Omega g_k \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int\limits_\Omega f_j \, d\mu \leq C < \infty.$$

Die Folge der g_k ist nicht fallend in k (fast überall) und daher gilt das gleiche für die Integrale. Dann ist für $k < l$

$$\int\limits_\Omega |g_k - g_l| \, d\mu = \int\limits_\Omega g_l \, d\mu - \int\limits_\Omega g_k \, d\mu \to 0 \text{ für } k, l \to \infty.$$

[7] Pierre Joseph Louis Fatou (28.2.1878-9.8.1929) arbeitete am Observatorium in Paris. Neben seinen Forschungen auf dem Gebiet der Astronomie arbeitete er an etlichen mathematischen Fragen und schrieb Arbeiten zur Funktionentheorie, Differentialgleichungen, numerische Verfahren und natürlich stammt von ihm dieses bedeutende Lemma aus der Integrationstheorie.

Es gilt aber punktweise

$$\liminf_{j\to\infty} f_j = \liminf_{k\to\infty} g_k$$

und damit folgt die Behauptung. $\square$

Satz 3.4.42 (Lebesgue)
Sei $g \in L(\mu, \mathbb{R})$, $f_j, f : \Omega \to Y$ meßbar. Aus

$$|f_j| \leq g \text{ für alle } j,\ \mu\text{-fast überall und} f = \lim_{j\to\infty} f_j$$

folgt $f_j, f \in L(\mu, \mathbb{R})$ und

$$\int_\Omega |f_j - f|\, d\mu \to 0 \text{ für } j \to \infty.$$

Beweis. Fast überall ist $|f| \leq g$ und daher $f_j, f \in L(\mu, \mathbb{R})$. Setze

$$g_j = g - \frac{1}{2}|f_j - f|.$$

Dann ist fast überall $0 \leq g_j \leq g$ und daher

$$\int_\Omega g_j\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu < \infty.$$

Nun konvergiert g_j fast überall gegen g und mit dem Lemma von Fatou gilt

$$\int_\Omega g\, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega g_j\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu - \frac{1}{2} \limsup_{j\to\infty} \int_\Omega |f_j - f|\, d\mu.$$

Insbesondere folgt

$$\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega |f_j - f|\, d\mu = 0.$$

$\square$

3.5 Der Dualraum zu $C([0,1],\mathbb{R})$

In diesem letzten Abschnitt des dritten Kapitels wollen wir den Dualraum von $C([0,1],\mathbb{R})$ bestimmen. Wir hatten bereits mehrere Beispiele von linearen Funktionalen auf diesem Raum gesehen. Diese waren sehr unterschiedlicher Natur: die Auswertung an Punkten, das Integral, in den Übungen hatten wir gesehen, daß beide Typen von Funktionalen auf einheitliche Weise als Riemann-Stieltjes Integral mit Funktionen aus $BV([0,1])$ aufgefaßt werden können. Für die Konstruktion benötigen wir den Raum L^∞, den wir zunächst einführen wollen. Entsprechend der obigen Konstruktion definieren wir

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \;\middle|\; f \text{ ist meßbar und } \|f\|_{L^\infty} < \infty \right\},$$

wobei

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf_{\{N \,\mid\, \mu(N)=0\}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|$$

Durch Übergang zu Äquivalenzklassen bezüglich der Relation

$$f \equiv g \iff f = g\mu\text{-fast überall}$$

erhalten wir einen normierten linearen Raum. Wir zeigen zunächst

Satz 3.5.1
$(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Beweis. Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann gibt es eine Nullmenge N und eine positive Konstante C, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \Omega \setminus N$ gilt

$$|f_k(x)| \le \|f_k\|_\infty \le C$$

und

$$|f_k(x) - f_l(x)| \le \|f_k - f_l\|_\infty.$$

Also ist für $x \in \Omega \setminus N$ $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_k(x) & \text{für } x \in \Omega \setminus N \\ 0 & \text{für } x \in N \end{cases}$$

existiert. f ist meßbar, nach Lemma 3.4.37 (2) und natürlich (durch C) μ-fast überall beschränkt. Wir müssen noch zeigen, daß f auch in der Norm von

L^∞ der Grenzwert der Folge $\{f_k\}_{k\in N}$ ist. Sei $x \in \Omega \setminus N$, $\varepsilon > 0$ und $l = l(\varepsilon, x)$, so daß $|f(x) - f_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist für $l > l(\varepsilon, x)$

$$|f(x)-f_k(x)| = |f(x)-f_l(x)|+|f_l(x)-f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+|f_l(x)-f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\|f_l-f_k\|_\infty.$$

Dies wird unabhängig von $x \in \Omega$ klein, solange nur k, l hinreichend groß sind. □

Satz 3.5.2

1. *Zu jedem stetigen linearen Funktional x^* auf $C([0,1],\mathbb{R})$ gibt es ein $g \in BV([0,1])$ mit*
$$x^*(f) = \int_0^1 f(s)dg(s).$$

2. *Auf $BV([0,1])$ führen wir eine Äquivalenzrelation ein: $g_1 \sim g_2$ falls $g_1(s) = g_2(S)$ an allen Stellen $s \in [0,1]$ mit g_1 ist stetig oder g_2 ist stetig in s. Ist $g_1 \sim g_2$, so ist*
$$\int_0^1 f\ dg_1 = \int_0^1 f\ dg_2$$
für alle $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.

3. *Setze $BV_0([0,1]) = (BV([0,1]) \cap f|f = 0/\sim$. Dann existiert ein Norm auf $BV_0([0,1])$, welche $BV_0([0,1])$ zum Banachraum macht, so daß ein (toplinearer) Isomorphismus $L : C([0,1],\mathbb{R})^* \to BV_0([0,1])$ existiert mit*
$$x^*(f) = \int_0^1 f\ dLx^*.$$

Für den Beweis benötigen wir noch zwei Hilfsaussagen, die wir zunächst bereitstellen.

Lemma 3.5.3

1. *Ist $g \in BV([a,b])$ in $c \in [a,b]$ stetig, so ist die Funktion $x \mapsto V_a^x$ in c stetig.*

2. *Sind $g_1, g_2 \in BV([a,b])$ mit $g_1(a) = g_2(a) = 0$, so daß*

$$\int_a^b f\, dg_1 = \int_a^b f\, dg_2$$

für alle $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, dann folgt aus g_1 und g_2 sind beide in x_0 stetig, daß $g_1(x_0) = g_2(x_0)$.

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\xi = \{a = \xi_0 < \ldots < x_n = b\}$ eine Zerlegung mit

$$V_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=0}^{n-1} |g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)| \leq V_a^b g.$$

Für jede Verfeinerung bleibt diese Ungleichung richtig, wir setzen für eine Zerlegung ξ

$$V^\xi g = \sum_{i=0}^{n-1} |g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)|.$$

Für jedes $\delta > 0$ (hinreichend klein, d.h. $c + \delta < b$) gilt

$$V_c^{c+\delta} g \leq V_a^b g.$$

Setze $\xi_\delta = (\xi \cap [c, c+\delta]) \cup \{c, c+\delta\}$ und $\xi^\delta = \xi \cup \{c, c+\delta\}$. Dann ist

$$V_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} < V^{\xi^\delta} g \leq V_a^b g.$$

Wähle zu $\tilde{\varepsilon} > 0$ $0 < \tilde{\delta} \leq \delta$ mit

$$|g(x) - g(c)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \text{ falls } |c - x| < \tilde{\delta}.$$

Dann ist

$$V^{\xi_\delta} g \leq |\xi_\delta| \tilde{\varepsilon}.$$

Wählt man $\tilde{\varepsilon}$ hinreichend klein, so ist

$$V^{\xi_\delta} g < \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit

$$V_c^{c+\tilde{\delta}} g < \varepsilon.$$

(2) Seien $g_1, g_2 \in BV([a,b])$ gegeben mit $g_1(a) = g_2(a) = 0$ und

$$\int_a^b f\ dg_1 = \int_a^b f\ dg_2$$

für alle $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Sei $x_0 \in C_1 \cap C_2$ wobei C_i die Menge der Stetigkeitspunkte von g_i ist. Zu zeigen ist $g_1(x_0) = g_2(x_0)$. Betrachte f_n mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } a \leq x \leq x_0 \\ 0, & \text{für } x_0 + \frac{1}{n} \leq x \leq b \\ 1 - n(x - x_0), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\int_a^b f_n\ dg_i = g_i(x_0) + r_i$$

mit

$$|r_i| \leq V_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} g_i \sup_{x \in [x_0, x_0+\frac{1}{n}]} |f(x)| = V_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} g_i \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

wegen (1). Daraus folgt die Behauptung. □

Beweis zu Satz 3.5.2: (1) $C([0,1],\mathbb{R})$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^\infty([0,1])$, daher gibt es zu gegebenem Funktional $x^* \in C([0,1],\mathbb{R})^*$ ein Funktional $\Phi \in L^\infty([0,1])^*$ mit

$$\Phi(f) = x^*(f), \text{ für alle } f \in C([0,1],\mathbb{R}), \text{ und } \|\Phi\|_{L^\infty([0,1])^*} = \|x^*\|_{C([0,1],\mathbb{R})^*}.$$

Sei nun $\psi_t \in L^\infty([0,1])$ gegeben durch

$$\psi_t(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq t \\ 0, & t < s \leq 1. \end{cases}$$

Wir setzen

$$g(t) = \Phi(\psi_t).$$

Es ist $\psi_0 = 0$ und $g(0) = \Phi(\psi_0) = \Phi(0) = 0$. Wir zeigen nun $g \in BV([0,1])$ und $V(g) \leq x^*$. Sei $0 = x_0 < x_1 \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = 1$, setze $s_i = \operatorname{sgn}(g(x_i) - g(x_{i-1})$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1}| \quad = \quad \sum_{i=1}^n s_i(g(x_i) - g(x_{i-1})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} s_i \left(\Phi(\psi_{x_i}) - \Phi(\psi_{x_{i-1}})\right) \\ &= \Phi(\psi), \end{aligned}$$

wobei

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} s_i \left(\Phi(\psi_{x_i}) - \Phi(\psi_{x_{i-1}})\right)$$

. Da $\|\psi\|_\infty = 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1}| \leq \|Phi\|_{L^\infty([0,1])^*} \|\psi\|_\infty = \|Phi\|_{L^\infty([0,1])^*} = \|x^*\|_{C([0,1],\mathbb{R})^*}.$$

Damit ist

$$V_0^1 g \leq \|x^*\|_{C([0,1],\mathbb{R})^*}. \tag{3.2}$$

Wir wählen nun ein $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ und definieren

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(\psi_{\frac{k}{n}}(t) - \psi_{\frac{k-1}{n}}(t)\right).$$

Nun ist $f(t) - f_n(t) = f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)$, wobei k so gewählt ist, daß $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf dem Intervall $[0,1]$ geht dies gegen null, es gilt sogar

$$\|f - f_n\|_\infty \to 0, \text{ mit } n \to \infty.$$

Also gilt

$$x^*(f) = \Phi(f) = \Phi(\lim_n f_n) = \lim_n \Phi(f_n).$$

Für $\Phi(f_n)$ ergibt sich

$$\Phi(f_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(\Phi(\psi_{\frac{k}{n}})\right) - \left(\Phi(\psi_{\frac{k-1}{n}})\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

Der rechte Ausdruck konvergiert gegen

$$\int_0^1 f\, dg.$$

Damit ist

$$x^*(f) = \int_0^1 f\ dg.$$

Dann folgt aber

$$|x^*(f)| = \left|\int_0^1 f\ dg\right| \leq \|f\|_\infty V_0^1 g.$$

Damit folgt $\|x^*\|_{C([0,1],\mathbb{R})^*} \leq V_0^1 g$ und mit Gleichung(3.2) folgt die Gleichheit.
(2) Angenommen g ist von beschränkter Variation. Dann kann g als Differenz zweier monoton nicht fallender Funktionen geschrieben werden, nämlich

$$g(t) = V_0^t + (g(t) - V_0^t).$$

Da monotone Funktionen überall bis auf eine abzählbare Menge stetig sind, gilt dies auch für Funktionen von beschränkter Variation. Dann ist aber $g_1 = g_2$ fast überall und die Integrale sind gleich.
(3) Jeder Äquivalenzklasse kann auf diese Weise ein stetiges lineares Funktional auf $C([0,1],\mathbb{R})$ zugeordnet werden. Wir schreiben $[g]$ für die Äquivalenzklasse von g und $\ell[g]$ für das zugeordnete Funktional. Dann gibt es nach Teil (1) zu $\ell[g]$ eine Funktion $\tilde{g} \in BV([0,1])$ mit

$$\ell[g](f) = \int_0^1 f\ d\tilde{g}$$

und $V_0^1\tilde{g} = \|x^*\|_{C([0,1],\mathbb{R})^*}$. Dann sind g und $\tilde{g}$ im Sinne unserer Relation äquivalent und es gilt

$$\|x^*\|_{C([0,1],\mathbb{R})^*} = \sup_{\|f\|_\infty = 1, f\in C([0,1],\mathbb{R})} \left|\int_0^1 f\ dg\right| \leq V_0^1 g.$$

Damit ist $V_0^1\tilde{g} \leq V_0^1 g$. Da dies für alle $g' \in [g]$ richtig bleibt, es eine entsprechende Norm auf $BV_0([0,1])$ zu definieren. Wir setzen

$$\|[g]_{BV_0([0,1])} = \min_{g'\in[g]} V_0^1 g' = \liminf g' \in [g] V_0^1 g'.$$

Dies definiert eine Norm mit allen gewünschten Eigenschaften. $\square$

3.6 Die Räume $L^p(\Omega)$

Es sei $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum. Wir führen für $1 \leq p < \infty$ den Raum

$$\mathcal{L}^p(\Omega, X) = \left\{ f : \Omega \to X \,\middle|\, f \text{ ist meßbar und } \int\limits_\Omega \|f\|^p d\omega \text{ existiert.} \right\}$$

ein. Mit

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,X)} = \left(\int\limits_\Omega \|f\|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

definieren wir eine Abbildung $\mathcal{L}^p(\Omega, X) \to \mathbb{R}_+$. Ist $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$ eine Norm auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$? Die offenkundige Antwort lautet „nein": ist $N \subset \Omega$ eine Nullmenge und

$$f : \Omega \to \mathbb{R} : f(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ falls } \omega \notin N \\ 1 \text{ falls } \omega \in N \end{cases},$$

so ist f meßbar und

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0,$$

aber f ist nicht null.

Man löst dieses Problem, indem man einem geeigneten Faktorraum übergeht. Wir wollen dies auf die einfachst mögliche Weise tun: wir führen die Äquivalenzrelation $f \equiv g$ ein, in dem wir sagen

$$f \equiv g \iff \operatorname{supp}(f - g) \text{ ist Nullmenge} .$$

Wir schreiben $[f]$ für die Äquivalenzklasse von f bezüglich $\equiv$ und

$$L^p(\Omega, X) = \left\{ [f] \,\middle|\, f \in \mathcal{L}^p(\Omega, X) \right\}.$$

Dann wird $(L^p(\Omega, X), \|[f]\|_{L^p(\Omega,X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega,X)}, f \in [f])$ zum normierten Raum. Im weiteren schreiben wir f für $[f]$ und behandeln die Klassen von Funktionen als ob sie Funktionen wären. Diese Ungenauigkeit wird zu keinerlei Problemen führen, vereinfacht aber die Schreibweise doch erheblich. Wir wollen nun nachweisen, daß $L^p(\Omega, X)$ ein normierter Raum ist, dazu benötigen wir die Dreiecksungleichung. Dazu ein Lemma.

Lemma 3.6.1
Für $a, b \geq 0$, $p, q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

gilt:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$f(a,b) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$

Man sieht sofort $f(0,0) = 0$ und $f(0,b) \geq 0$ und $f(a,0) \geq 0$. Es ist $\max\{p,q\} \geq 2$ (Gleichheit genau dann wenn $p = q = 2$, aber dann ist unsere Ungleichung trivial.) Ist $\max\{p,q\} > 2$ so ist f für $(a,b) \to \infty$ unbeschränkt. Also folgt aus der Existenz negativer Werte, daß ein lokales Minimum im positiven Quadranten existiert. Dort verschwindet der Gradient, also

$$0 = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} a^{p-1} - b \\ b^{q-1} - a \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet aber $0 = (a^{p-1})^{q-1} - a)$ oder

$$a\left(a^{(p-1)(q-1)-1} - 1\right) = 0.$$

Dies ist wegen

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 = \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p}$$

und damit

$$q = \frac{p}{p-1}$$

oder

$$q(p-1) = p \tag{3.3}$$

oder

$$(q-1)(p-1) = q(p-1) - (p-1) = p - (p-1) = 1$$

für alle a erfüllt mit $b = a^{p-1}$. Dann ergibt sich für f unter Beachtung von (3.3)

$$f(a, a^{p-1}) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^{(p-1)q}}{q} - aa^{p-1} = a^p\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{a^p}{q} = -\frac{a^p}{q} + \frac{a^p}{q} = 0.$$

Daher ist $f \geq 0$. $\square$

Lemma 3.6.2 (Hölder)
[8] *Es seien* $p, q \in [1, \infty]$ *mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Für $f \in L^p(\Omega,\ g \in L^q(\Omega)$ *gilt dann* $fg \in L(\mu, \mathbb{K})$ *und es gilt*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^-(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Aufgabe 3.6.3
Man verallgemeinere das Lemma 3.6.2 auf eine beliebige endliche Anzahl von Faktoren.

Beweis von Lemma 3.6.2: fg ist meßbar. Wir betrachten vorneweg die speziellen Fälle $p = 1, q = \infty$ und umgekehrt. Dann ist

$$|f(x)g(x)| \leq \|g\|_\infty |f(x)| \ \mu\text{-fast überall},$$

und es folgt die Behauptung unmittelbar. Ist eine der beiden Funktionen null μ-fast überall, so ist die Behauptung auch unmittelbar klar. Wir betrachten also den Fall $1 < p < \infty$ und $\|f\|_{L^p(\Omega,X)} > 0$ und $\|g\|_{L^q(\Omega,X)} > 0$. Wir setzen

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega,X)}},\ b = \frac{|f(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega,X)}}$$

und erhalten mit Lemma 3.6.2

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega,X)}\|g\|_{L^q(\Omega,X)}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_{L^p(\Omega,X)}} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_{L^q(\Omega,X)}}.$$

Die rechte Seite ist integrierbar, damit ist $fg \in L(\mu, \mathbb{K})$ und die Integration beider Seiten ergibt

$$\frac{\int\limits_\Omega |fg|\ d\mu}{\|f\|_{L^p(\Omega,X)}\|g\|_{L^q(\Omega,X)}} \leq \frac{1}{p}\frac{\int\limits_\Omega |f|^p\ d\mu}{\|f\|^p_{L^p(\Omega,X)}} + \frac{1}{q}\frac{\int\limits_\Omega |g|^q\ d\mu}{\|g\|^q_{L^q(\Omega,X)}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

[8] Ludwig Otto Hölder (22.12.1859–29.8.1937) arbeitete an den Universitäten Göttingen, Tübingen und Königsberg. Er trug zu vielen Gebieten der Mathematik bei, im Mittelpunkt seines Werkes steht die Algebra mit Untersuchungen spezieller Gruppen. In der Analysis stammen u.a. Arbeiten zur Potentialtheorie und ein Satz über das Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe wesentlicher Singularitäten von ihm. In der Mechanik führte er das Hamiltonsche Prinzip für nichtholonome Zwangsbedingungen ein.

Lemma 3.6.4
Sei $f : \Omega \to X$ meßbar, $1 \le p < \infty$ und $g \in L(\mu, \mathbb{R})$ mit

$$\|f\|_X^p \le g \ \mu\text{-fast Überall.}$$

Dann ist $f \in L^p(\mu, X)$.

Beweis. Vergleiche den Beweis des Majorantenkriteriums. □

Lemma 3.6.5 (Minkowski)
[9] *Sind $f, g \in L^p(\Omega, X)$ $1 \le p \le \infty$, so ist auch $f + g \in L^p(\Omega, X)$ und es gilt*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega,X)} \le \|f\|_{L^p(\Omega,X)} + \|g\|_{L^p(\Omega,X)}.$$

Beweis. Für $p = 1, \infty$ folgt dies sofort aus der punktweisen Dreiecksungleichung. Bleibt der Fall $1 < p < \infty$. Durch

$$|f + g|^p \le (|f| + |g|)^p \le 2^{p-1} (|f|^p + |g|^p)$$

zeigen wir, daß $|f + g|^p \in L^p(\Omega, X)$. Wir haben punktweise μ-fast überall

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \le |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}.$$

Mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

folgt wegen $q(p - 1) = p$, daß $|f + g|^{p-1} \in L^q(\Omega, X)$ und

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f + g|^p \, d\mu &\le \|f\|_{L^p(\Omega,X)} \||f + g|^{p-1}\|_{L^q(\Omega,X)} + \|g\|_{L^p(\Omega,X)} \||f + g|^{p-1}\|_{L^q(\Omega,X)} \\ &\le \left(\|f\|_{L^p(\Omega,X)} + \|g\|_{L^p(\Omega,X)}\right) \left(\int_\Omega |f + g|^p \, d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Verschwindet das Integral, so ist nichts zu zeigen, anderweitig dividieren wir durch das Integral rechts und erhalten die Behauptung. □

[9]Herrman Minkowski (22.6.1864-12.1.1909) beschäftigte sich bereits als Gymnasiast in Königsberg mit höherer Analysis. Seine akademische Laufbahn wurde durch David Hilbert geprägt. Sein bedeutsames Lebenswerk umfaßt Zahlentheorie, konvexe Geometrie und verschiedene nichteuklidische Geometrien. Nach ihm benannt ist die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt der Relativit'atstheorie, die von einer „indefiniten Metrik“ geprägt ist.

Satz 3.6.6 (Fischer-Riesz)
[10] *$L^p(\Omega, X)$ ist für einen Banachraum X wieder ein Banachraum.*

Beweis. Alle Eigenschaften außer der Vollständigkeit sind klar. Sei also $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, wir müssen zeigen, daß diese Folge in $L^p(\Omega, X)$ konvergiert. Wir wählen eine Teilfolge $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ aus, mit

$$\|f_{k_l} - f_{k_j}\|_{L^p(\Omega,X)} \leq 2^{-i} \text{ für } l, j > i.$$

Dann ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^p(\Omega,X)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1.$$

Setze

$$g_l = \sum_{j=1}^{l} \|f_{k_{1+1}} - f_{k_j}\|_X.$$

Die Lemmata 3.4.41, 3.6.2 implizieren nun

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \lim_{l\to\infty} g_l^p \, d\mu &\leq \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega g_l^p \, d\mu \\
&= \left(\liminf_{l\to\infty} \|g_l\|_{L^p(\Omega,X)}\right)^p \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^p(\Omega,X)}\right)^p \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Damit existiert μ-fast überall der Grenzwert $\lim_{l\to\infty} g_l(x)$ und damit ist $\{f_{k_l}(x)\}_{l\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall eine Cauchyfolge und es existiert μ-fast überall der Grenzwert $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x)$. Wir müssen nun zeigen, daß f der L^p-Grenzwert der Folge ist. Also

$$\int_\Omega \|f - f_k\|_X^p \, d\mu \leq 2^{p-1} \int_\Omega \inf_{k_j > k} \left(\|f - f_{k_j}\|_X^p + \|f_{k_j} - f_k\|_X^p\right) d\mu$$

[10] Ernst Fischer (12.7.1875-14.11.1954) studierte in Wien und Berlin. Er arbeitete bei Minkowski in Zürich und Göttingen. Er war Professor in Brno, Erlangen und Köln. Aufgrund der faschistischen Rassegesetze wurde er vorzeitig in Ruhestand geschickt. Er bewies u.a. die Vollsändigkeit von L^2. Neben der Analysis beschäftigte ersich auch mit Gruppentheorie und anderen algebraischen Fragen.

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad 2^{p-1}\left(\int\limits_{\Omega} \inf_{k_j>k} \|f-f_{k_j}\|_X^p; d\mu + \int\limits_{\Omega} \sup_{k_j>k} \|f_{k_j}-f_k\|_X^p \, d\mu\right) \\
&\leq \quad 0+\varepsilon
\end{aligned}
$$

solange nur k, k_j hinreichend groß sind. □

Aus unseren früheren Betrachten folgen fast direkt die Konvergenzkriterien, die wir nun angeben wollen, die Beweise sind als Übung zu erbringen.

Lemma 3.6.7
Es sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega, X)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. *Ist $f \in L^p(\Omega, X)$ und gilt $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\Omega,X)} = 0$, so gibt es eine Teilfolge $\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, die μ-fast überall gegen f konvergiert.*

2. *Ist $\{f_k\}k \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega, X)$ und $f : \Omega \to X$ ist μ-fast überall Grenzwert der Folge $\{f_k\}k \in \mathbb{N}$, so ist $f \in L^p(\Omega, X)$ und $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\Omega,X)} = 0$.*

Beweis. Folgt sofort aus den früheren Überlegungen. □

Satz 3.6.8 (Vitali)
Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega, X)$ mit $1 \leq p < \infty$. Es gelte $f_k \to f$ μ-fast überall. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1. *$f \in L^p(\Omega, X)$ und $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\Omega,X)} = 0$.*

2. *Ist S_j eine Folge von meßbaren Teilmengen von Ω mit $\lim_{j\to\infty} \mu(S_j) = 0$, so ist*

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{S_j} \|f_k\|_X^p \, d\mu = 0$$

   und zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein S_ε mit $\mu(S_\varepsilon) < \infty$, so daß

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega\setminus S_\varepsilon} \|f_k\|_X^p \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Beweis. Siehe Übungen. □

Satz 3.6.9 (Allgemeiner Lebesguescher Konvergenzsatz)
Es seien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und f meßbare Funktionen $\Omega \to X$ und sei $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L(\mu,\mathbb{R})$ mit $g_k \to_{L(\mu,\mathbb{R})} g$. Aus

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \ \mu\text{-fast überall und } \|f_k\|_X^p \le g_k \ \mu\text{-fast überall, für alle } k \in \mathbb{N}$$

folgt $f_k, f \in L^p(\Omega, X)$ und $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\Omega,X)} = 0$.

Beweis. Siehe Übungen. □

3.7 Soboleväume

3.7.1 Schwache Ableitungen

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $L^1_{loc}(\Omega)$ steht für den Raum aller meßbaren Funktionen $\Omega \to \mathbb{K}$, so daß $u \in L^1(\Omega')$ für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$. Wir nennen diesen Raum den *Raum der lokal integrierbaren Funktionen.* Dabei bedeutet $\Omega' \subset\subset \Omega$, daß der Abschluß von Ω' eine kompakte Teilmenge von Ω ist. In diesem Abschnitt seien alle Funktionen reell, oder komplexwertig, eine Verallgemeinerung auf Banachraumwertige Funktionen wäre unkompliziert möglich, würde aber ein entsprechendes Kalkül verlangen, das wir jetzt nicht einführen wollen. Ebenso könnten wir das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ fordern, aber das würde die Schreibweise etwas erschweren, ist aber ohne inhaltliche Komplikationen durchzuführen.

Definition 3.7.1
Es sei u eine lokal integrierbare Funktion auf Ω. (a) Die lokal integrierbare Funktion v heißt die schwache Ableitung *von u nach x_i, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt*

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v\varphi dx.$$

(b) Ist α ein Multiindex, v lokal integrierbar, so sagen wir $v = D^\alpha u$ im schwachen Sinn, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi dx.$$

Aufgabe 3.7.2
Man zeige, daß eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$ für $|\alpha| \le m$ schwache Ableitungen $D^\alpha u$ besitzt und daß diese mit den klassischen Ableitungen zusammen fallen.

Lemma 3.7.3
Besitzt die lokal integrierbare Funktion u eine schwache Ableitung $D^\alpha u$ und $D^\alpha u$ wiederum eine schwache Ableitung $D^\beta(D^\alpha u)$, so hat u auch eine schwache Ableitung der Form $D^{\alpha+\beta}u$ und es gilt $D^{\alpha+\beta}u = D^\beta(D^\alpha u)$.

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann folgt

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha u)\, \varphi dx$$

Ist $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und schreiben wir $D^\beta \psi = \varphi$, so folgt

$$\int_\Omega (D^\alpha u)\, \varphi dx = \int_\Omega (D^\alpha u) \left(D^\beta \psi\right) dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\psi dx$$

und insgesamt

$$\int_\Omega u D^{\alpha+\beta} \psi dx = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_\Omega D^\beta(D^\alpha u)\psi dx$$

□

3.7.2 $W^{m,p}$-Räume

Definition 3.7.4
Mit $W^{m,p}(\Omega)$ werde für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ der Raum

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \le m\ \exists\, v \in L^p(\Omega), \textit{ so daß } v = D^\alpha u\}$$

bezeichnet. $W^{m,p}(\Omega)$ heißt Sobolevraum[11].

[11] Sergej Lwowitsch Sobolev (6.10.1908–3.1.1989) erkannte aufgrund von physikalischen Überlegungen, daß es sinnvoll ist den Lösungsbegriff für partielle Differentialgleichungen abzuschwächen. Später konnte er diese verallgmeinerten Lösungen als Funktionale interpretieren und schuf damit die Grundlage der Theorie der Distributionen. Er war damit der Wegbereiter für den Gebrauch funktionalanalytischer Methoden in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Diese sind heute auch aus der Numerik partieller Differentialgleichungen nicht mehr wegzudenken. Auch für diese Entwicklungen legte er den Grundstein in einer Arbeit mit W. I. Smirnow

Satz 3.7.5

1. *$W^{m,p}(\Omega)$ ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum mit Norm*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

(Für $p = \infty$ betrachtet man die Summe der L^∞-Normen). Für $p < \infty$ ist dieser Banachraum separabel.

2. *Für $p = 2$ schreiben wir einfach $H^m(\Omega)$.*

Beweis:

1. Die Eigenschaften einer Norm sind für (3.4) leicht nachzuprüfen. Als einziges bleibt die Vollständigkeit zu beweisen. Dazu sei $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine Cauchy–Folge m-fach schwach differenzierbarer Funktionen, bezüglich der Norm (3.4). Ferner sei $u^\alpha_\nu = D^\alpha u_\nu$. Dann ist u^α_ν für jedes α eine Cauchy–Folge in $L^p(\Omega)$. Es existiert also ein $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ mit $u^\alpha_\nu \to u^\alpha$. Für jedes $\nu,\ \alpha$ gilt aber

$$\int_\Omega u^\alpha_\nu \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\nu D^\alpha \varphi dx.$$

Durch Grenzübergang auf beiden Seiten erhält man das erwünschte Resultat.

2. Sei s die Anzahl der Multiindizes $|\alpha| \leq m$. Dann können wir $W^{m,p}(\Omega)$ als Unterraum von $(L^p(\Omega))^s$ auffassen durch

$$u \mapsto (u, D^{(1,0,\ldots,0)}u, \ldots, D^\alpha u, \ldots).$$

Auf diese Weise wird $W^{m,p}(\Omega)$ zum abgeschlossenen Unterraum von $(L^p(\Omega))^s$. Da letzterer separabel ist, gilt dies auch für $W^{m,p}(\Omega)$.

□

3.7.3 Approximation durch glatte Funktionen

Definition 3.7.6

Eine Glättungsfunktion (engl. mollifier) *ist eine Funktion $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit*

1. *$\rho = 0$ außerhalb $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.*
2. *$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$.*
3. *$\rho \geq 0$.*

Beispiel 3.7.7

$$\rho_c(x) = \begin{cases} ce^{-\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

ist eine Glättungsfunktion, falls $c > 0$ so gewählt wird, daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_c(x)dx = 1.$$

Definition 3.7.8
Für $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $h > 0$ und eine Glättungsfunktion ρ ist

$$(J_h u)(x) = \frac{1}{h^n} \int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y)dy$$

die Regularisierung *von u. Diese ist für alle $x \in \Omega$ mit*

$$h < \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$$

definiert.

Bemerkung 3.7.9
Für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ ist $u_h = J_h u \in C^\infty(\Omega')$, sofern $h < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$.

Lemma 3.7.10
Ist $u \in C(\Omega)$, so konvergiert $u_h \to u$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Beweis: Mit der Substitution

$$z = \frac{x-y}{h}$$

wird u_h zu

$$\begin{aligned} u_h &= \frac{1}{h^n} \int\limits_{|x-y|\leq h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y)dy \\ &= \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)u(x-zh)dz. \end{aligned}$$

Daher gilt für $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $2h < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\Omega'} |u_h(x) - u(x)| &= \sup_{x\in\Omega'} \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z) \left|u(x-zh) - u(x)\right| dz \\ &\leq \sup_{x\in\Omega'} \sup_{|z|\leq 1} |u(x) - u(x-zh)|. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, daß $\int_{|z|\leq 1} \rho(z)u(x)dz = u(x)$.

Da u auf dem Kompaktum $\overline{\Omega''}$ mit

$$\Omega'' = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(z, \Omega') < h\}$$

gleichmäßig stetig ist, folgt die Behauptung. □

Lemma 3.7.11
Ist Ω beschränkt und $u \in L^p(\Omega)$ oder $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, so konvergiert u_h für $h \to 0$ gegen u im Sinne der Konvergenz in $L^p(\Omega)$ beziehungsweise in $L^p_{loc}(\Omega)$.

(Konvergenz in $L^p_{loc}(\Omega)$ bedeutet

$$u_m \overset{L^p_{loc}(\Omega)}{\longrightarrow} u \iff u_m \overset{L^p(\Omega')}{\longrightarrow} u \;\forall\, \Omega' \subset\subset \Omega.)$$

Beweis: Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 2h$. Wir setzen

$$\Omega'' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, \Omega')\} < h$$

und zeigen zunächst

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega'')}.$$

Für die nächste Umformung benötigen wir die Höldersche Ungleichung

$$
\begin{aligned}
|u_h(x)|^p &\leq \left(\int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)|u(x-zh)|dz\right)^p \\
&= \left(\int\limits_{|z|\leq 1} \underbrace{\rho(z)^{\frac{p-1}{p}}}_{\in L^q(\Omega)} \underbrace{\rho(z)^{\frac{1}{p}}|u(x-zh)|}_{\in L^p(\Omega)} dz\right)^p \\
&\leq \left(\int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)dz\right)^{p-1} \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)|u(x-zh)|^p dz \\
&\leq \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)|u(x-zh)|^p dz.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega'} |u_h(x)|^p dx &\leq \int\limits_{|z|\leq 1} \left(\int_{\Omega'} |u(x-zh)|^p dx\right) \rho(z)dz \\
&\leq \int\limits_{B_h(\Omega')} |u|^p dx
\end{aligned}
$$

und damit

$$\|J_h u(x)\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega'')}.$$

Wir finden zu $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion w mit

$$\|u-w\|_{L^p(\Omega'')} < \varepsilon.$$

Für ein geeignetes $h > 0$ hat man für die Glättung von w

$$\|w-w_h\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon.$$

Alles in allem ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h\|_{L^p(\Omega')} &\leq \underbrace{\|u-w\|_{L^p(\Omega')}}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\|w-w_h\|_{L^p(\Omega')}}_{\leq\varepsilon} + \|w_h-u_h\|_{L^p(\Omega')} \\
&\leq 2\varepsilon + \underbrace{\|w_h-u_h\|_{L^p(\Omega')}}_{\leq\|w-u\|_{L^p(\Omega'')}\leq\varepsilon} \leq 3\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Um die Richtigkeit des Satzes bezüglich der Konvergenz in $L^p(\Omega)$ zu schließen, wenden wir das Ergebnis auf $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ an. Wir beachten dabei, daß die triviale Fortsetzung einer Funktion $u \in L^p(\Omega)$ durch

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ liegt. □

Satz 3.7.12
Es seien $u, v \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $v = D^\alpha u$. Dann konvergiert u_h gegen u und $D^\alpha(u_h)$ gegen v in Sinne der Konvergenz von $L^p_{loc}(\Omega)$.

Beweis: Wegen

$$D^\alpha_x \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha_y \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha J_h u(x) &= h^{-n} \int\limits_\Omega D^\alpha_x \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y)dy \\ &= h^{-n} \int\limits_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) v(y)dy \\ &= J_h v. \end{aligned}$$

Wie bereits in Lemma 3.7.11 gezeigt konvergiert $J_h v \to v$. □

Definition 3.7.13
Seien $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Mit $\hat{C}^{m,p}(\Omega) \subset C^m(\Omega)$ bezeichnen wir die Teilmenge mit

$$\|u\|^\Omega_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

Bemerkung 3.7.14
$\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ ist ein normierter linearer Raum, der jedoch *nicht* vollständig ist.

Satz 3.7.15 (Meyers[12] und Serrin[13](1964))
Die Vervollständigung von $\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ ist $W^{m,p}(\Omega)$.

Im Beweis benötigen wir die sogenannte *Partition der Eins*, ein wichtiges Hilfsmittel der modernen Analysis das wir hier formulieren wollen.

Satz 3.7.16 (Partition der Eins)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\{U_\iota\}_{\iota \in J}$ eine offene Überdeckung von Ω. Dann existiert eine Familie von Funktionen $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, so daß

1. $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_\iota$ *für ein* $\iota(j) \in J$,
2. *für alle* j *ist* $\varphi_j \geq 0$,
3. *für alle* $x \in \Omega$ *gilt*
$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = 1, \tag{3.5}$$
4. *zu jedem* $x \in \Omega$ *existiert eine offene Umgebung* U, *so daß nur für endlich viele* $j \in \mathbb{N}$
$$\operatorname{supp}(\varphi_j) \cap U \neq \emptyset. \tag{3.6}$$

Beweis. Siehe ein Lehrbuch der Analysis oder Differentialtopologie. □

Bemerkung 3.7.17
Man beachte, daß die Summe in (3.5) wegen der Bedingung (3.6) für jedes $x \in \Omega$ endlich ist.

Beweis von Satz 3.7.15: Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

1. $\overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}} \subset W^{m,p}(\Omega)$,

[12]N. G. Meyers ist Professor an der University of Minnesota in Minneapolis. Seine Arbeiten betreffen vornehmlich elliptische Differentialgleichungen

[13]James Serrin ist emeritierter Professor an der University of Minnesota in Minneapolis. Er hat Arbeiten zu vielen Aspekten partieller Differentialgleichungen und deren Anwendungen speziell in der Mechanik und Hydrodynamik geschrieben. Er war für viele Jahre einer der Herausgeber des Archive for rational mechanics and analysis, einer der führenden Zeitschriften auf diesem Gebiet.

2. $W^{m,p}(\Omega) \subset \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|^{\Omega}_{m,p}}$.

(i) Wir zeigen, aus $u \in \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}$ folgt $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Zu zeigen ist, daß jede Cauchyfolge in $\hat{C}^{m,p}(\Omega)$ eineindeutig einem Element in $W^{m,p}(\Omega)$ entspricht. Zur Erinnerung: die Vervollständigung ist als Menge von Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen definiert. Die Abbildung

$$T : \hat{C}^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) : u \mapsto u$$

ist linear und stetig (Norm ≤ 1). Also folgt aus $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \hat{C}^{m,p}(\Omega)$ ist Cauchyfolge, daß auch $\{Tu_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge. Sei $\overline{u} = \lim_{\nu\to\infty} u_\nu$ in $\overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|^{\Omega}_{m,p}}$, so existiert $v \in W^{m,p}(\Omega)$ mit $v = \lim_{\nu\to\infty} Tu_\nu$. Setze

$$T\overline{u} = v,$$

in $W^{m,p}(\Omega)$. Diese Zuordnung hat alle erforderlichen Eigenschaften (Stetigkeit und Injektivität).

(ii) Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ gegeben, sei $\varepsilon > 0$ fest. Wir betrachten eine Überdeckung $\{\Omega_\nu\}_\nu$, d.h. $\Omega = \cup_{\nu=1}^{\infty}\Omega_\nu$ mit den zusätzlichen Eigenschaften,

1. $\overline{\Omega_\nu} \subset\subset \Omega_{\nu+1}$ und
2. $\tilde{\Omega}_\nu = \Omega_{\nu+2} \setminus \overline{\Omega_\nu}$ ist eine offene Überdeckung von Ω. (Man weise nach, daß eine solche Überdeckung existiert!)

Beachte, daß jedes $x \in \Omega$ in maximal zwei Elementen dieser Überdeckung $\{\tilde{\Omega}\}_\nu$ liegt. Im weiteren betrachten wir nur diese Überdeckung $\{\tilde{\Omega}\}_\nu$. Nun sei $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine dieser Überdeckung *subordinierte Teilung der Eins*, d.h. $\operatorname{supp}\psi_j \subset \Omega_{j+2} \setminus \overline{\Omega}_j$.

Betrachte nun $u\,\psi_j$ mit $\operatorname{supp} u\,\psi_j \subset \Omega_{j+2} \setminus \overline{\Omega_j}$. Jede der Funktionen $u\,\psi_j$ hat m schwache Ableitungen. Für genügend kleines $h_i = h_i(\varepsilon)$ hat

$$w_i = J_{h_i}(u\,\psi_i)$$

den Träger

$$\operatorname{supp} w_i \subset \Omega_{i+3} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$$

und es gilt

$$\|w_i - u\,\psi_i\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Setze $w = \sum w_i$. w ist in $C^\infty(\Omega)$, und es gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha w = \sum_i D^\alpha w_i &= \sum_i D^\alpha(w_i - u\,\psi_i) + \sum_i D^\alpha(u\,\psi_i) \\ &= \sum_i D^\alpha(w_i - u\,\psi_i) + D^\alpha u. \end{aligned}$$

Für jedes $x \in \Omega$ sind in der Summe rechts höchstens endlich viele Terme nicht null (mit gleicher oberer Schranke, nämlich 4). Deshalb folgt für ($0 \le |\alpha| \le m$)

$$D^\alpha w - D^\alpha u = \sum_i D^\alpha(w_i - u\,\psi_i)$$

und daher

$$\begin{aligned} \|D^\alpha w - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &\le \sum_i \|D^\alpha(w_i - u\,\psi_i)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \sum_{i=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist $u \in \overline{\hat{C}^{m,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|^{\Omega}_{m,p}}$. □

Tatsächlich haben wir gezeigt, daß $W^{m,p}(\Omega)$ im Abschluß (bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$) der Teilmenge der Funktionen von $C^\infty(\Omega)$ ist, deren $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$–Norm endlich ist.

Definition 3.7.18
$W_0^{m,p}(\Omega)$ ist der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$– Norm, entsprechend $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Bemerkung 3.7.19
$W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$. Ist Ω beschränkt, so ist

$$W_0^{m,p}(\Omega) \ne W^{m,p}(\Omega)!$$

3.8 Die Dualräume von $\ell^{\mathbf{p}}$ und $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}$

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir noch den Dualraum der Räume ℓ^p und $L^p(\Omega, \mathbb{K})$ bestimmen. Wir beginnen mit dem einfacheren Fall ℓ^p.

Satz 3.8.1
Es sei $p \geq 1$ und q der duale Exponent *zu p, d.h.*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ \ (q = \infty, \ \textit{falls } q = 1).$$

Dann gibt es einen toplinearen Isomorphismus

$$T : \ell^q \to (\ell^p)'$$

so daß

$$y'(\xi) = \langle \eta, \xi \rangle$$

ist mit

$$T\eta = y' \ \textit{und} \ \langle \eta, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i.$$

T ist normerhaltend.

Beweis. Aus der Hölderschen Ungleichung, die sich ja direkt auf den Raum

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \text{ mit Maßraum } (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(N), \mu)$$

wobei hier μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ ist, überträgt, schließt man, daß jede Folge in ℓ^q ein stetiges lineares Funktional auf ℓ^p induziert. Diese Zuordnung ist offensichtlich injektiv. Es bleibt die Surjektivität. Sei also $y' \in (\ell^p)'$. Setze

$$e^n = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{n\text{-te Stelle}}, 0, 0, \ldots)$$

und $\eta_n = y'(e^n)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots)$. Wir zeigen

$$\eta \in \ell^q, \ T\eta = y', \ \|\eta\|_{\ell^q} \leq \|y'\|_{(\ell^p)'}.$$

Wir setzen

$$\tau_n = \begin{cases} \frac{|\eta_n|^q}{\eta_n} & \text{falls} \quad \eta_n \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad \eta_n = 0 \end{cases}$$

Für festes $N \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\sum_{n=1}^{N} |\tau_n|^p = \sum_{n=1}^{N} |\eta_n|^{p(q-1)} = \sum_{n=1}^{N} |\eta_n|^q .$$

Damit schätzen wir ab

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |\eta_n|^q &= \sum_{n=1}^{N} \eta_n \tau_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} \tau_n y'(e^n) \\
&= y'\left(\sum_{n=1}^{N} \tau_n e^n\right) \\
&\leq \|y'\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{n=1}^{N} |\tau_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|y'\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{n=1}^{N} |\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Damit folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|y'\|_{(\ell^p)'} .$$

Daher ist $\eta \in \ell^q$ und

$$\|\eta\|_{\ell^q} \leq \|y'\|_{(\ell^p)'} .$$

Daher ist T auch normerhaltend. Um einzusehen, daß $T\eta = y'$ überlegen wir uns, daß $T(\eta)(e_n) = y'(e_n)$ nach Konstruktion. Linearität und Stetigkeit implizieren, daß $T(\eta)\xi = y'(\xi)$ für alle ξ. Ein ähnliches Argument beweist, die entsprechende Behauptung für $p = 1$ und $q = \infty$. $\square$

Als Hilfsmittel beim Beweis der entsprchenden Aussage für die L^p-Räume benötigen wir den Satz von Radon[14]-Nikodym[15]

Definition 3.8.2
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein Maß. ν heißt absolut stetig bezüglich μ, falls aus $\mu(A) = 0$ folgt, $\nu(A) = 0$.

Satz 3.8.3 (Radon-Nikodym)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein absolut stetiges (signiertes) Maß. Dann gibt es eine Funktion $g \in L(\mu, \mathbb{R})$, so daß für $S \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\nu(S) = \int_\Omega \chi_S \, d\mu.$$

Beweis. Siehe z.B. Hewitt-Stromberg [5]. □

Damit können wir folgenden Satz beweisen.

Satz 3.8.4
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $L^p(\Omega, \mathbb{K})$ gegeben mit $1 \le p < \infty$. Dann gibt es einen toplinearen Isomorphismus $J : L^q(\Omega, \mathbb{K}) \to L^p(\Omega, \mathbb{K})'$ der normerhaltend ist und es gilt für $\ell \in L^p(\Omega, \mathbb{K})'$

$$\ell(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu,$$

wobei $J(g) = \ell$ ist.

Beweis. Aufgrund unserer bisherigen Überlegungen sind alle Aussagen außer der Surjektivität klar. Wir betrachten nur den Fall eines endlichen Maßraumes, also $\mu(\Omega) < \infty$. Wir betrachten für $y' \in (L^p(\Omega, \mathbb{K}))'$ die Abbbildung

$$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}, \ \nu(S) = y'(\chi_S).$$

[14]Johann Karl August Radon (26.12.1887-25.5.1956) studierte in Wien, Göttingen und Brno. Nach einer Privatdozentur in Wien kam er 1919 an die Universität Hamburg, danach war er in Greifswald, Erlangen und Breslau, nach dem Krieg in Wien. Wissenschaftlich beschäftigte er sich mit Variationsrechnung, Differentialgeometrie und Maßtheorie.

[15]Otton Martin Nikodym (13.8.1887-4.5.1974) wurde in der Ukraine geboren, studierte und lehrte in Polen und war dann schließlich in den USA. Seine wesentlichen Arbeiten betreffen Maß- und Integrationstheorie und die Funktionalanalysis.

Endliches Maß von Ω impliziert, daß $\chi_S \in L^p(\Omega, \mathbb{K})$ liegt und daß ν σ-additiv ist. ν ist bezüglich dem Maß μ absolut stetig, denn $\mu(S) = 0$, heißt $\chi_S = 0$ μ-fast überall und dies besagt $\chi_S = 0$ in $L^p(\Omega, \mathbb{K})$. Also existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym eine Funktion $g \in L(\mu, \mathbb{K})$ mit

$$\nu(S) = \int\limits_S g \, d\mu = \int\limits_\Omega \chi_S g \, d\mu.$$

Dies besagt, daß die gewünschte Gleichung für alle Treppenfunktionen gilt. Da $g \in L(\mu, \mathbb{K})$ ein steiges lineares Funmktional auf $L^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ erzeugt, und $L^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ stetig in $L^p(\Omega, \mathbb{K})$ eingebettet ist, gilt die Gleichung

$$y'(f) = \int\limits_\Omega fg \, d\mu$$

für alle Funktionen im L^∞-Abschluß der Treppenfunktionen. Der Beweis, daß $g \in L^q(\Omega, \mathbb{K})$ liegt und die Norm erhalten wird folgt weitgehend dem Beweis im ℓ^p-fall, wir wollen im Moment darauf verzichten, siehe auch Werner [11] für einen vollständigen Beweis, mit gleicher Argumentation. $\square$

Bemerkung 3.8.5
Andere Beweise finden sich in der Literatur, man beachte insbesondere den in Hirzebruch, Scharlau [6], der auf interessanten Abschätzungen und der Theorie gleichmäßig konvexer Räume beruht, auf die wir nicht eingehen wollen.