Einleitung

Wir wollen die Funktionalanalysis entsprechend dem Kanon, dem in der Literatur weitgehend gefolgt wird, vgl. z.B. ALT [2], behandeln. Als Vorkenntnisse erwarten wir Kenntnisse der linearen Algebra und der Analysis gemäß einem üblichen einführenden Kursus an einer deutschen Hochschule. Insbesondere setzen wir voraus, daß die Hörer mit dem Integralbegriff nach Riemann vertraut sind. Außerdem setzen wir voraus, daß die Eigenschaften von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ bekannt sind, sowohl die lineare Struktur, wie auch elementare metrische Eigenschaften. Da wir nicht nur eine abstrakte Theorie von Räumen anbieten wollen, sondern möglichst auch einen reichen Beispielvorrat von Banachräumen kennen lernen wollen, ist es unumgänglich, daß wir uns hinreichend ausführlich mit dem Integralbegriff nach Lebesgue beschäftigen wollen. Dabei folgen wir weitgehend der hervorragenden Darstellung in ALT [2]. Dieses Werk sollte als Begleitlektüre herangezogen werden. Obwohl die Reihenfolge des behandelten Materials oft stark von diesem Werk abweicht, folgt die Präsentation ihm oft. Andere sehr gute Bücher über Funktionalnalysis, aus denen auch Elemente entlehnt wurden, sind KATO [8], RUDIN [9], HIRZEBRUCH & SCHARLAU[6]. Es gibt eine wahre Flut hervorragender Darstellungen der Funktionalanalysis. Dies zeigt vielleicht die Bedeutung, die dieses Gebiet innerhalb eines Jahrhunderts erlangt hat. Wie die historischen Bemerkungen am Rande deutlich machen, ist die Geschichte der Funktionalanalysis eng mit den großen Namen der Mathematik des 20 Jahrhunderts verbunden; hier nur eine Auswahl: Hilbert, Poincaré, Banach, Riesz, Weyl, Fréchet, L. Schwarz.

Noch kurz ein paar Vereinbarungen zur Notation: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ steht für den Körper der reellen, $\mathbb{C}$ für den Körper der komplexen Zahlen. Alle weiteren Schreibweisen werden formal eingeführt.

Abbildung 1: David Hilbert (23.1.1862-14.2.1943) im Jahr 1900

Abbildung 2: Stefan Banach (30.3.1892-31.8.1945)

Abbildung 3: Hermann Klaus Hugo Weyl (9.11.1885-8.12.1955)

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel diskutieren wir die Grundlage der Funktionalanalysis. Diese bestehen aus i.a. nicht endlich dimensionalen linearen Räumen und topologischen Strukturen. Wir werden dabei nicht den allgemeinsten Fall betrachten, sondern uns einen Weg suchen, der für die gewünschten Anwendungen hinreichend allgemein ist, aber trotzdem noch gewisse Vereinfachungen zuläßt. Dieses erste Kapitel behandelt viele Dinge, die Sie bereits kennen, jedoch dient es auch dazu eine einheitliche Schreibweise zu vereinbaren.

1.1 Lineare Räume

Im folgenden sei $\mathbb{K}$ ein Körper und zwar vereinbaren wir, daß $\mathbb{K}$ immer für einen der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht. Es wird Beispiele von Aussagen geben, die nur für einen der beiden Körper wahr sind, dann werden wir darauf hinweisen. Alle Aussagen, die mit $\mathbb{K}$ formuliert werden, gelten für beide Körper.

Definition 1.1.1
Eine kommutative Gruppe $(V, +)$ *heißt* Vektorraum *über* $\mathbb{K}$, *wenn zusätzlich zur Addition eine skalare Multiplikation*

$$\mathbb{K} \times V \to V$$

definiert ist, die folgenden Eigenschaften genügt:

S1 $1v = v$ *für alle* $v \in V$;

S2 $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$;

S3 $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;

S4 $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$.

Man beachte die verschiedene Bedeutung der Multiplikation auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in (S2) und die unterschiedliche Bedeutung von + auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in (S3).

Definition 1.1.2

1. *Ein Element $x \in V$ heißt* Linearkombination *der Familie von Vektoren $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$, wobei A eine beliebige Indexmenge ist, falls es eine zugehörige Familie von Skalaren $\lambda^\alpha \in \mathbb{K}$ gibt, von denen höchstens endlich viele von null verschieden sind, mit*
$$x = \sum_{\alpha\in A} \lambda^\alpha x^\alpha.$$

2. *Eine Linearkombination*
$$\sum_{\alpha\in A} \lambda^\alpha x^\alpha$$
mit höchstens endlich vielen von null verschiedenen Koeffizienten heißt nichttrivial *wenn mindestens einer der Koeffizienten von null verschieden ist.*

3. *Eine Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$ heißt* linear unabhängig, *falls aus*
$$\sum_{\alpha\in A} \lambda^\alpha x^\alpha = 0$$
folgt, daß alle $\lambda^\alpha = 0$ sind.

4. *Eine Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$ erzeugt V, wenn jedes Element $x \in V$ sich als Linearkombination der Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$ darstellen läßt.*

5. *Eine linear unabhängige Menge $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$ heißt* Basis *von V, falls $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$ den Raum V erzeugt.*

Wir erinnern an die folgenden elementaren Aussagen der Linearen Algebra.

Proposition 1.1.3

1. *$\lambda x = 0$ gilt genau dann, wenn $\lambda = 0$ oder $x = 0$.*

2. *Eine Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$ ist nicht linear unabhängig, falls es ein $\beta \in A$ gibt, mit x^β ist Linearkombination der Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$.*

3. *Eine Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$ ist linear unabhängig, falls zu $x \in V$ höchstens eine Darstellung von x als Linearkombination der Familie $\{x^\alpha\}_{\alpha\in A}$ existiert.*

4. *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

5. *Je zwei Basen eines Vektorraumes haben die gleiche Mächtigkeit.*

Beweis. Wir wollen nur darin erinnern, daß der Beweis der vierten Aussage auf dem Zornschen[1] Lemma beruht. Da dieses noch an anderen Stellen eine

Abbildung 1.1: Max August Zorn (6.6.1906-9.3.1993)

wichtige Rolle spielen wird, wollen wir es nun formulieren. □

Satz 1.1.4 (Zornsches Lemma)
Sei $(\mathcal{M}, \leq)$ eine nichtleere geordnete Menge, so daß jede total geordnete Menge ein obere Schranke besitzt. Dann besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element.

Dabei ist eine *geordnete Menge* eine Menge X, auf der eine *Relation* $R(x, y)$ durch $x \leq y$ definiert ist, so daß gilt

[1]Max August Zorn (6.6.1906-9.3.1993) studierte und promovierte als gebürtiger Hamburger an unserer Hochschule. Er wurde von den Nazis verfolgt und emigrierte in die USA. Sein mathematisches Werk umfaßt Gruppentheorie, Mengenlehre, aber auch reelle und komplexe Analysis, wie auch Funiktionalanalysis. Am bekanntesten ist das nach ihm benannte Lemma, das äquivalent zum Auswahlaxiom und dem Wohlordnungssatz ist. Eine überraschende Konsequenz ist die Existenz nicht meßbarer Mengen, wie wir noch sehen werden.

1. $x \leq x$ für jedes $x \in X$.

2. $x \leq y$, $y \leq z$ implizieren $x \leq z$.

3. Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

Eine Menge $N \subset X$ heißt *total geordnet*, falls für jedes Paar $x, y \in X$ entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Eine obere Schranke einer total geordenten Teilmenge N ist ein Element $s \in \mathcal{M}$, so daß für jedes $x \in N$ gilt, $x \leq s$. Ein maximales Element in X ist ein Element $x^* \in X$, so daß für alle $x \in X$ gilt, $x \leq x^*$.

Definition 1.1.5
Nach Proposition 1.1.3 sind je zwei Basen gleichmächtig. Daher sind die hierzu definierenden Begriffe nicht abhängig von der Auswahl der Basis. Ein Raum mit einer endlichen Basis heißt endlich dimensional. *In einem endlich dimensionalen Raum heißt die Anzahl der Basiselemente die* Dimension *des Vektorraumes.*

Beispiel 1.1.6

1. Ein erstes Beispiel eines linearen Raumes über $\mathbb{K}$ ist der Raum $\mathbb{K}^n$. Dieser Raum ist die Menge aller n-Tupel

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, k_i \in K.$$

Die Addition zweier solcher Elemente ist komponentenweise zu verstehen, also

$$\begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_2^1 \\ \vdots \\ k_n^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^2 \\ k_2^2 \\ \vdots \\ k_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 + k_1^2 \\ k_2^1 + k_2^2 \\ \vdots \\ k_n^1 + k_n^2 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation mit Skalaren ist ebenfalls komponentenweise zu verstehen, also

$$\lambda \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda k_1 \\ \lambda k_2 \\ \vdots \\ \lambda k_n \end{pmatrix}.$$

Es ist einfach nachzuprüfen, daß alle Bedingungen eines Vektorraumes erfüllt sind. Die Menge

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich linear unabhängig und erzeugend, also eine Basis.

2. Wichtiger sind für uns in dieser Vorlesung Funktionenräume, d.h. gegeben sei eine Menge Ω, wir betrachten als Vektorraum V alle Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$. Die Addition in V ist punktweise erklärt, nämlich für $f_1, f_2 \in V$ durch

$$(f_1 + f_2)(\omega) = f_1(\omega) + f_2(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Die skalare Multiplikation durch

$$(\lambda f)(\omega) = \lambda f(\omega).$$

Man erkennt unschwer, daß durch die Wahl $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ das erste Beispiel in dieser Klasse von Beispielen bis auf Isomorphie integriert wird.

3. Aus dem eben gezeigten Beispiel werden durch Zusatzforderungen an die Funktionen bzw. Einschränkungen an Ω viele wichtige Beispiele gewonnen. Als konkretes Beispiel für diese Konstruktion betrachten wir z.B. den Raum $V = C([0, 1], \mathbb{R})$, d.h. die Menge aller reellwertigen, stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$.

Definition 1.1.7

1. *Sind zwei Vektorräume X, Y über $\mathbb{K}$ gegeben und hat man eine Abbildung $L : X \to Y$, so heißt diese* linear*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

   L1 $L(x + y) = Lx + Ly$ *für alle* $x, y \in X$*;*

   L2 $L(\lambda x) = \lambda Lx$ *für alle* $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

   Eine lineare Abbildung wird auch als Homomorphismus *bezeichnet.*

2. *Ist $L : X \to Y$ linear, so heißt $K = L^{-1}(0)$ der* Kern *der linearen Abbildung L, wir schreiben dafür auch $K = \ker L$.*

3. *Das Bild der linearen Abbildung $L : X \to Y$ wird mit $\mathrm{BILD}(L) \subset Y$ bezeichnet:*
$$\mathrm{BILD}(L) = \{Lx \mid x \in X\}\,.$$

4. *Ist $\ker L = \{0\}$ und $\mathrm{BILD}(L) = Y$, so nennt man L einen* (linearen) *Isomorphismus.*

5. Die Abbildung $\mathbb{1}_X : X \to X : x \mapsto x$ wird als *Identität* auf X bezeichnet.

Die relevanten Aussagen fassen wir wieder als Satz zusammen.

Satz 1.1.8
1. *$\ker L$ ist ein linearer Unterraum von X.*

2. *$\mathrm{BILD}(L)$ ist ein linearer Unterraum von Y.*

3. *Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn $\ker L = \{0\}$ ist.*

4. *Ist L injektiv, so gibt es eine lineare Abbildung $L^{\#} : \mathrm{BILD}(L) \to X$ mit $L^{\#} \circ L = \mathbb{1}_{|X}$.*

5. *$L^{\#}$ ist injektiv und $L \circ L^{\#} = \mathbb{1}_{|\mathrm{BILD}(L)}$.*

Beweis. Alle Aussagen sind aus der linearen Algebra bekannt. □

Lemma 1.1.9
Die Menge der linearen Abbildungen $\{L : X \to Y \mid L \text{ ist linear }\}$ bildet bezüglich der natürlichen Operationen

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2)x &= L_1x + L_2x \\ (\lambda L)x &= \lambda Lx\end{aligned}$$

einen linearen Raum.

Beweis. Bekannt! □

Spezielle lineare Abbildungen sind lineare Abbildungen von X in den zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$, die nach dem oben stehenden Lemma 1.1.9 einen linearen Raum bilden.

Definition 1.1.10
Der lineare Raum $\{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist linear}\}$ *heißt der* algebraische Dualraum *von* X *und wird mit* X^* *bezeichnet.*

Definition 1.1.11
Ist $L : V \to W$ *linear, so ist die* duale Abbildung $L^* : W^* \to V^*$ *definiert durch*

$$L^* w^*(v) = w^*(Lv).$$

1.2 Metrische Räume

In dem zuletzt genannten Beispiel 1.1.6 (3) haben wir neben der linearen Struktur eine zusätzliche Konstruktion, nämlich wir kennen einen *Konvergenzbegriff*. Was steckt dahinter? Wir betrachten Folgen und können entscheiden, ob diese Folgen *konvergent* sind. Diese Konstruktion ist wichtig genug, um erst einmal die formalen Grundlagen zu diskutieren. Wir definieren erst den Begriff eines topologischen Raumes und sprechen dann über den Spezialfall eines metrischen Raumes.

Wir beginnen mit einer Menge X, $\mathfrak{P}(X)$ sei die Potenzmenge von X, also die Menge aller Teilmengen.

Definition 1.2.1
Eine Teilmenge $\mathfrak{T}$ *heißt* Topologie *auf* X*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind*

1. $\emptyset \in \mathfrak{T}$;
2. $X \in \mathfrak{T}$;
3. *Ist* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *eine endliche Teilmenge von* $\mathfrak{P}(X)$*, so ist* $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathfrak{T}$;
4. *für eine beliebige Familie* $A_\iota \in \mathfrak{T}$ *gilt*

$$\bigcup_\iota A_\iota \in \mathfrak{T}.$$

Das Paar $(X, \mathfrak{T})$ *nennt man einen* topologischen Raum. *Die Elemente von* $\mathfrak{T}$ *werden als* offene Mengen *bezeichnet. Jede offene Menge heißt auch Umgebung von jedem ihrer Punkte. Allgemeiner nennt man eine Menge* K *eine*

Umgebung *eines Punktes $x \in K$, wenn es eine offene Umgebung U von x gibt mit $x \in U \subset K$.*

Eine Menge C heißt abgeschlossen, *falls das Komplement $X \setminus C$ offen ist.*

Definition 1.2.2

1. *Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ heißt* hausdorffsch[2], *falls es zu je zwei*

Abbildung 1.2: Felix Hausdorff (8.11.1868-26.1.1942)

*Punkten $x_1, x_2 \in X$ offene Mengen $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (*Trennungseigenschaft*).*

2. *Ist $A \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$, so nennt man die kleinste abgeschlossene Menge, welche A enthält, den* Abschluß *von A. Wir schreiben dafür $\bar{A}$. In anderen Worten, wir haben*
$$\bar{A} = \bigcap_{C \supset A, C \text{ ist abgeschlossen}} C.$$

3. *Es sei $K \subset X$ eine Teilmenge. Wir definieren eine* Relativtopologie *auf K durch*
$$\mathfrak{T}_K = \{A \subset K \mid A = K \cap T, T \in \mathfrak{T}\}.$$

4. *Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, so sagt man eine Teilmenge $\{A_\iota\}_{\iota \in J}$ ist eine* Überdeckung *von X, falls*
$$X \subset \bigcup_{\iota \in J} A_\iota.$$

[2] nach Felix Hausdorff (8.11.1868-26.1.1942). Von ihm stammen wesentliche Beiträge zur Mengenlehre und Topologie. Er entging einer Deportation im Jahre 1942 nur, indem er zusammen mit seiner Frau aus dem Leben schied.

5. *Ein topologischer Haudorffraum heißt* kompakt *(*überdeckungskompakt*), wenn aus jeder Überdeckung eine endliche Teilmenge ausgewählt werden kann, die bereits eine Überdeckung darstellt.*

Lemma 1.2.3
Elementare Eigenschaften kompakter Räume sind:

1. *Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.*

2. *Kompakte Unterräume eines topologischen Hausdorffraumes sind abgeschlossen.*

Beweis. 1.) Sei $A \subset X$ abgeschlossen, dann ist $X \setminus A$ offen und jede offene Überdeckung von A läßt sich durch Hinzunahme von $X|setminusA$ auf ganz X fortsetzen. Die Kompaktheit von X erlaubt eine endliche Teilüberdeckung auszuwählen. Diese überdeckt dann auch A und daran ändert auch die (eventuelle) Wegnahme von $X \setminus A$ nichts.

2.) Sei $C \subset X$ kompakt. Dann wird der Beweis durch Widerspruch erbracht. Sei $x_0 \notin C$, aber $x_0 \in \bar{C}$. Dann gibt es offene Mengen U_{x_0} mit $x_0 \in U_{x_0}$ und V mit $C \subset V$ und $V \cap U_{x_0} = \emptyset$. Dann ist aber $x_0 \notin \bar{C}$.

□

Aufgabe 1.2.4
Man zeige, ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er die endliche Durchschnittsseigenschaft `engl.:`**finite intersection property** *besitzt, d.h. wenn für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen gilt, daß, falls je endlich viele nichtleeren Schnitt haben, der Schnitt aller Mengen nicht leer ist.*

Definition 1.2.5
Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, eine Teilmenge $Z \subset X$ heißt dicht*, wenn für jede offene Menge $U \in \mathfrak{T}$ gilt, daß*

$$Z \cap U \neq \emptyset.$$

Definition 1.2.6
Ein topologischer Raum heißt separabel*, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge $Z \subset X$ gibt.*

Definition 1.2.7
Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

1. *Eine Teilmenge* $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{T}$ *heißt* Basis der Topologie[3], *wenn jede offene Teilmenge als Vereinigung von Elementen aus* $\mathfrak{U}$ *geschrieben werden kann.*

2. *Gibt es eine abzählbare Basis für* $\mathfrak{T}$*, so sagt man die Topologie erfülle das* zweite Abzählbarkeitsaxiom.

3. *Gibt es zu einem Punkt* $x \in X$ *ein abzählbare Familie* $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *offener Umgebungen, so daß jede Umgebung* N *von* x *mindestens ein Element* U_n *umfaßt, so sagen wir,* x *habe eine* abzählbare *Umgebungsbasis.*

4. *Hat jeder Punkt* $x \in X$ *eine abzählbare Umgebungsbasis, so erfüllt die Topologie das* erste Abzählbarkeitsaxiom.

Beispiel 1.2.8
Beispiele topologischer Räume sind

1. $(X, \mathfrak{P}(X))$. In dieser Topologie sind (natürlich) auch alle Mengen der Form $\{x\}$ offen. Man spricht von der diskreten Topologie. Diese Topologie ist hausdorffsch, und X ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.

2. $(X, \{\emptyset, X\})$. Diese Topologie trennt keine Mengen.

3. Bezeichnet man eine Menge U in $\mathbb{R}$ als offen, wenn mit jedem Punkt noch eine ε-Umgebung in U liegt, so ist $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ ein topologischer Raum, wenn $\mathfrak{U}$ für die Menge aller offenen Mengen steht.

Die ersten beiden Beispiele legen es nahe, zwei Topologien auf der gleichen Menge vergleichen zu wollen.

Definition 1.2.9
Seien $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ *zwei Topologien auf* X*. Wir nennen* $\mathfrak{T}_1$ gröber *als* $\mathfrak{T}_2$*, wenn* $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$ *ist. Anders ausgedrückt* $\mathfrak{T}_1$ *ist gröber, wenn jede offene Menge in der* $\mathfrak{T}_1$*-Topologie auch offen in der* $\mathfrak{T}_2$*-Topologie ist. Wir sagen in diesem Fall auch, daß* $\mathfrak{T}_2$ feiner *als* $\mathfrak{T}_1$ *ist.*

[3] Wir beachten den doppelten Gebrauch des Wortes Basis, einmal als Basis eines linearen Raumes, dann als Basis der Topologie. Beide Begriffe sind gebräuchlich, eine Vermeidung dieser Doppeldeutigkeit ist fast unmöglich. Aus dem Kontext sollte immer klar werden, welche der beiden Begriffe gemeint ist.

Im nächsten Satz fassen wir wichtige Eigenschaften topologischer Räume zusammen. Ein Beweis der Mehrzahl der Aussagen erfolgt in den Übungen.

Satz 1.2.10
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. *Ist $(X, \mathfrak{T})$ hausdorffsch, so hat man die folgenden Trennungseigenschaften:*

   TR1 *Zu jedem $x \in X$ und jeder kompakten Menge $C \subset X$ gibt es offene Mengen U, V mit $x \in U, C \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

   TR2 *Zu zwei disjunkten kompakten Mengen C_1, C_2 gibt es offene Mengen U_1, U_2 mit $C_i \subset U_i$, $i = 1, 2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

2. *Ist $(X, \mathfrak{T}_1)$ hausdorffsch und gröber als $(X, \mathfrak{T}_2)$ und ist $(X, \mathfrak{T}_2)$ kompakt, so ist $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.*

3. *(Satz von Tychonov[4]) Produkte kompakter Mengen sind kompakt.*

Abbildung 1.3: Andrej Nikolajewitsch Tychonov (30.10.1906-7.10.1993)

Beweis. Wir wollen nur die zweite Aussage beweisen, die Trennungseigenschaften (**TR1, TR2**) werden in den Übungen behandelt. Für die letzte Aussage verweisen wir auf die Literatur [7].

[4]Andrej Nikolajewitsch Tychonov (30.10.1906-7.10.1993) studierte und lehrte an der Universität Moskau. Seine Schwerpunkte sind die Topologie und die Funktionalanalysis. In seinen wissenschaftlichen Arbeiten hat er sich aber auch mit Differentialgleichungen und Anwendungen der Mathematik beschäftigt.

Sei also $(X, \mathfrak{T}_1)$ hausdorffsch und $(X, \mathfrak{T}_2)$ kompakt und $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$. Zu zeigen ist $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$. Sei $A \in \mathfrak{T}_2$, dann ist $X \setminus A$ abgeschlossen (bzgl. $\mathfrak{T}_2$), also kompakt. Dann ist $X \setminus A$ aber auch kompakt (Warum ist dies sofort klar?) in $\mathfrak{T}_1$, also abgeschlossen und damit $A \in \mathfrak{T}_1$. □

Definition 1.2.11

1. *Es seien $(X, \mathfrak{T}_X)$ und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ topologische Räume, eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* stetig, *falls für jede offene Menge $V \in \mathfrak{T}_Y$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_1$, oder in Worten: Urbilder offener Mengen sind offen.*

2. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* offen, *falls Bilder offener Mengen in X offen in Y sind.*

3. *Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so nennt man f einen* Homöomorphismus, *falls f und f^{-1} beide stetig sind.*

Aufgabe 1.2.12

1. *Man zeige, ist $f : X \to Y$ stetig, so sind Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Es gilt auch die Umkehrung.*

2. *Ist f bijektiv, stetig und offen, so ist f ein Homöomorphismus.*

3. *Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt.*

4. *f ist genau dann stetig, wenn für jede Teilmenge gilt $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Eine wichtige Konstruktion ist die sogenannte *Quotientenbildung*. Gegeben sei ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{T})$ und eine Äquivalenzrelation auf X, die wir als $x \sim y$ schreiben. Mit $[x]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse und mit $X/\sim$ den *Quotientenraum* oder auch die Menge der Äquivalenzklassen. Es gibt eine wohldefinierte Abbildung $\Pi : X \to X/\sim : x \mapsto [x]$. Die Verknüpfung von Äquivalenzrelationen und Topologie wird durch folgende Definition hergestellt.

Definition 1.2.13
Eine Äquivalenzrelation heißt abgeschlossen, *wenn für jedes $x \in X$ die Klasse $[x]$ abgeschlossen ist.*

Definition 1.2.14
Wir definieren eine Topologie $\mathfrak{T}_Q$ auf $\mathcal{X} = X/\sim$ als die feinste Topologie, so daß Π stetig ist.

Es ist leicht nachzuprüfen, daß $(X/\sim, \mathfrak{T}_Q)$ ein topologischer Raum ist.

Satz 1.2.15
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine abgeschlossene Äquivalenzrelation auf X und Y ein topologischer Raum. Dann ist $f : X/\sim \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \Pi$ stetig ist.

Beweis. Klar! □

Beispiel 1.2.16
Wir betrachten $\mathbb{R}$, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Quotientenbildung identifiziert Punkte.

Man beachte, daß die Frage ob Quotiententopologien hausdorfsch sind, falls der ursprügliche Raum hausdorffsch ist, nicht leicht zu beantworten ist. Notwendig dafür ist offensichtlich, daß die Relation abgeschlossen ist. Dies ist aber im allgemeinen nicht hinreichend.

Wir wollen nun eine Spezialisierung betrachten und metrische Räume betrachten.

Definition 1.2.17
Es sei X eine Menge, eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

M1 $d(x, y) = 0$ *dann und nur dann, wenn* $x = y$.

M2 $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in X$.

M3 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *für alle* $x, y, z \in X$.

Das Paar (X, d) wird dann als metrischer Raum *bezeichnet. Die Eigenschaft (M3) wird oft als* Dreiecksungleichung *bezeichnet.*

In einem metrischen Raum hat man auf eine natürliche Weise eine Topologie.

Definition 1.2.18
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ nennen wir metrisch offen*, wenn zu jedem Punkt $x \in U$ ein positive Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so daß die* ε-Kugel *$B_\varepsilon(x)$, definiert durch*

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\},$$

in U enthalten ist.

Lemma 1.2.19
Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann bildet die Menge der metrisch offenen Mengen $\mathfrak{T}_d$ eine Topologie auf X. Wir nennen $\mathfrak{T}_d$ auch eine metrische Topologie.

Beweis. Leicht nachzuprüfen! □

Für metrische Topologien gibt es ein weiteres Kriterium für Stetigkeit, das sogenannte $\varepsilon - \delta$*-Kriterium*:

Lemma 1.2.20 (Stetigkeit in metrischen Topologien)
Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f ist bezüglich der jeweiligen Topologien $\mathfrak{T}_{d_X}$ bzw. $\mathfrak{T}_{d_Y}$ genau dann stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $d_X(x, y) < \delta$ impliziert, daß $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Beweis. Der Beweis dieser Aussage ist nahezu trivial! □

Definition 1.2.21

1. *In einem metrischen Raum (X, d) heißt eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$* konvergent, *wenn es ein $x_0 \in X$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt mit*
$$n > N \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

2. *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* Cauchy-Folge[5], *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß*
$$n, k > N \Rightarrow d(x_n, x_k) < \varepsilon.$$

3. *Schließlich heißt der metrische Raum* vollständig, *wenn jede Cauchy-Folge konvergent ist.*

[5]Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789-22.5.1857) war Sohn eines hohen Beamten und genoß demzufolge eine gute Privatausbildung. Nach einem ingenieurwissenschaftlichen Studium eignete er sich nebenbei Werke von Lagrange an. Im Jahr 1811 löste er ein Problem, das Lagrange formuliert hatte. Er arbeitete über Integrale, Strömungsmechanik und Elastizitätstheorie. Speziell die Arbeiten zum letztgenannten Bereich machten ihn zu einem der bekanntesten Mathematiker seiner Zeit. Im weiteren arbeitete er auf vielen Gebieten, sein Hauptarbeitsgebiet wurde die Analysis mit der Theorie von Differentialgleichungen. Nach Gauß begann er mit komplexen Zahlen und der zugehörigen Analysis zu arbeiten. Cauchy war ungeheuer produktiv und dies sehen wir noch heute an vielen Konzepten, die seinen Namen tragen.

Abbildung 1.4: Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789-22.5.1857)

4. *Mit $\mathfrak{C}(X)$ werde die Menge aller Cauchy-Folgen auf (X,d) bezeichnet.*

Eine wichtige Konstruktion ordnet jedem metrischen Raum X einen metrischen Raum $\hat{X}$ zu, der zwei wesentliche Eigenschaften hat: $\hat{X}$ ist erstens vollständig, und zweitens kann man X als Teilraum von $\hat{X}$ auffassen.

Satz 1.2.22 (Vervollständigung von metrischen Räumen)
Sei (X,d) ein metrischer Raum, $C_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, \dots\}$ seien für $i = 1,2$ zwei Cauchyfolgen. Wir nennen diese äquivalent, *wenn*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n^1, x_n^2) \text{ existiert und } \lim_{n\to\infty} d(x_n^1, x_n^2) = 0$$

ist. Wir schreiben dafür $C_1 \equiv C_2$. Dann ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{C}(X)$. Sei $\hat{X} = \mathfrak{C}(X)/\equiv$ und $[C]$ die Äquivalenzklasse der Cauchy-Folge C, dann definiert (mit $C_i = (x_1^n, x_2^n, \dots)$)

$$\hat{d}([C_1],[C_2]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^1, x_n^2)$$

eine Metrik auf $\hat{X}$, welche diesen zum vollständigen, metrischen Raum macht. Die Abbildung

$$x \mapsto (x, x, x, \dots, x, \dots)$$

von X nach $\hat{X}$ ist injektiv und isometrisch[6], *d.h. eine* Einbettung *von X in $\hat{X}$.*

Beweis. Die wesentlichen Schritte im Beweis sind:

1. $\hat{d}$ ist wohldefiniert, d.h. die Wahl anderer Folgen in der gleichen Klasse führt zum gleichen Ergebnis.

[6]Eine Abbildung f zwischen zwei metrischen Räumen X,Y heißt isometrisch, falls $d_Y(f(x),f(y)) = d_X(x,y)$ gilt.

2. $\hat{d}$ ist eine Metrik auf $\mathfrak{C}(X)/\equiv$.

3. Der Raum ist vollständig.

4. Die angegebene Abbildung ist injektiv und isometrisch.

Alle Eigenschaften, außer vielleicht der dritten, sind klar. $\square$

Beispiel 1.2.23

1. *Mit $d(x,y) = |x-y|$ wird $(\mathbb{K}, d)$, zum metrischen Raum.*

2. *$(\mathbb{K}^n, d)$ wird mit $d(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$ zum metrischen Raum.*

3. *Ist $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, so definiert man eine Topologie $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$ auf $X \times X$, indem man eine Basis $\mathfrak{B}$ für die Topologie angibt:*

$$\mathfrak{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1, U_2 \in \mathfrak{T}\}.$$

Ist $\mathfrak{T}$ eine metrische Topologie mit Metrik d, so ist auch $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$ metrisch. Die zugehörige Metrik ist nicht eindeutig, eine Wahl dafür ist

$$d_{X\times X}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2).$$

Aufgabe 1.2.24

Man gebe eine andere Metrik auf $X \times X$ an, die zur gleichen Topologe führt!

1.3 Beispiele linearer metrischer Räume

In der Funktionalanalysis studiert man systematisch die Auswirkungen einer gemeinsamen linearen und topologischen Struktur. Wir beginnen mit einer sehr allgmeinen Definition, werden uns aber schnell auf wesentlich speziellere Situationen zurückziehen.

Definition 1.3.1

Ein topologischer Vektorraum $(V, +, \mathfrak{T})$ *ist ein linearer Raum, der gleichzeitig die Struktur eines topologischen Raumes trägt, so daß die Addition eine stetige Abbildung $V \times V \to V$ ist und die skalare Multiplikation eine stetige Abbildung $\mathbb{K} \times V \to V$ ist, wobei $\mathbb{K}$ und $V \times V$ jeweils die dafür in Beispiel 1.2.23 definierte metrische Topologie tragen. Ist $\mathfrak{T}$ eine metrische Topologie, so sprechen wir von einem* linearen metrischen Raum.

Beispiel 1.3.2

1. Das erste Beispiel eines metrischen linearen Raumes ist der Raum $\mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Wir kommen zum ersten nichttrivialen Beispiel, es sei $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ eine kompakte Teilmenge, diese Menge trägt die Relativtopologie von $\mathbb{K}^n$ und bezüglich dieser betrachten wir

$$C(\Omega, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig } \}.$$

Wie bereits bemerkt ist dies ein linearer Raum, wir wollen nun eine Metrik auf diesem Raum definieren:

$$d(f, g) = \max_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)|.$$

Offenkundig definiert dies eine Metrik, die Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren stetig macht. Dieser Raum ist bezüglich dieser Metrik **vollständig**. Dies folgt aus dem Satz: Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.

3. Auf dem (auf gleiche Weise konstruierten) Raum $C([0, 1], \mathbb{R})$ definieren wir eine zweite Metrik durch

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Wir prüfen die Eigenschaften einer Metrik nach:

M1 Ist $d_1(f, g) = 0$, so ist $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0$. Da der Integrand stetig und nichtnegativ ist, folgt, daß der Integrand identisch verschwindet.

M2 Ist klar.

M3 Die Dreiecksungleichung ist einfach, sie gilt punktweise und dies wird einfach aufintegriert.

In diesem Beispiel ist der Raum $(C([0, 1], \mathbb{R}), d_1)$ **nicht vollständig**. Wie sieht man dies? Wir betrachten die Folge von Funktionen

$$f_1(x) = 1 - 2x,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{4} \\ 2 - 4x & \text{für} \quad \dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4} \\ -1 & \text{für} \quad \dfrac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Diese Funktion ist offenkundig stetig, allgemein setzen wir

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \\ n - 2nx & \text{für} \quad \dfrac{n-1}{2n} \leq x \leq \dfrac{n+1}{2n} \\ -1 & \text{für} \quad \dfrac{n+1}{2n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Diese Funktionen sind stetig, die Funktionenfolge ist bezüglich d_1 eine Cauchy-Folge, denn für $m \geq n$ kann man $d_1(f_n, f_m)$ abschätzen, man hat zunächst

$$1 \geq |f_m(x)| \geq |f_m(x) - f_n(x)| \geq 0$$

und da $|f_m(x) - f_n(x)| = 0$, falls $|x - \frac{1}{2}\,| > \frac{1}{n}$, ist das Integral

$$\int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx \leq 1 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n}.$$

Ist dann $\varepsilon > 0$ gegeben und wählt man $m \geq n > \frac{2}{\varepsilon}$, so ist

$$d_1(f_n, f_m) \leq \varepsilon,$$

also $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.

Um zu zeigen, daß diese Folge nicht konvergent ist, betrachten wir den punktweisen Limes und erhalten die Funktion

$$g_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Natürlich gibt dies von vorneherein keine Auskunft über das Konvergenzverhalten der Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Metrik d_1, aber vielleicht gibt es zumindest einen Anhaltspunkt. Wir müssen nur zeigen, daß es keine stetige Funktion gibt, die bezüglich der Metrik d_1 Grenzwert der angegebenen Folge ist. Nun, angenommen g sei stetig und es gelte

$$\lim_{n\to\infty} d_1(g, f_n) = 0.$$

Behauptung: dann ist $g(x) > \frac{1}{2}$ auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2})$ und $g(x) < -\frac{1}{2}$ auf $(\frac{1}{2}, 1]$. Dies ergibt dann einen offensichtlichen Widerspruch. Um die aufgestellte Behauptung zu zeigen, nehmen wir an, daß es ein $0 \le x_0 < \frac{1}{2}$ gibt mit

$$g(x_0) \le \frac{1}{2}\,.$$

Aufgrund der Stetigkeit gibt es dann ein Intervall $I \subset [0, \frac{1}{2})$ der Länge $\delta > 0$ mit $g(x) < \frac{3}{4}$ auf I. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $n > N$ impliziert $f_n(x) = 1$ für $x \in I$. Dann ist aber

$$d_1(g, f_n) \ge \delta \min\{|f_n(x) - g(x)| \mid x \in I\} \ge \delta\frac{1}{4}.$$

Dies widerspricht aber der Annahme $\lim_{n\to\infty} d_1(g, f_n) = 0$. Analog beweist man den anderen Teil der Behauptung.

Bemerkung 1.3.3
Die Konstruktion der Vervollständigung des Raumes $C([0,1], \mathbb{R})$ bezüglich d_1 ist eine typische Frage der Funktionalanalysis und es wird einiger Zeit bedürfen, um diese zu beantworten.

Ein weiteres wichtiges Beispiel eines metrischen linearen Raumes sind Funktionen, die mehrfach differenzierbar sind mit einer geeigneten Metrik.

Beispiel 1.3.4
Es sei $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ ein beschränktes Gebiet, so daß $\bar{\Omega}$ kompakt ist. Wir betrachten alle k-mal stetig differenzierbaren Funktionen nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, die samt allen Ableitungen der Ordnungen höchstens k stetig auf $\bar{\Omega}$ fortsetzbar sind, dieser Raum werde mit $C^k(\Omega, \mathbb{R})$ bzw. $C^k(\Omega, \mathbb{C})$ bezeichnet. Dies ist mit den üblichen Operationen ein linearer Raum. Wir definieren eine Metrik d_k durch

$$d_k(f, g) = \max_{|\alpha|\le k} |D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)|,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Mit dieser Metrik wird der zugrunde liegende Raum zum vollständigen metrischen Raum.

Als Quelle für Beispiele dienen auch noch eine Reihe von Folgenräumen.

Beispiel 1.3.5

1. Als erstes wollen wir beschränkte Folgen, d.h. Funktionen von $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, ansehen und setzen

$$c_0 = \{c : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid c \text{ ist beschränkt } \}.$$

   c_0 ist ein linearer Raum, durch

$$d_{c_0}(c^1, c^2) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n^1 - c_n^2|$$

   definieren wir eine Metrik, die diesen Raum zum vollständigen metrischen, linearen Raum macht.

2. Unsere zweite Beispielklasse wird uns noch oft begegnen: sei $p \geq 1$, so setzen wir

$$\ell^p = \left\{ c : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty \right\}.$$

   Dies ist ein linearer Raum, eine Metrik erhält man leicht:

$$d_{\ell^p}(c^1, c^2) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j^1 - c_j^2|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Wir wollen an dieser Stelle auf den Nachweis verzichten, daß dies eine Metrik ist, die ℓ^p zum vollständigen metrischen linearen Raum macht. Wir werden in den Übungen darauf zurückkommen.

Weitere wichtige Beispiele folgen im Kapitel 3.

1.4 Stetige Lineare Abbildungen

Wir beginnen mit metrischen linearen Räumen $(V, d_V), (W, d_W)$. Wir wissen bereits, was es bedeutet, daß eine Abbildung linear ist. Hier wollen wir noch zusätzlich die Stetigkeit hinzunehmen.

Definition 1.4.1

1. *Es seien $(V, d_V), (W, d_W)$ metrische lineare Räume und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ist L zusätzlich stetig, so sprechen wir von einer* stetigen linearen Abbildung.

2. *Ist L ein linearer Isomorphismus und ein Homöomorphismus, so nennen wir L einen* toplinearen Isomorphismus.

Lemma 1.4.2
Es seien $(V, d_V), (W, d_W)$ metrische lineare Räume, $L : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung.

1. *Der Kern von L ist abgeschlossen.*

2. *Das Bild von L ist ein metrischer linearer Raum.*

Beweis. Die erste Aussage folgt daraus, daß $\{0\} \subset W$ abgeschlossen ist, und das Urbild abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen abgeschlossen ist.

Der zweite Punkte ist trivial, die Einschränkung von d_W auf das Bild von L macht dies zum metrischen linearen Raum. □

Oft will man die Menge der stetigen linearen Abbildungen $V \to W$, die ja einen linearen Raum bildet, selbst mit einer Topologie versehen. Wir stellen dies noch ein wenig zurück und beschränken uns dabei auf die Fälle normierter Räume, die wir im nächsten Kapitel einführen wollen.