Kapitel 2

Theoretische Mechanik

Die Differentialgleichungen der mathematischen Physik sind oft zweiter Ordnung, dies ist nicht begründbar, sondern eine Erfahrung. Dadurch muss man in den Bewegungsgleichungen Ort und Geschwindigkeit vorgeben um Eindeutigkeit zu erlangen. Wir beginnen mit der Mechanik nach Newton und betrachten dann die Lagrange'sche Mechanik, die durch ein Extrremalprinzip gekennzeichnet ist.

2.1 Raum, Zeit und Galilei Transformationen

Definition 2.1.1 *Mit $\mathbb{A}^n$ bezeichnen wir den n-der dimensionalen affinen Raum, d.h. $\mathbb{A}^n$ sei eine Punktmenge mit einer Abbildung $v : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}^n$ folgenden Eigenschaften:*

1. *zu jedem Punkt $x \in \mathbb{A}^n$ und jedem $v \in \mathbb{R}^n$ existiert genau ein Punkt $y \in \mathbb{A}^n$ mit $v(x, y) = v$.*
2. *Sind x_1, x_2, x_3 Punkte in $\mathbb{A}^n$, so gilt*

$$v(x_1, x_2) + v(x_2, x_3) = v(x_1, x_3).$$

Bemerkung 2.1.2 v wird oft als Differenz geschrieben, d.h. $v(x, y) = y - x$. Der Raum $\mathbb{R}^n$ wird dann auch als der zugehörige *Differenzenraum* bezeichnet.

Bemerkung 2.1.3 Aufgrund dieser Definition operiert die Gruppe $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{A}^n$ durch

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n,\ (v, x) \mapsto y(x, v). \tag{2.1.4}$$

$\mathbb{A}^n$ wird auf natürlicher Weise mittels

$$d(x, y) = \|v(x, y)\| \tag{2.1.5}$$

zum metrischen Raum. Die Gruppenaktion (2.1.4) ist bezüglich dieser natürlichen Metrik stetig.

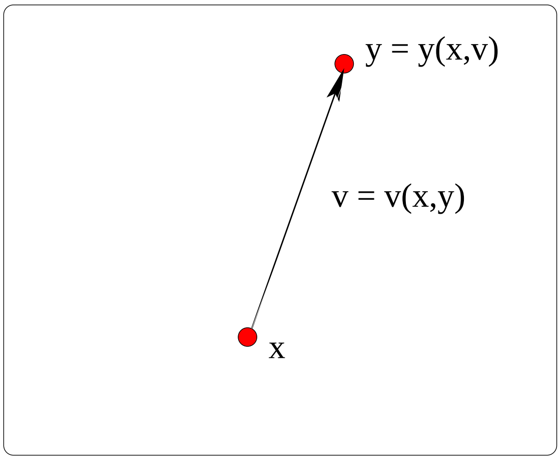

Abbildung 2.1: Punkte und Differenzen im affinen Raum

Definition 2.1.6 *Der affine Raum $\mathbb{A}^n$, versehen mit der Metrik d heißt euklidischer Raum und wird mit $\mathbb{E}^n$ bezeichnet.*

Definition 2.1.7 *Die durch (2.1.4) definierte Bewegungsgruppe auf $\mathbb{A}^4$ nennen wir die* Gruppe der Parallelverschiebungen.

Definition 2.1.8 *Den Raum $\mathbb{A}^4$ bezeichnen wir als* Welt. *Ein lineares Funktional $t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ heißt* Zeit. *Ein Punkt $x \in \mathbb{A}^4$ wird* Ereignispunkt *genannt. Zwei Ereignisse x_1, x_2 heißen* gleichzeitig, *falls $v(x_1, x_2) \in \ker t$ ist. $t(y - x) = t(v(x, y))$ wird als das* Zeitintervall *zwischen den Ereignissen x und y bezeichnet.*

Lemma 2.1.9 *Die Menge der zu einem gegebenen Ereignispunkt gleichzeitigen Ereignispunkte bildet einen dreidimensionalen affinen Unterraum von $\mathbb{A}^4$. Der Kern von t besteht aus denjenigen Parallelverschiebungen, die einen Ereignispunkt in gleichzeitige Ereignispunkte überführen.*

Beweis. Klar! □

Wir betrachten nun affine Abbildungen von $\mathbb{A}^4$ in sich.

Definition 2.1.10 *Eine Abbildung $\tau : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ heißt* affin, *falls es eine lineare Abbildung $A_\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt mit*

$$v(\tau(x), \tau(y)) = A_\tau v(x, y) \; \forall (x, y) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n.$$

Man kann den Raum $\mathbb{A}^n$ nach Auszeichnung eines Punktes als Nullpunkt und einer Basis im $\mathbb{R}^n$ mit Koordinaten versehen. Eine affine Abbildung kann man damit als Hintereinanderausführung einer Parallelverschiebung und einer linearen Abbildung auffassen. Es sei **Aff**(n) die Menge aller affinen Abbildungen τ, für die A_τ regulär ist. **Aff**(n) bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Dies ist eine *nicht kompakte Lie Gruppe*[1]. Eine wichtige Untergruppe bilden diejenigen Abbildungen, die die Metrik erhalten:

$$\mathbf{Euk}(n) = \{\tau \in \mathbf{Aff}(n) \mid d(\tau(x), \tau(y)) = d(x, y)\}\,. \tag{2.1.11}$$

Definition 2.1.12 *Diese Gruppe heißt die* euklidische Gruppe*.*

Definition 2.1.13 *Der Galilei*[2] *Raum* $\mathbb{G}$ *ist definiert als das Quadrupel* $\mathbb{G} = (\mathbb{A}^4, t, \mathbb{R}^3, d_g)$ *mit Welt* $\mathbb{A}^4$*, Zeit(funktional)* t*, Parallelverschiebungen in* $\ker t = \mathbb{R}^3$*, welche die Gleichzeitigkeit erhalten und der Metrik* d_g *auf* $\mathbb{R}^3$*,*

$$d_g(v, w) = \|v - w\|.$$

Definition 2.1.14 *Eine Galilei Transformation ist eine euklidische Abbildung* $\tau : \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^4$ *welche die Struktur des Galileiraumes erhält, insbesondere gilt für die (duale Abbildung* A_τ^* *der zugeordneten) lineare(n) Abbildung* A_τ

$$(A_\tau)^* t = t, \quad A_\tau\Big|_{\ker t} \in \mathbf{O}(3).$$

Mit $\mathbf{Gal}(\mathbb{G})$ *bezeichnen wir die* Gruppe der Galilei Transformationen *des Galilei-Raumes* $\mathbb{G}$*.*

Als Spezialfall betrachten wir (durch Wahl von Ursprung und Basis) $\mathbb{A}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ mit t als Projektion auf die erste Koordinate. In diesem Raum finden wir spezielle Galilei Transformationen, nämlich

1. zeiterhaltende Parallelverschiebungen,
2. für festes $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ $(s, v) \mapsto (t + s, x + sv)$, eine *gleichförmige Bewegung*,
3. für eine Abbildung $A \in \mathbf{O}(3)$ $(t, x) \mapsto (t, Ax)$.

[1] Marius Sophus Lie (17.12.1842-18.2.1899) norwegischer Mathematiker, der auch in Leipzig lehrte. Er entwickelte die Theorie der sogenannten Transformationsgruppen, die weitreichende Anwendungen in Algebra, Analysis und in der Theorie der Differentialgleichungen haben.

[2] Galileo Galilei (15.2.1564-8.1.1642), Physiker, Mathematiker und Astronom, er studierte zunächst Medizin, widmete sich danach dem Werk von Archimedes, entdeckte die Konstanz der Schwingungsdauer des Pendels, baute ein Fernrohr und entdeckte die Monde des Jupiters. Damit fand er starke Indizien für das Kopernikanische Weltbild. Ein lehrreicher Dialog zwischen einem Vertreter des alten und des neuen Weltbildes findet in seinen Dialogen über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme [?] statt. Damit machte er die Inquisition auf sich aufmerksam und wurde unter der Androhung von Folter zum Widerruf seiner Lehren gezwungen. Unter Aufsicht der Inquisition konnte er seine Studien fortsetzen und schrieb im Jahre 1636 Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenschaften, die Mechanik und die lokale Bewegung betreffend. Darin begründete er das Fallgesetz, gab experimentelle Befunde an und beschäftigte sich mit dem Aufbau der Materie. Er stellte sich diese als aus vielen kleinsten (unteilbaren) Teilchen zusammengesetzt vor. In der Mathematik konnte er Beiträge zum Begriff der Mächtigkeit unendlicher Mengen schaffen. Er trat für die Trennung der Naturwissenschaften von Theologie und Philosophie ein. Er gilt als Begründer der experimentellen Methode in den Naturwissenschaften.

Daraus erhält man die nachfolgende Aussage.

Lemma 2.1.15 $\mathbf{Gal}(\mathbb{G})$ *ist eine zehndimensionale Lie Gruppe.*

Wie gesehen, können wir von der Gleichzeitigkeit verschiedener Ereignispunkte sprechen, jedoch, macht es keinen Sinn von zwei verschiedenen Ereignispunkten zu sprechen, die am gleichen Ort sind. Ein mit der Galileistruktur verträgliches Koordinatensystem erhält man, indem man neben der Zeit drei Funktionale auf $\ker t$, dem Raum der die Gleichzeitigkeit erhaltenden Parallelverschiebungen, betrachtet und diese trivial auf $\mathbb{R}^4$ fortsetzt.

Jeder Galileiraum ist isomorph zu

$$\mathbb{A}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

mit Zeitachse $\mathbb{R}$ und zeiterhaltenden Parallelverschiebungen $\mathbb{R}^3$. Diesen speziellen Galilei Raum nennt man den *Galileischen Koordinatenraum*.

Hier macht es nun Sinn von verschiedenen Ereignispunkten am gleichen Ort zu sprechen! Sei X eine beliebige Menge, $\psi : X \to \mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ eine bijektive Abbildung, diese definiert in natürlicher Weise ein Koordinatensystem auf X. Wir nennen zwei solche Koordinatensysteme, induziert durch Bijektionen ψ_1, ψ_2 *gleichförmig bewegt*, falls $\psi_1 \circ \psi_2^{-1} \in \mathbf{Gal}(\mathbb{G})$.

Definition 2.1.16 *Zwei Koordinatensysteme auf einer Menge X, induziert durch Bijektionen $\psi_1, \psi_2 : X \to \mathbb{G}$ heißen gleichförmig zueinander bewegt, falls*

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} \in \mathbf{Gal}(\mathbb{G})$$

ist. Zwei gleichförmig bewegte Koordinatensysteme werden auch Inertialsysteme *genannt.*

Wir interessieren uns zunächst für die Bewegung von Massepunkten. Dazu müssen wir zunächst eine Bewegung im $\mathbb{R}^3$ beschreiben.

Definition 2.1.17

1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, eine (mindestens zweimal) differenzierbare Abbildung $x : I \to \mathbb{R}^3$ wird* Bewegung *im $\mathbb{R}^3$ genannt.*

2. *Der Vektor der* Geschwindigkeit *im Punkt $t_0 \in I$ wird mit*

$$\dot{x}(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0)$$

bezeichnet und als die Ableitung der Bewegung im Punkt t_0 definiert.

3. *Die zweite Ableitung*

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

wollen wir den Vektor der Beschleunigung *der Bewegung x im Punkte $t_0 \in I$ nennen.*

4. *Den Graphen einer Bewegung bezeichnen wir als* Weltlinie.

Bemerkung 2.1.18 Man beachte, dass Weltlinien Teilmengen des Galilei Raumes $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sind. Bewegungen von n Punkten führen auf n Weltlinien.

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen benötigen wir zwei Tatsachen die der Beobachtung unserer Umwelt entnommen werden: der Zustand eines Systems wird durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit vollständig bestimmt und die physikalischen Gesetze sind in Inertialsystemen gleich. Wir formulieren dies als Axiome.

Axiom 1 Eine Bewegung hängt nur vom Anfangsort und der Anfangsgeschwindigkeit ab, d.h. eine Gleichung der Form

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \tag{2.1.19}$$

bestimmt die Bewegung.

Axiom 2 (Galileische Relativität) Es gibt eine Klasse von Inertialsystemen, so dass Galileitransformationen die Weltlinien eines Systems wieder in Weltlinien dieses Systems überführen. (Wir nennen dies auch Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen.)

Wir sprechen von der Gleichung (2.1.19) als *konstituierende Gleichung* oder von der Newtonschen Bewegungsgleichung[3], spezielle Eigenschaften eines zu untersuchenden Systems schlagen sich in der Form von f nieder. Allerdings ist aufgrund von Axiom 2 nicht jedes f zugelassen. Wir werden dem gleich nach gehen. Zuvor noch eine Bemerkung: die beiden Axiome lassen sich nicht aus anderen Prinzipien ableiten, sie entsprechen der Beobachtung unserer realen Welt und experimentellen Befunden. Wir wissen allerdings, dass Axiom 2 in relativistischen Systemen nicht gilt, dort muss Axiom 2 durch entsprechende andere Axiome ersetzt werden. Die Koordinatentransformationen, die die Gleichungen erhalten sind dann nicht mehr durch die Galilei Gruppe gegeben, sondern durch die sogenannte Lorentz[4] Gruppe.

[3]Isaac Newton (4.1.1643–31.3.1727) Berühmtester englischer Mathematiker, Physiker und Astronom, einer der wenigen Naturwissenschaftler, dem die Ehre zuteil wurde, in Westminster Abbey begraben zu werden, legte die Grundlagen des Verständnisses der Schwerkraft und damit der klassischen Mechanik, die er auf axiomatische Grundlagen stellte. Daneben hatte er als erster Einsicht in die Farbenlehre und begründete die moderne Optik. In der Mathematik war er einer der Wegbereiter der Differentialrechnung. Er erklärte Ebbe und Flut, vor allem auch den 12 stündigen Rhythmus und versuchte aus der Höhe der beobachteten Flut die Lage des gemeinsamen Schwerpunktes des Erde/Mond Systems zu berechnen. In seinem Werk Prinicipia Mathematicae wird dieser Schwerpunkt irrtümlich als außerhalb der Erde liegend angegeben.

[4]Hendrik Antoon Lorentz (18.7.1853-4.2.1928) war niederländischer Physiker, der in Leiden und Haarlem forschte und lehrte. Er erhielt 1902 den Nobelpreis für Physik. Seine Entdeckungen umfassten die Lorentz Kontraktion, die Lorentz Kraft und vor allem auch die Lorentz Transformation. Diese spielt in der speziellen Relativitätstheorie eine wesentliche Rolle. Sie erlaubt Wechsel von Inertialsystemen unter Beibehaltung der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Lemma 2.1.20 *Die Invarianz der Newtonschen Bewegungsgleichung gegen Galilei Transformationen führt zu folgenden Spezialisierungen:*

1. *Die Newtonsche Bewegungsgleichung ist autonom.*
2. *Die Gleichung hängt nur von der relativen Lage der Punkte $x_j - x_k$ ab.*
3. *Die Gleichung hängt nur von den relativen Geschwindigkeiten ab.*

Jede Gleichung mit diesen Restriktionen ist invariant unter allen Galileitransformationen,d.h. die Bewegung von n Punkten wird beschrieben durch

$$\ddot{x}^{(k)} = f(x^{(j)} - x^{(l)}, \dot{x}^{(s)} - \dot{x}^{(r)}), \tag{2.1.21}$$

dabei ist jede Komponente $x^{(j)}$ eine Bewegung eines Punktes, also $x^{(j)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Beweis.

1. Die Invarianz gegenüber Zeitverschiebungen führt zur Autonomie der Gleichung.
2. Folgt aus der Invarianz gegenüber zeiterhaltenden Parallelverschiebungen.
3. Folgt aus der Invarianz gegenüber gleichförmigen Bewegungen.

□

2.2 Phasenraum, Phasenfluss und Energie

Man beachte, dass die Restriktionen an die Newtonsche Bewegungsgleichung unter der Annahme hergeleitet wurden, dass alle Galilei Transformationen zugelassen sind. Betrachten wir spezielle Bewegungen auf der Erdoberfläche oder im erdnahen Raum ist es oft günstig, spezielle Koordinaten zu wählen. In diesen Koordinaten gelten dann die oben hergeleiten Restriktionen nicht unbedingt. Wir betrachten zunächst den freien Fall. Seit Galilei kennt man die Bewegungsgleichung für den freien Fall in der Nähe der Erdoberfläche

$$\ddot{x} = -g, \tag{2.2.1}$$

wobei g den Wert $g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ hat. Ist x_0 der Anfangsort (Höhe über dem Erdboden), v die Anfangsgeschwindigkeit, so gilt

$$x(t) = x_0 + vt - gt^2.$$

Man rechnet dies leicht nach.

Als Beispiel für die Bewegungsgleichung wollen wir die Bewegung eines Pendels ansprechen. Wir betrachten als Ursprung den Aufhängepunkt des Pendels. Weiterhin nutzen wir die bekannte Tatsache, dass das Pendel innerhalb einer Ebene (beachte aber das Foucaultsches[5] Pendel) schwingt. Die y Achse sei nach oben gerichtet, die x-Achse nach rechts, mit α bezeichnen wir den Winkel zwischen der Ausrichtung der (negativen) y-Achse und der Auslenkung des Pendels. Mit ℓ bezeichnen wir die Länge des Pendelarms. Die Erdbeschleunigung zerlegt sich in zwei Teile, einen parallel zum Pendelarm, eine senkrecht. Erstere „hält den Faden gespannt", letztere bewirkt eine Veränderung des Winkels, als Bewegungsgleichung erhalten wir

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{2\pi\ell}\sin\alpha. \tag{2.2.2}$$

Bemerkung 2.2.3 Dieses Beispiel deutet darauf hin, dass es sinnvoll sein kann, das System nicht in einem euklidischen Raum zu modellieren, sondern auf Mannigfaltigkeiten. Wir werden darauf zurückkommen.

Definition 2.2.4 *Führt ein System auf eine Differentialgleichung der Form*

$$\ddot{x} = f(x) \tag{2.2.5}$$

mit $x \in \mathbb{R}$, so sprechen wir von einem System mit einem Freiheitsgrad.

In einem System mit einem Freiheitsgrad definieren wir für eine Bewegung eines Massenpunktes der Masse m mit Anfangslage (zum Zeitpunkt t_0) x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 die Energie. Als wichtiges Prinzip erweist sich die zeitliche Konstanz der Energie.

Definition 2.2.6 *Die quadratische Form $\tilde{T}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ heißt* kinetische Energie *der Bewegung, $T(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2$* normalisierte kinetische Energie, *$U(x,\dot{x}) = -\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$ die* potentielle Energie *und $E(x,\dot{x}) = T(x,\dot{x}) + U(x,\dot{x})$ die* Gesamtenergie.

Bemerkung 2.2.7 Aus der potentiellen Energie ist die Bewegungsgleichung vollständig beschrieben. Sie ist invariant gegen Verschiebungen um einen konstanten Betrag, d.h. U und $U + c$ führen auf die selbe Bewegungsgleichung.

In diesem einfachen Beispiel sehen wir Prototypen zweier wichtiger Prinzipien, dem Erhalt der Energie, dem Inhalt des nächsten Satzes und der Existenz von Erhaltungsgrößen aus Invarianzeigenschaften der Gleichung (Satz von Emmy Noether).

Satz 2.2.8 *In einem System mit einem Freiheitsgrad ist die Gesamtenergie konstant.*

---

[5] Jean Bernard Léon Foucault (18.9.1819-11.2.1868) bestimmte die Lichtgeschwindigkeit und bewies die Rotation der Erde mit dem nach ihm benannten Pendel.

Beweis. Wir schreiben $E(t)$ für

$$E(t) = E(x(t), \dot{x}(t))$$

und entsprechend $T(t)$, bzw. $U(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\ddot{x} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \dot{x}f(x) \\ &= -f(x)\dot{x} + \dot{x}f(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Wichtig für diese Betrachtung ist, dass f nicht explizit von $\dot{x}$ abhängt.

Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ist bekannt, dass eine Gleichung der Form (2.2.5) in ein System zweiter Ordnung umgeschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x).\end{aligned}\right\} \tag{2.2.9}$$

Wir nennen die Ebene $\mathbb{R}^2$ die Ort und Geschwindigkeit des Massenpunktes angibt, die *Phasenebene*, die rechte Seite der Gleichung (2.2.9) als *Vektorfeld der Phasengeschwindigkeit*, den der Gleichung (2.2.9) zugeordneten Fluss Φ bezeichnen wir als *Phasenfluss*. Jedem Anfangswert x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 wird die *Phasenkurve* $\Phi(t, x_0, v_0)$ zugeordnet.

Bemerkung 2.2.10 Die zeitliche Konstanz der Energie impliziert, dass Niveaulinien der Energie aus Phasenkurven zusammengesetzt sind.

Bemerkung 2.2.11 Die linearisierte Schwingungsgleichung hat die Form $\ddot{x} = -x$. Hier ist $T = \dot{x}^2/2$ und $U = x^2/2$. Die Niveaulinien von E sind damit Kreise und bestehen aus jeweils einer Phasenkurve.

Bemerkung 2.2.12 Wir betrachten ein System mit einem Freiheitsgrad und nehmen an, die potentielle Energie sei durch die Funktion $U(x)$ gegeben. Wir wollen einige einfache Beobachtungen für die Bewegung ableiten. Die Gesamtenergie hat dann die Form

$$E(x, y) = \tfrac{1}{2}y^2 + U(x).$$

Wir beobachten:

1. Gleichgewichtslagen liegen auf der Achse $y = 0$. Dies folgt sofort aus der Gestalt des Vektorfeldes der Phasengeschwindigkeit.

2. Ein Punkt der Form $(x, y) = (\xi, 0)$ ist eine Gleichgewichtslage, genau dann, wenn ξ ein kritischer Punkt von U ist. Folgt ebenso durch Inspizieren der Gleichung.

3. In jedem Nichtgleichgewichtspunkt sind die Energieniveaus lokal durch glatte Kurven gegeben. Dazu beachtet man, dass entweder in Punkten der Form $(x, y),\ y \neq 0$ die partielle Ableitung nach y regulär ist, oder in Punkten der Form $(x, 0)$ die partielle Ableitung nach x regulär ist und damit der Satz über implizite Funktionen eine lokal glatte Kurve für das Energieniveau $E = c$ liefert.

Wir kommen nun zu Systemen mit mehreren Freiheitsgraden, deren vollständiges Studium unsere Möglichkeiten weit überschreitet, jedoch wollen wir auch hier einige wichtige Begriffe und die damit beschriebenen Phänomene unter die Lupe nehmen.

Definition 2.2.13 *Unter einem System mit n Freiheitsgraden verstehen wir ein durch die Gleichung*

$$\ddot{x} = f(x)$$

beschriebenes System, wobei eine Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld ist.

Definition 2.2.14 *Ein System mit n Freiheitsgraden heißt* konservativ, *falls es eine Funktion $U : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ gibt, mit $-f = \operatorname{grad} U$. U wird dann, wie zuvor, als potentielle Energie bezeichnet. Die Bewegungsgleichung lautet dann*

$$\boxed{\ddot{x} = -\nabla U.}$$

Definition 2.2.15 *Die Bilinearform*

$$T = \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$$

nennen wir die kinetische Energie. *Die* Gesamtenergie *ist wie vorher als $E = T + U$ definiert.*

Im Unterschied zu Systemen mit einem Freiheitsgrad, kann in Systemen mit zwei und mehr Freiheitsgraden nicht immer eine potentielle Energie eingeführt werden.

Satz 2.2.16 *In konservativen Systemen mit n Freiheitsgraden bleibt die Energie längs Bewegungen konstant.*

Beweis.

$$\frac{dE}{dt} = \langle \dot{x}, \ddot{x} \rangle + \langle \operatorname{grad} U, \dot{x} \rangle = \langle \ddot{x} - f(x), \dot{x} \rangle = 0$$

□

Sei nun $n = 2$. In diesem Fall können wir das System als gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung im $\mathbb{R}^4$ auffassen

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \dot{x}_1 &=& y_1, & \dot{x}_2 &=& y_2, \\ \dot{y}_1 &=& -\dfrac{\partial U}{\partial x_1}, & \dot{y}_2 &=& -\dfrac{\partial U}{\partial x_2}. \end{array}\right\} \tag{2.2.17}$$

Der zugehörige Phasenraum ist der $\mathbb{R}^4$ und unter üblichen Wachstumsbeschränkungen erzeugt das Vektorfeld (2.2.17) einen Phasenfluß der für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist. Die Bewegung des Massepunktes erhält man durch Projektion auf die ersten beiden Koordinaten. Die auf diese Weise erhaltenen Kurven nennt man *Orbits*. Im Gegensatz zu Phasenkurven können sich Orbits schneiden. Wie im Fall eines Freiheitsgrades kann man auch hier die Erhaltung der Energie zu einer Reduktion ausnutzen. Sei E_0 die Energie im Anfangszustand, also

$$E_0 = \frac{|v_0|^2}{2} + U(x_0).$$

Dann liefert die Gleichung $E = E_0$ eine Hyperfläche Π_{E_0} die unter dem Phasenfluss invariant ist.

Beispiel 2.2.18 Wir wollen nun das linearisierte, sphärische Pendel ansehen. Die potentielle Energie hat die Form

$$U = -\frac{x_1^2 + \omega^2 x_2^2}{2}$$

Aufgabe 2.2.19

1. Für $\omega = 1$ sind die Niveauflächen der Energie Sphären S^3 im vierdimensionalen Raum, die Phasenkurven auf diesen Sphären sind die Großkreise.

2. Die Menge der Phasenkurven ist diffeomorph zur Sphäre S^2. Genauer gesagt es gibt eine differenzierbare Abbildung $w : S^3 \to S^2$, mit folgenden Eigenschaften: w ist surjektiv, das Urbild jedes Punktes ist ein Großkreis, verschiedene Punkte haben disjunkte Urbilder. (Hinweis: Man betrachte die sogenannte Hopf[6] Abbildung $w = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$).

3. Wie sehen die Orbits dieses Systems aus?

Beispiel 2.2.20 Wir wollen uns nun den Fall $\omega \neq 1$ ansehen. In diesem Fall ist die Mannigfaltigkeit $E = c$ gegeben durch ein Ellipsoid

$$\frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{x_1^2 + \omega^2 x_2^2}{2} = c.$$

Dieses bildet eine invariante Mannigfaltigkeit. Für die weitere Beschreibung des Phasenflusses ist nun wichtig ob ω rational oder irrational ist. Wir zerlegen die Energie in zwei Anteile

$$E_i = \frac{y_i^2}{2} + \mu_i \frac{x_i^2}{2}$$

mit $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \omega^2$. Für die Bewegung mit Anfangswert $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $v^0 = (v_1^0, v_2^0)$ betrachten wir die Teilsysteme vom Freiheitsgrad 1 gegeben durch durch die erste, bzw. zweite Gleichungen. Für beide gilt

[6]Heinz Hopf (19.11.1894-3.6.1971) war ein bedeutender Vertreter der algebraischen Topologie, insbesondere seine Arbeit zur Homotopietheorie von Sphären war bahnbrechend.

der Energieerhaltungssatz und deshalb zerfällt unser Gesamtsystem in zwei unabhängige Systeme. Für rationales ω führt dies auf sogenannte Lissajous[7]. Wir zeigen hier einige dieser Figuren, man erhält sie aus Überlagerungen periodischer Bewegungen in orthogonalen Räumen:

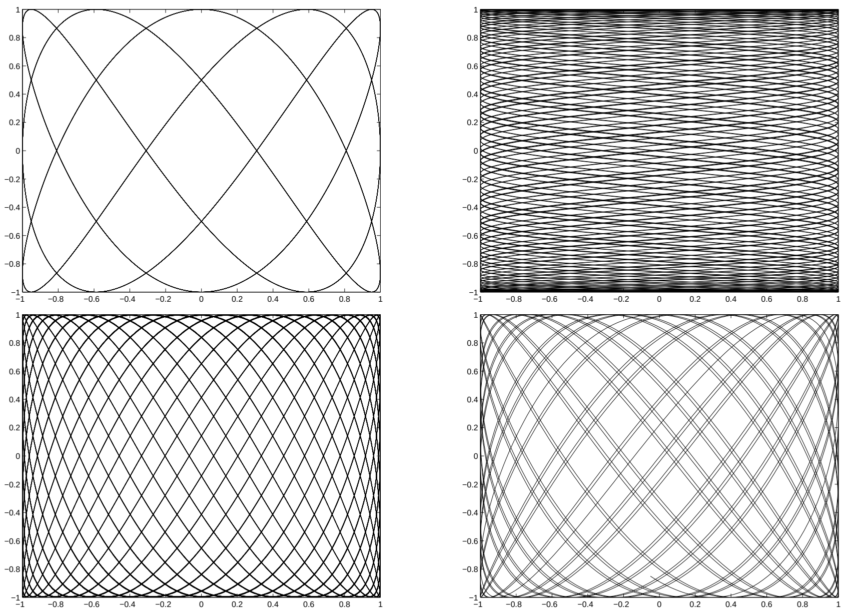

Abbildung 2.2: Lissajous Figuren

Aufgabe 2.2.21

1. Man zeige, ist ω irrational, so liegt die Flusslinie zu einem gegebenen Paar von Anfangsort und Ausgangsgeschwindigkeit dicht auf der Fläche des zugehörigen Energieniveaus.
2. Man überlege sich typische Formen eines Orbits bei rationalem ω.

2.3 Kraft, Kraftfelder und Potential

Definition 2.3.1 *Es sei x ein Massepunkt der Masse m. Auf x wird eine* Kraft *F ausgeübt, falls der Vektor der Beschleunigung $\ddot{x}$ von Null verschieden ist. F ist ein Vektor in Richtung $\ddot{x}$ mit*

$$\|F\| = m\|\ddot{x}\|.$$

Ein Kraftfeld *$F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld, das an jedem Punkt x auf eine Masse m eine Beschleunigung $\frac{1}{m}F(x)$ ausübt. Entsprechend definieren wir eine normalisierte Kraft, d.h. Kraft pro Masseneinheit (vgl. die Definition 2.2.6 einer normalisierten kinetischen Energie) und ein normalisiertes Kraftfeld.*

[7] Jules Antoine Lissajous (4.3.1822-24.6.1880) frz. Physiker, befasste sich mit der visuellen Darstellung von Schwingungen, er entdeckte ein Verfahren zur optischen Überlagerung zweier Schwingungen

Bemerkung 2.3.2 Im folgenden werden wir oft normalisierte Kraft und normalisiertes Kraftfeld anstatt Kraft und Kraftfeld verwenden, wenn keine Verwechslung möglich ist, auch ohne explizit darauf hinzuweisen. Man beachte, dass eine normalisierte Kraft nichts anderes als eine Beschleunigung ist, man könnte daher auch ohne den Begriff der Kraft auskommen, andererseits kommt er doch unserer Vorstellung sehr entgegen.

Definition 2.3.3 *Es sei S die Phasenkurve $t \mapsto x(t)$ und F ein (normalisiertes) Kraftfeld. Die* Arbeit *von F* längs der Kurve *ist gegeben durch das Kurvenintegral*

$$A(F,S) = \int_S F dS = \int_{t_0}^{t} \langle F(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt \tag{2.3.4}$$

Eine Bewegung im Kraftfeld wird durch die Gleichung

$$\ddot{x} = F(x)$$

beschrieben. Damit können wir ein konservatives Kraftfeld definieren, wie zuvor ein konservatives System mit n Freiheitsgraden: ein Kraftfeld heißt *konservativ*, wenn es ein Potential besitzt.

Satz 2.3.5 *Ein Kraftfeld ist genau dann konservativ, wenn die Arbeit längs eines Weges nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt.*

Beweis. Folgt sofort aus Sätzen der Analysis. □

Für konservative Felder ist die Arbeit längs einer Kurve gleich der Differenz der potentiellen Energie am Endpunkt und am Anfangspunkt.

Aufgabe 2.3.6 Man zeige, dass das Feld $F_1 = x_2,\ F_2 = -x_1$ kein Potential besitzt.

Wir wollen nun Bewegungen im Zentralfeld betrachten.

Definition 2.3.7 *Es sei $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\tau : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ eine euklidische Abbildung mit linearer Abbildung $A_\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. F heißt* invariant *unter τ, falls für alle $x \in \mathbb{E}^n$ gilt*

$$F(\tau(x)) = A_\tau F(x).$$

Definition 2.3.8 *Ein Vektorfeld $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^n$ wird* Zentralfeld *genannt, falls es ein $x_0 \in \mathbb{E}_n$ gibt, so dass F invariant gegen alle euklidischen Transformationen τ mit $\tau(x_0) = x_0$ ist. Wir nennen dann x_0 den* Ursprung *in $\mathbb{E}^n$.*

Hilfssatz 2.3.9 *Es seien $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zwei differenzierbare Abbildungen, dann gilt*

$$\frac{dx \times y}{dt} = \dot{x} \times y + x \times \dot{y} \tag{2.3.10}$$

Beweis. Das Vektorprodukt ist eine bilineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. □

Satz 2.3.11 *Es sei $x(t)$ eine Bewegung im ebenen Zentralfeld (eingebettet in einen orientierten $\mathbb{R}^3$). Dann ist der Drehimpuls M längs der Bewegung konstant.*

Beweis. $M = x \times \dot{x}$, also hat man aufgrund des Hilfssatzes

$$\dot{M} = \dot{x} \times \dot{x} + x \times \ddot{x}$$

Der erste Summand ist offenkundig Null, der zweite ist ebenso Null, da die Beschleunigung aufgrund des Zentralfeldes radial ist und demzufolge x und $\ddot{x}$ linear abhängig sind. □

Der Drehimpulserhaltungssatz ist eine andere Formulierung des Keplerschen[8] Gesetzes, welches besagt, dass der Radiusvektor der Bewegung in gleichen Zeiträumen gleiche Flächen überstreicht.

Abbildung 2.3: Johannes Kepler und Galileo Galilei

Sei $S(t_1, t_2)$ die vom Radius im Zeitintervall (t_2, t_1) überstrichene Fläche. Man überlegt sich leicht, dass S nach beiden Argumenten stetig differenzierbar ist. Wir halten nun t_2 fest und betrachten

$$S(t) = S(t, t_2).$$

Damit liest sich das Keplersche Gesetz

[8]Johannes Kepler (27.12.1571-15.11.1630) kam aus bescheidenen Verhältnissen und studierte mit einem Stipendium Theologie. Er wurde dabei u.a. in das kopernikanische Weltbild eingeführt. Er arbeitete zunächst als Lehrer und Mathematiker. Da die metereologischen Vorhersagen seines Kalenders eintrafen machte er schnell Karriere als Astrologe. Er machte die Bekanntschaft von Tycho Brahe und wurde dessen Nachfolger als kaiserlicher Mathematiker. Aus dem Datenmaterial der Beobachtungen des Mars stellte er eine Übereinstimmung mit der Ellipse als Umlaufbahn fest. In der Folge beschäftigte er sich mit Kegelschnitten und stellte die nach ihm benannten Gesetze auf.

Satz 2.3.12 (Kepler Gesetz)

(2.3.13) $$\ddot{S} = 0.$$

Aufgabe 2.3.14 Man zeige, der Drehimpulserhaltungssatz ist äquivalent zum Kepler Gesetz. Was folgt aus diesem für stark elliptische Umlaufbahnen im Zentralfeld?

Der Drehimpulserhaltungssatz erlaubt uns die Bewegung im Zentralfeld auf eine Bewegung mit einem Freiheitsgrad zurückzuführen.

Hilfssatz 2.3.15 *Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir die Differentiationsformel*

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

Satz 2.3.16 *Der Drehimpulserhaltungssatz erlaubt die Reduktion des Problems der Bewegung im Zentralfeld auf ein Problem mit einem Freiheitsgrad mit potentieller Energie*

$$V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Beweis. In Polarkoordinaten ist der (Betrag des) Drehimpuls(es) gegeben durch

$$M(t) = \dot{\varphi}(t)r^2(t).$$

Mit der Beziehung aus dem Hilfssatz erhalten wir

$$\ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi.$$

Im Zentralfeld gilt (natürlich)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r.$$

damit ergibt sich als Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= -\frac{\partial U}{\partial r} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{r^2}$$

mit konstantem M. Daraus ergibt sich

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r\frac{M^2}{r^4} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

mit

$$V = U + \frac{M^2}{2r^2}.$$

□

Es sei $x \in \mathbb{E}^3$. $U : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}$ ein Potentialfeld, wir wollen die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

untersuchen.

Setzen wir die Energie als $E = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + U(x)$ und den Drehimpuls als $M = x \times \dot{x}$ so gilt Energie- und Drehimpulserhaltung.

Satz 2.3.17 *Im Zentralfeld ist jede Bewegung eben.*

Beweis. Der Drehimpulserhaltung besagt, dass $M(t) = M_0$ konstant ist. Wir betrachten

$$\langle M, x \rangle = \langle x \times \dot{x}, x \rangle = 0.$$

Also ist $x(t)$ immer in der zu M_0 senkrechten Ebene. □

2.4 Die Bewegung von n Massenpunkten

Es seien n Massenpunkte $x_i \in \mathbb{E}^3$ der jeweiligen Masse m_i gegeben. Wir erhalten n Weltlinien, für jede eine Abbildung

$$x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3.$$

Fassen wir diese zusammen erhalten wir eine Abbildung

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{3n}.$$

Es sei F_i die auf den i-ten Massenpunkt wirkende Kraft. Die Bewegungsgleichung lautet nun

$$m_i \ddot{x}_i = F_i.$$

In Vektornotation erhalten wir mit

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

und der Diagonalmatrix

$$M = \text{diag } (M_1, \ldots, M_n)$$

die Gleichung

$$M\ddot{X} = F.$$

Definition 2.4.1 *Der* Konfigurationsraum *eines Systems von n Massepunkten ist $\mathbb{E}^{3n} = \mathbb{E}^3 \times \cdots \times \mathbb{E}^3$, welches wiederum ein euklidischer Raum ist.*

Im Zweikörperproblem gilt oft

$$F_1 = -F_2 = c(x_2 - x_1).$$

In diesem Fall spricht man von *Wechselwirkungskräften*. Allgemeiner bezeichnet man im n-Körpersystem Kräfte F_{ij} als Wechselwirkungskräfte, wenn gilt $F_{ij} = -F_{ji} = c(x_j - x_i)$.

Definition 2.4.2 *Ein System heißt* abgeschlossen *wenn alle Kräfte Wechselwirkungskräfte sind.*

In einem abgeschlossenen System hat man für F_i die Darstellung

$$F_i = \sum_{j=0, j\neq i}^{n} F_{ij}.$$

Sei nun ein nicht abgeschlossenes System gegeben. Wir schreiben F_i in der Form

$$F_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} F_{ij} + F_i'.$$

Hier bezeichnen F_{ij} wieder die Wechselwirkungskräfte und F_i' wird als äußere Kraft bezeichnet.

Definition 2.4.3 *In einem System von n Massenpunkten bezeichnet*

$$x = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum m_i}$$

den Massenmittelpunkt.

Aufgabe 2.4.4 Der Massenmittelpunkt hängt nicht von der Wahl der Koordinaten oder des Ursprungs ab.

Wir wollen nun die Bewegung der n-Massenpunkte mit der Bewegung des Massenmittelpunktes in Beziehung setzen.

Definition 2.4.5 *Der* Gesamtimpuls *eines Systems ist definiert als*

$$P = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i.$$

Satz 2.4.6 *Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses ist gleich der Summe der äußeren Kräfte, d.h.*

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_i'.$$

Beweis.

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i,j} F_{ij} + \sum_i F_i' = \sum_i F_i',$$

denn die Summe aller Wechselwirkungskräfte ist wegen $F_{ij} = -F_{ji}$ Null. □

Damit folgt sofort:

Korollar 2.4.7 *Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems ist konstant.*

Korollar 2.4.8 *Der Gesamtimpuls ist gleich dem Impuls des Punktes im Massenmittelpunkt mit Gesamtmasse $\sum_{i=1}^{n} m_i$.*

Satz 2.4.9 *Der Massenmittelpunkt bewegt sich, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt sei, und alle äußeren Kräfte auf ihn einwirken.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} &= \frac{\sum m_i \dot{x}_i}{\sum m_i} \\ &= \frac{P}{\sum_i m_i} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_i m_i \ddot{x} = \sum m_i \ddot{x}_i = \sum F_i'.$$

Eine unmittelbare Konsequenz ist das folgende Korollar.

Korollar 2.4.10 *Im einem abgeschlossenen System bewegt sich der Massenmittelpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Geraden.*

Es sei 0 der Ursprung in $\mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3$.

Definition 2.4.11 *Der* Drehimpuls *eines Punktes x_i bezüglich 0 ist gegeben durch*

$$M = x_i \times m_i \dot{x}_i$$

und der Gesamtdrehimpuls des Systems bezüglich 0 *durch*

$$M = \sum_i x_i \times m_i \dot{x}_i.$$

Satz 2.4.12 *Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses M ist gegeben durch die Summe der auf die Massepunkte durch die äußeren Kräfte ausgeübten Drehmomente.*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= \sum_i \dot{x}_i \times m_i \dot{x}_i + \sum_i x_i \times m_i \ddot{x}_i \\
&= 0 + \sum_i x_i \times F_i \\
&= \sum_i x_i \times (\sum_{j, i \neq j} F_{ij} + F_i') \\
&= \sum_i x_i \times F_i',
\end{aligned}
$$

wegen

$$x_i \times F_{ij} + x_j \times F_{ji} = (x_i - x_j) \times F_{ij} = 0.$$

Man beachte, dass die letzte Gleichung impliziert, dass die Summe der Momente aller Wechselwirkungskräfte Null ist. □

Korollar 2.4.13 *Im einem abgeschlossenen System ist der Gesamtdrehimpuls konstant.*

Wir kehren zum nochmals zum Energiebegriff zurück.

Definition 2.4.14 *Die* kinetische Energie eines Systems von n Massepunkten *ist, die Summe der kinetischen Energien der Massepunkte, d.h.*

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \|\dot{x}_i\|^2.$$

Satz 2.4.15 *Die kinetische Energie des Systems verändert sich gemäß der von allen Kräften auf die Punkte geleisteten Arbeit.*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \sum_i m_i \langle \dot{x}_i, \ddot{x}_i \rangle \\
&= \sum_i \langle \dot{x}_i, m_i \ddot{x}_i \rangle \\
&= \sum_i \langle \dot{x}_i, F_i \rangle
\end{aligned}
$$

Damit hat man

$$T(t) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{dT}{dt} \right) dt = \sum_i \int_{t_0}^{t} \langle x_i, F_i \rangle dt = \sum_i A_i.$$

□

Definition 2.4.16 *Ein System besitzt ein* Potential *(oder ist* konservativ*), wenn die von der Kraft F ausgeübte Arbeit A nur von der Lage der Anfangs und Endpunkte, nicht jedoch vom Weg abhängt, also für jeden Weg γ der X_0 und X_1 verbindet gilt*

$$\int_\gamma F = A(X_0, X_1).$$

2.5 Die Mechanik nach Lagrange

Das Wesentliche an der Mechanik nach Lagrange[9] ist die Charakterisierung von Bahnkurven mechanischer Probleme durch Extremalprinzipien. Dies führt direkt zur Variationsrechnung. Ein wesentlicher Begriff ist der der **Wirkung**. Bewegungen der Lagrangeschen Mechanik sind gerade solche, die Wirkung minimieren oder zumindest stationär machen. Dies führt auf die Euler Lagrange Differentialgleichung, deren Lösung gerade die Kurven sind, die das Wirkungsfunktional stationär machen.

2.5.1 Variationsrechnung

Im folgenden sei U ein Banachraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und $C^1(I, U)$ der Raum von stetig differenzierbaren Abbildungen von $I \to U$.

Definition 2.5.17 *Eine Abbildung* $\Phi : C^1(I, U) \to \mathbb{R}$ *heißt* Funktional.

Funktionale können als reellwertige Abbildungen auf einem Raum von Kurven verstanden werden. Eine typische Fragestellung der Variationsrechnung ist, ob es eine Kurve gibt, auf der Φ extremal wird, und wenn ja, wie diese gefunden werden kann.

Definition 2.5.18 *Sei* $\gamma \in C^1(I, U)$*.* Φ *heißt in* γ differenzierbar, *falls es ein stetiges lineares Funktional* $\ell_\gamma : C^1(I, U) \to \mathbb{R}$ *gibt, mit*

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = \ell_\gamma(h) + R,$$

wobei $R = o(\|h\|)$ *ist. Dies bedeutet* $\frac{|R(h)|}{\|h\|}$ *konvergiert für* $h \to 0$ *gegen* 0 *oder auch, zu* $\varepsilon > 0$ *existiert* $\delta > 0$ *mit*

$$|R(h)| \leq \varepsilon \|h\|$$

für alle $h \in C^1(I, U)$ *und* $\|h\| < \delta$*.* ℓ_γ *ist die Ableitung im Punkt* γ*.*

Satz 2.5.19 ℓ_γ *ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen ℓ_γ^1 und ℓ_γ^2 genügen der Definition einer Ableitung von Φ im Punkt γ. Durch Subtraktion der Definitionsgleichung erhält man

$$\ell_\gamma^1(h) - \ell_\gamma^2(h) = R(h)$$

mit $R(h) = O(\|h\|^2)$. Sind ℓ_γ^1 und ℓ_γ^2 verschieden, so existiert eine Folge $h_j \to 0$ und eine Konstante $c > 0$ mit

$$|\ell_\gamma^1(h_j) - \ell_\gamma^2(h_j)| > c\|h_j\|$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Dies widerspricht dem Kleinwerden von R. □

[9] Joseph Louis Lagrange (25.1.1736-10.4.1813) hat durch hervorragende Beiträge zur Entwicklung der Variationsrechnung und der Mechanik beigetragen. Er wirkte längere Zeit am Hof Friedrich II. in Berlin.

Beispiel 2.5.20 Sei $I = [t_0, t_1]$ ein Intervall, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve (d.h., dass γ differenzierbar auf eine offene Umgebung von I fortsetzbar ist) und $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung, dann ist das Funktional $\Phi : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt$$

stetig. (Dazu beachte man, dass L auf jeder kompakten Umgebung von

$$\left\{ (\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) \;\middle|\; t \in I \right\}$$

offensichtlich gleichmäßig stetig ist.)

In diesem Kontext schreiben wir als Koordinaten in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ Paare $(x, \dot{x})$ um anzudeuten, dass die zweite Komponente eine Koordinate im Raum der Geschwindigkeiten ist.

Satz 2.5.21 *Φ aus Beispiel 2.5.20 ist differenzierbar, die Ableitung ℓ_γ ist gegeben durch*

$$\tau_\gamma(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Beweis. Fixiere $t \in I$ und betrachte

$$L(\gamma(t) + h(t), \dot{\gamma}(t) + \dot{h}(t), t) - L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) = \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)}{\partial x} h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h}(t) + R.$$

Integration dieser Gleichung über I liefert

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)}{\partial x} h(t) + \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)}{\partial \dot{x}} \dot{h}(t) \right) dt + O(\|h\|^2).$$

Partielle Integration des rechten Ausdrucks liefert

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)}{\partial \dot{x}} \dot{h}(t) dt = - \int_{t_0}^{t_1} h(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h(t) \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

□

Bemerkung 2.5.22 Der Term $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h\right)\Big|_{t_0}^{t_1}$ verschwindet, wenn man Räume von Funktionen betrachtet mit $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Dies ist z.B. dann der Fall wenn man Anfangs- und Endwert von γ festlegt und nur solche Kurven zum Vergleich zuläßt, die die gleichen Randbedingungen erfüllen.

Definition 2.5.23 1. *Eine Kurve γ heißt* stationär *oder* kritischer Punkt, *falls $\ell_\gamma = 0$ ist.*

2. *γ ist ein (lokales)* Minimum, *wenn es eine Umgebung $U_\delta \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)$ von γ gibt, so dass für alle $\gamma' \in U_\delta$ gilt*
$$\Phi(\gamma) \leq \Phi(\gamma').$$

Üblicherweise ist man an Minima von Funktionalen interessiert, jedoch gibt es viele Situationen in denen die Bestimmung der kritischen Punkte weit einfacher ist, als die Entscheidung ob es sich um Minimum oder sonstige stationäre Punkte handelt.

Beispiel 2.5.24 Ein wichtiges Beispiel ist $L(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$. Die stationären Punkte des zugeordneten Funktionals Φ sind die Geraden, es handelt sich um absolute Minima. Die entsprechende Fragestellung, nach der kürzesten Verbindung zweier Punkte auf einer (Riemannschen) Mannigfaltigkeit führt auf interessante neue Probleme.

Definition 2.5.25 *Sei $C^1(I, \mathbb{R}^n, x_0, x_1) \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)$ die Teilmenge derjenigen Abbildungen γ mit $\gamma(t_0) = x_0$ und $\gamma(t_1) = x_1$.*

Satz 2.5.26 *Eine Kurve $\gamma \in C^1(I, U, x_0, x_1)$ ist genau dann stationär, wenn punktweise die sogenannte Euler[10]-Lagrange Gleichung*

$$\frac{\partial L(\gamma, \dot{\gamma}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{L(\gamma, \dot{\gamma}, t)}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2.5.27}$$

erfüllt ist.

Beweis. Die Rückrichtung, d.h. dass die Gleichung (2.5.27) die Kritikalität von γ impliziert, ist aufgrund von Satz 2.5.26 offensichtlich.

Für die Hinrichtung verschafft man sich eine entsprechende Testfunktion h mit kompakten Träger, die nur nahe eines Punktes, an dem die Gleichung nicht erfüllt ist, nicht verschwindet. Dies führt sofort zum Widerspruch. □

Wir wollen nun zeigen, dass die Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichung durch ein Variationsprinzip charakterisiert werden, dem sogenannten Prinzip der kleinsten Wirkung, nach Hamilton[11].

[10] Leonhard Euler (15.4.1707–18.9.1783) hinterließ ein äußerst umfangreiches wissenschaftliches Werk und erzielte in allen mathematischen Bereichen bahnbrechende Fortschritte. Er wurde zum Wegbereiter eines modernen Funktionenbegriffes und legte damit den Grundstein zum Studium von Differentialgleichungen. Die Herausgabe seines vollständigen Werkes ist bis heute nicht abgeschlossen. Er verbrachte längere Zeit an der Akademie der Wissenschaften in Potsdam und am Hofe der Zarin in St. Petersburg.

[11] William Rowan Hamilton (4.8.1805-2.9.1865), irischer Mathematiker und Physiker, fand 1822 einen Fehler in Laplace's Arbeit „Mécanique céleste". Er arbeitete als Astronom, fand aber viele bedeutende mathematische Ergebnisse, u.a. die Quaternionen und die nach ihm benannten Funktionen und Differentialgleichungen.

Satz 2.5.28 *Gegeben sei das mechanische System*

$$m_i \ddot{x}^{(i)} = -\frac{\partial U}{\partial x^{(i)}}. \tag{2.5.29}$$

Es sei $L = T - U$ die Differenz aus kinetischer $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \|\dot{x}^{(i)}\|^2$ und potentieller Energie U des mechanischen Systems.

Die Bewegungen des Systems (2.5.29) sind genau die stationären Punkte des Funktionals

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma})\, dt.$$

Beweis. Die Euler-Lagrange Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{(i)}} - \frac{\partial L}{\partial x^{(i)}} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{(i)}} + \frac{\partial U}{\partial x^{(i)}} \\ &= \frac{d}{dt} m_i \dot{x}^{(i)} + \frac{\partial U}{\partial x^{(i)}}. \end{aligned}$$

Dies ist gerade die obige Newtonsche Gleichung. □

Aufgabe 2.5.30 Man zeige, dass die Euler-Lagrange Gleichung eines Funktionals

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$$

unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist.

Korollar 2.5.31 *Seien $q_1, \ldots, q_{3n}$ eine Wahl von Koordinaten im Konfigurationsraum eines mechanischen Systems von n Massepunkten. Dann wird die Bewegung durch*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

mit $L = T - U$ beschrieben.

Definition 2.5.32 *$L = T - U$ heißt Lagrange Funktion, q_i* generalisierte Koordinaten, *$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ kanonisch konjugierte* (generalisierte) Impulse, *$\frac{\partial L}{\partial p_i}$* generalisierte Kräfte, *$\int L dt$ die* Wirkung *und schließlich*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

die Lagrange Gleichungen.

Mit dieser Terminologie liest sich der obige Satz als das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung. Dies rechtfertigt sich aus der Erkenntnis, dass die Lösung einer mechanischen Gleichung oft auf ein Minimum (der Wirkung) führt.

Beispiel 2.5.33 1. Der freie Massepunkt im $\mathbb{E}^3$ führt auf

$$L = T = \frac{1}{2}m\|\dot{x}\|^2,$$

d.h. in kartesischen Koordinaten auf dem Konfigurationsraum $\mathbb{R}^3$ erhält man

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2).$$

Die generalisierten Koordinaten sind die Ortsvektoren, die generalisierten Geschwindigkeiten die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes, die kanonisch konjugierten Impulse $p_i = m\dot{q}_i$ der Impuls und schließlich ist die Lagrange Gleichung gegeben durch

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p}.$$

Die Extremalen der Wirkung sind Geraden und diese sind Minima der Wirkung (Nachrechnen!!).

2. Wir betrachten nochmals die Bewegung im ebenen Zentralfeld. Als Koordinaten wählen wir Polarkoordinaten im Konfigurationsraum, d.h. $q_1 = \|x\|, q_2 = \varphi$. Die kinetische Energie errechnet sich zu

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Da die potentielle Energie, die eines Zentralfeldes ist, gilt $U = U(q_1)$. Die Lagrange Gleichung nimmt damit die Gestalt

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

an, mit kanonisch konjugierten Impulsen $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}$

$$p_1 = m\dot{r}, \quad p_2 = mr^2\dot{\varphi}.$$

Für die beiden Komponenten der Lagrange Gleichung ergibt sich

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\dot{p}_2 = 0.$$

Also ist p_2 konstant, ein neuer Beweis des Drehimpulserhaltungssatzes.

Aufgabe 2.5.34 Man überlege sich, wie sich die Betrachtung für $U(r, \varphi)$ ändert!

Definition 2.5.35 *Hängt die Lagrange Funktion nicht von einer generalisierten Koordinate q_i ab, so nennt man diese* zyklisch.

Satz 2.5.36 *Der zu einer zyklischen Koordinate q_i gehörende kanonisch konjugierte Impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ bleibt erhalten, d.h. $p_i = const.$.*

Beweis. Es gilt

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i.$$

□

2.5.2 Die Legendre Transformation

Wir definieren diese Funktion zunächst für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zu $p \in \mathbb{R}$ sei $x = x(p)$ die Zahl, so dass $px - f(x)$ maximal wird.

Aufgabe 2.5.37 *Man finde eine Voraussetzung an f, so dass $x(p)$ existiert und eindeutig ist.*

Setze nun $g(p) = px(p) - f(x(p))$.

Definition 2.5.38 *Die auf diese Weise definierte Funktion g wird als* Legendre Transformierte *von f bezeichnet. Die Abbildung*

$$f \mapsto g$$

nennt man Legendre Transformation.

Beispiel 2.5.39

1. $f(x) = x^2$, dann ist $px - f(x) \leq p^2/4$, für $x = p/2$ erhält man genau den Wert $p^2/4$. Also ist $g(p) = p^2/4$.

2. $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ für ein $\alpha > 1$. Dann ist für $p > 0$ die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(px - \frac{x^\alpha}{\alpha}\right) = 0$$

genau dann, wenn

$$x = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

ist. Dann ist

$$\begin{aligned} g(p) &= p^{\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)} - \frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha} \\ &= p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \frac{p^\beta}{\beta} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Lemma 2.5.40 *Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$, so existiert ein Intervall I auf dem Legendre Transformierte g von f überall definiert ist und $g'' > 0$ auf I.*

Beweis. Sei $p \in \mathbb{R}$, so hat

$$F(p, x) = px - f(x)$$

die folgenden Eigenschaften:

1. $$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F < 0$$

2. es existiert ein Intervall I, so dass für alle $p \in I$ gilt

   $$\frac{\partial}{\partial x} F(p, .)$$

   hat genau eine Nullstelle.

Die erste Eigenschaft folgt sofort aus der Definition von f, die zweite aus der Monotonie von f'. Um einzusehen, dass $g'' > 0$ ist beachten wir, dass g gegeben ist, nach Auflösung der Gleichung

$$p - f'(x) = 0 \tag{2.5.41}$$

mittels des Satzes über implizite Funktionen (global) in der Form $x = x(p)$ aufgelöst wird (beachte $f'' > 0$!) und dann g die Gestalt

$$g(p) = x(p)p - f(x(p))$$

annimmt. Nun erhält man

$$g''(p) = 2x'(p) - f''(x(p))(x'(p))^2.$$

Die Auflösung in Gleichung (2.5.41) ergibt nach Differention (nach p)

$$1 = f''(x(p))x'(p)$$

und damit

$$x'(p) = \frac{1}{f''(x(p))}.$$

Damit ist

$$g''(p) = \frac{1}{f''(x(p))} > 0.$$

□

Insbesondere haben wir gesehen, dass die Gleichung

$$x'(p) = g''(p). \tag{2.5.42}$$

Satz 2.5.43 *Die Legendre Transformation ist involutorisch.*

Beweis. Sei g die Legendre Transformation von f, wir schreiben $g(p)$ und $h(x)$ für die Legendre Transformation von g, d.h.

$$h(y) = yp - g(p),$$

wobei $p = p(y)$ so gewählt ist, dass $yp - g(p)$ maximal ist. Insgesamt erhält man

$$h(y) = p(y)y - p(y)x(p(y)) + f(x(p(y))).$$

Es bleibt zu zeigen $x(p(y)) = y$. Differentiation nach y liefert (beachte $p'(y) = \frac{1}{g''(y)}$ entsprechend obiger Formel (2.5.42) für $x'(p)$)

$$x'(p(y))p'(y) - 1 = \frac{1}{f''(p(y))}\frac{1}{g''(y)} - 1 = 0.$$

Nach Definition gilt für festes x_0, y_0, p_0 mit $x_0 = x(p_0)$ und $p_0 = p(y_0)$

$$y_0 = g'(p_0).$$

Mit $g(p) = px(p) - f(x(p))$ erhält man

$$g'(p) = x(p) + px'(p) - f'(x(p))x'(p) = x(p) + (p - f'(x(p)))g''(p).$$

Da aber $x(p)$ die Gleichung $p = f'(x(p))$ löst, folgt $g'(p) = x(p)$. Also $y_0 = g'(p_0) = x_0$. □

Bemerkung 2.5.44 Die Gleichung $z = py - g(p)$ definiert für $p \in I$ eine Schar von Geraden. Die Einhüllende ist dadurch gegeben, dass wir über p maximieren. Dies entspricht der Legendre Transformation von g. Also ist durch $z = f(y)$ die Kurve der Einhüllenden gegeben.

Definition 2.5.45 *Ist g die Legendre Transformierte von f so nennen wir f und g zueinander* dual.

Dieser Begriff geht auf Young[12] zurück. Aus $px - f(x) = px(p) - f(x(p)) \leq g(p)$ erhält man die *Youngsche Ungleichung*

$$\boxed{px \leq f(x) + g(p).}$$

Beispiel 2.5.46 1. $f(x) = \frac{x^2}{2}$, so ist $g(p) = \frac{p^2}{2}$ und

$$px \leq \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}.$$

[12] Laurence Chrisholm Young (4.7.1905-) in Göttingen geboren, Studium in München (bei Perron) und Cambridge (Trinity College, an diesem College lehrte früher Isaac Newton), jetzt emeritiert in Madison im US Bundesstaat Wisconsin, Sohn von Grace Chrisholm Young (15.3.1868-29.3.1944), der ersten Frau, die an einer deutschen Universität in einem regulären Verfahren promovieren (Betreuer Felix Klein) konnte.

2. Allgemeiner gilt für $1/\alpha + 1/\beta = 1$

$$px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}.$$

Ein der Legendre Transformation entsprechendes Konzept gibt es auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Definition 2.5.47 *Eine (genügend glatte) Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt* konvex, *wenn die quadratische Form der zweiten Ableitungen positiv definit ist.*

Definition 2.5.48 *Gegeben sei eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt* Legendre Transformierte *von f, falls*

$$g(p) = \max_x \left(\langle x, p \rangle - f(x) \right).$$

Für die Maximalität muss

$$\nabla_x \left(\langle p, x \rangle - f(x) \right) = 0$$

sein, d.h. es gilt die Gleichung

$$p = \nabla f(x).$$

Formal wird g zu einer skalaren Abbildung auf dem dualen Raum. Wie oben zeigt man:

$$D^2 g(p) = D^2 f(x(p))^{-1}$$
$$Dx(p) = D^2 f(x(p))^{-1}$$

und schließlich den folgenden Satz.

Satz 2.5.49 *Die Legendre Transformation für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist involutorisch.*

Aufgabe 2.5.50 Man zeige, dass die Legendre Transformierte einer positiv definiten quadratischen Form wiederum eine positiv definite quadratische Form ist.

2.5.3 Kanonische Gleichungen

Gegeben sei eine Lagrange Funktion $L(q, \dot{q}, t)$, $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei wir annehmen, dass L bezüglich des zweiten Argumentes konvex ist, d.h.

$$D^2_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t)$$

ist für alle $q,\ \dot{q},\ t$ eine positiv definite quadratische Form. Sei $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, so nimmt die Euler Lagrange-Gleichung die Form $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$ an. Wir betrachten die Legendre Transformation

$$H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$$

bezüglich der Variablen $\dot{q}$. Dann gilt der folgende Satz.

Satz 2.5.51 *Die Euler Lagrange Gleichung ist äquivalent zum System erster Ordnung*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{2.5.52}$$

Beweis. Mit

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

erhalten wir als Legendre Transformierte von L

$$H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q}).$$

Wir unterdrücken mit dieser Schreibweise die Abhängigkeit von L von q, t, die wir für die Legendre Transformation als Parameter betrachten. Als totales Differential ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H(p) &= \frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}p + \frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \dot{q}\mathrm{d}p - \frac{\partial L}{\partial q}\mathrm{d}q - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten ergibt

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Damit folgen nun die kanonischen Gleichungen unmittelbar. Damit haben wir gezeigt, dass Lösungen $q(t)$ der Euler-Lagrange Gleichung auf eine Lösung $(p(t), q(t))$ der kanonischen Gleichung führen. □

Definition 2.5.53 *Die Gleichung (2.5.52) heißt Hamiltonsche Gleichung oder auch kanonische Gleichung, H wird die Hamilton Funktion genannt.*

Aufgabe 2.5.54 Man beweise die Rückrichtung, d.h. gegeben sei eine Lösung $(p(t), q(t))$ der kanonischen Gleichung, dann ist $q(t)$ eine Lösung der Lagrange Gleichung.

Definition 2.5.55 *Der* Euler Operator *ist gegeben durch*

$$E := \sum_{i=1}^{n} i\, x^{(i)} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}}$$

Man sieht leicht, dass die Eigenfunktionen des Euleroperators gerade die homogene Polynome sind, es gilt: ist P ein homogenes Polynom vom Grad k, so ist

$$E(P) = kP.$$

Lemma 2.5.56 *Ist f eine quadratische Form und g die Legendre Transformierte, so ist*

$$f(x) = g(p),$$

wobei $x = x(p)$ ist.

Beweis. Mit der Vorbemerkung gilt

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = 2f(x).$$

Also hat man

$$g(p) = \langle p, x(p) \rangle - f(x(p)) = \langle \nabla f(x(p)), x(p) \rangle - f(x(p)) = 2f(x(p)) - f(x(p)) = f(x(p)).$$

□

Satz 2.5.57 *Für die Gleichungen der klassischen Mechanik, sei T eine quadratische Form der kinetischen Energie, U eine potentielle Energie und $L = T - U$. Dann ist die Hamilton Funktion H gerade die Gesamtenergie, d.h.*

$$H = T + U.$$

Beweis. Unter Verwendung des vorstehenden Lemmas erhält man:

$$H = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) = 2T - (T - U) = T + U.$$

□

Korollar 2.5.58 *Für ein kanonisches System gilt*

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

□

Definition 2.5.59 *Eine Koordinate $q_1, \ldots q_n$, welche in der Hamilton Funktion H nicht explizit auftaucht, wird* zyklisch *genannt.*

Korollar 2.5.60 *Ist q_i eine zyklische Koordinate, so ist $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ein erstes Integral. Die zeitliche Änderung der Koordinatenfunktionen $q_j,\ j \neq i$ ist dabei durch die Hamilton Funktion*

$$H = H(p_1, \dots, \overline{p_i}, \dots, p_n, q_1, \dots, \hat{q}_i, \dots, q_n, t)$$

gegeben, wobei $\overline{p_i}$ als Parameter betrachtet werden kann.

Korollar 2.5.61 *Jedes mechanische System mit zwei Freiheitsgraden, welches eine zyklische Koordinate hat, ist integrierbar.*

Beweis. Das reduzierte System ist eindimensional und damit integrierbar. □

Definition 2.5.62 *Der $2n$ dimensionale Raum der kanonisch konjugierten Impulse $p_1, \dots, p_n$ und der generalisierten Koordinaten $q_1, \dots, q_n$ heißt* Phasenraum, *der durch die kanonischen Gleichungen gegebene Fluss* Phasenfluss.

Satz 2.5.63 (Liouville[13]) *Der Phasenfluss ist volumenerhaltend.*

Beweis. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass für eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $\operatorname{div} f = 0$ folgt, dass der zugehörige Fluss volumenerhaltend ist. Für ein kanonisches System rechnet man einfach nach (dabei sei die rechte Seite mit f bezeichnet)

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

□

Korollar 2.5.64 *In der Hamiltonschen Mechanik sind asymptotisch stabile Gleichgewichtslagen bzw. asymptotisch stabile periodische Lösungen nicht möglich.*

[13]Joseph Liouville (24.3.1809-8.9.1882) studierte bei Cauchy an der École Polytechnique. Sein Werk ist sehr umfangreich, neben dem hier dargestellten Satz trägt ein wichtiger Satz aus der Funktionentheorie seinen Namen.