

Einleitung

Was sind dynamische Systeme

Dynamische Systeme sind die Lehre von allen Dingen, die sich mit der Zeit ändern. Das beinhaltet das Universum, das Leben und den ganzen Rest. Folgendes sind typische Beispiele, die untersucht werden:

- Das Wetter,
- Planetensysteme,
- physikalische Pendel,
- Computersimulationen wie "game of life",
- Computer selbst,
- mathematische Iterationsverfahren, z.B. das Newton-Verfahren.

Allgemein werden hier insbesondere folgende zwei wichtige mathematische Objekte behandelt:

1. Lösungen von Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

2. Iteration von Abbildungen

$$f : X \rightarrow X,$$

also

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Hier werden einige typische Konzepte erklärt, z.B.

- Chaos,
- Ordnung,

- Vorhersagbarkeit,
- Stabilität und
- Instabilität,
- Attraktoren,
- Schmetterlingseffekt,
- Information und
- Entropie.

Vorkenntnisse

Analysis

- Satz über implizite Funktionen
- Differenzieren im $\mathbb{R}^n$
- elementare Matheorie

Lineare Algebra

- Konjugation und Äquivalenz von Matrizen
- Jordan-Normalform

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Beispiele

1.1.1 $3N+1$ -Problem

Das sogenannte $3N + 1$ -Problem geht auf den Hamburger Mathematiker Lothar Collatz zurück. Wir betrachten die folgende Abbildung

$$\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} 3n + 1 & n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Wir iterieren diese Abbildung und bekommen zum Beispiel mit dem Anfangswert 3 die Zahlenfolge

$$3 \ 10 \ 5 \ 16 \ 8 \ 4 \ 2 \ 1 \ 4 \ 2 \ 1 \ \dots$$

Man könnte die wiederholte Zahlenfolge 4 2 1 als periodisch ansehen, wir sehen auch jetzt schon, dass eine periodische Zahlenfolge auch aus einem aperiodischen Beginn entstehen kann.

Es ist eine offene Frage, ob jede Folge, d.h. ob ein beliebiger Anfangswert irgendwann auf diese periodische Folge führt.

1.1.2 Wortspiele

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir spezielle selbstreferentielle Sätze betrachten, um einen Unterschied zu machen zwischen diesen Sätzen und dem Betrachten dieser Sätze formulieren wir diese in Englisch. Ein erstes Beispiel ist der Satz

In this sentence, the number of occurrences of 0 is 1, of 1 is 11, of 2 is 2, of 3 is 1, of 4 is 1, of 5 is 1, of 6 is 1, of 7 is 1, of 8 is 1, and of 9 is 1.

Dieser Satz ist offensichtlich wahr, gibt es noch weitere solcher Sätze? Charakteristisch für diesen Satz ist offensichtlich, dass jeder natürlichen Zahl

$$0 \leq z \leq 9$$

eine Zahl zugeordnet, die die Anzahl des Auftretens dieser Ziffer angibt. Dies bedeutet, dass der Satz durch einen Punkt im Raum $\mathbb{N}^{10}$ vollständig beschrieben ist. Wir wollen nun eine Abbildung auf der Menge solcher Sätze definieren, betrachte also einen beliebigen Satz, z.B. den Satz

In this sentence, the number of occurrences of 0 is 0, of 1 is 0, of 2 is 0, of 3 is 0, of 4 is 0, of 5 is 0, of 6 is 0, of 7 is 0, of 8 is 0, and of 9 is 0.

Nun zählen wir in diesem offensichtlich unwahren Satz das Auftreten jeder Ziffer und schreiben dies in den nächsten Satz, damit erhalten wir

In this sentence, the number of occurrences of 0 is 11, of 1 is 1, of 2 is 1, of 3 is 1, of 4 is 1, of 5 is 1, of 6 is 1, of 7 is 1, of 8 is 1, and of 9 is 1.

Eine erneute Anwendung dieses Verfahrens liefert

In this sentence, the number of occurrences of 0 is 1, of 1 is 12, of 2 is 1, of 3 is 1, of 4 is 1, of 5 is 1, of 6 is 1, of 7 is 1, of 8 is 1, and of 9 is 1.

Nun auch dieser Satz ist unwahr, wir wenden unser Verfahren nochmals an und erhalten

In this sentence, the number of occurrences of 0 is 1, of 1 is 11, of 2 is 2, of 3 is 1, of 4 is 1, of 5 is 1, of 6 is 1, of 7 is 1, of 8 is 1, and of 9 is 1.

Dies ist unser (wahrer) Satz von oben. Dieser reproduziert sich unter der angegebenen Iteration. Wir halten fest eine nahezu triviale Beobachtung fest:

Lemma 1.1.1 *Ein Satz der angegebenen Form bleibt unter der angegebenen Abbildung genau dann erhalten, wenn er wahr ist.*

Damit ist das Auffinden weiterer (oder aller) solchen wahren Sätze darauf zurückgeführt, Fixpunkte unserer Abbildung zu finden. In mathematischer Sprache hat die Abbildung die Form

$$(1.1.2) \quad \Psi : \mathbb{N}^{10} \rightarrow \mathbb{N}^{10} : (z_0, \dots, z_9)^T \mapsto (1 + w(0), \dots, 1 + w(9))$$

wobei $w(j)$ die Anzahl des Auftretens der Ziffer j in den Zahlen $z_0, \dots, z_9$ angibt. Wir werden im weiteren Verlauf des Semesters alle solchen Sätze angeben und deren Vollständigkeit zeigen.

1.1.3 Populationsmodelle

Es sei t die Zeit und $n(t)$ die Anzahl der Individuen einer Population zum Zeitpunkt t . Hier zeigt sich schon, dass man die Zeit kontinuierlich oder diskret annehmen kann, im ersten Fall hätte man die übliche Zeitskala, im zweiten Fall z.B. eine Generationenfolge, je nach zu untersuchender Situation können beide Annahmen angemessen sein. Auch die Anzahl der Individuen kann diskret (natürliche Zahl) oder kontinuierlich (reelle Zahl) sein, denn bei sehr großen Anzahlen oder bei Bevölkerungsdichten kann die reelle Version vernünftig sein. Im kontinuierlichen Fall, kann man das Wachstum mittels einer Differentialgleichung beschreiben, z.B., könnten wir annehmen, dass die Veränderung der Anzahl der Individuen proportional zur Anzahl, dann wäre ein Modell

$$\frac{dn}{dt} = \mu n$$

mit $n(0) = n_0$ die Ausgangsgröße. Man sieht leicht, dass diese Gleichung von

$$n(t) = n_0 e^{\mu t}$$

gelöst wird, bei positivem μ hat man unbegrenztes Wachstum, bei negativem μ Aussterben der Population. Genauere Modelle gehen auf den belgischen Mathematiker Verhulst¹ zurück. Er meinte, dass Geburten- und Sterberate auch vom gegenwärtigen Zustand abhängen, also betrachten wir die Gleichung

$$\frac{dn}{dt} = \mu(n)n$$

und machen die Annahme, dass $\mu(n)$ die Form

$$(1.1.3) \quad \mu(n) = k - \mu,$$

wobei k die Kapazität des Lebensraumes darstellt. Unsere Gleichung hat die Form

$$(1.1.4) \quad \frac{dn}{dt} = (k - \mu)\mu,$$

und wird als **logistische Gleichung** bezeichnet. Ohne im Moment eine detaillierte Analyse vornehmen zu wollen, hat die Population bei $\mu = k$ einen Fixpunkt, für $k > \mu$ ist die Ableitung

$$\frac{dn}{dt} < 0$$

für $\mu < k$ ist

$$\frac{dn}{dt} > 0.$$

Aufgabe 1.1.5 Man zeige, dass die Lösung dieser Gleichung für alle Anfangswerte

$$n(0) = n_0 > 0$$

gegen die Lösung $n = k$ konvergiert.

Die genaue Lösung wollen wir in den Übungen besprechen.

¹Pierre-François Verhulst (28.10.1804-15.2.1849) war Professor an der Freien Universität in Brüssel und später an der königlichen Militärschule. Seine Arbeiten zum Bevölkerungswachstum machten ihn zum Begründer der Bevölkerungsstatistik.

1.2 Grundbegriffe

Definition 1.2.6 Für eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ auf einer Menge X schreiben wir $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$,

$$f^n = f \circ \dots \circ f \quad (k\text{-malige Verkettung von } f).$$

Denn wir werden die k -malige Verkettung von Abbildungen oft brauchen, die Multiplikation von Werten dagegen selten (und für letztere kann man ohnehin problemlos $f(x)^k$ schreiben, da dies kaum mit $f(x^k)$ zu verwechseln ist).

Wir nennen f^k auch die k -fache **Iteration** von f .

Definition 1.2.7 Der **Orbit** von $x \in X$ einer Abbildung f ist die Folge

$$(x, f(x), f^2(x), \dots) = (f^k(x))_{k \in \mathbb{N}_0}.$$

Dabei muss f nicht invertierbar sein; ist das aber der Fall, so ist f^k für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiert und wir können den **Orbit von x unter der invertierbaren Abbildung f** definieren als

$$(f^k(x))_{k \in \mathbb{Z}}.$$

In diesem Fall heißt $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}_0}$ der **positive Semiorbit** von x unter f .

Definition 1.2.8 Ein **Fixpunkt** von f ist ein Punkt $x \in X$ mit

$$f(x) = x.$$

Ein Punkt x heißt **periodisch** mit **Periode** k , wenn gilt

$$f^k(x) = x.$$

Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn x ein Fixpunkt von f^k ist. Es ist nicht nötig, dass k den kleinsten möglichen Wert hat; wenn doch, heißt k die **minimale Periode** von x .

Es gilt also:

Lemma 1.2.9 Wenn ein Punkt periodisch ist mit Periode $k \in \mathbb{N}$, dann auch mit $l \cdot k$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Proof. Sei x Fixpunkt von $f^{(k)}$ und $l \in \mathbb{N}$, natürlich erfolgt der Beweis (dieser nahezu trivialen Aussage) durch vollständige Induktion, zunächst ist der Fall $\ell = 1$ trivial. Betrachte nun

$$f^{k \cdot (l+1)}(x) = (f^{(k)})^{(l+1)}(x) = f^{(k)}(f^{(k \cdot l)}(x)) = f^{(k)}(x) = x.$$

□

Definition 1.2.10 Ein *Fluss* φ auf einer Menge X ist eine Abbildung $X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, $(x, t) \mapsto \varphi_t(x)$, so dass gilt:

- $\varphi_0 = \mathbb{1}$,
- für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

Üblicherweise (und falls diese Forderung überhaupt sinnvoll definiert ist) wird gefordert, dass φ mindestens C^1 ist (in (x, t) , also beiden Variablen); in vielen Fällen ist φ glatt. Sinn macht die Definition auch, wenn φ nur C^0 ist.

Flüsse treten auf natürliche Weise auf, wenn wir Differentialgleichungen untersuchen:

Beispiel 1.2.11 Wenn $\dot{x} = f(x)$ eine Differentialgleichung auf dem $\mathbb{R}^n$ ist mit der Eigenschaft, dass jede Lösung $x = x(t)$ sich (eindeutig) auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt, also für alle Zeiten t definiert ist, dann können wir einen Fluss definieren durch

$$\varphi_t(x_0) = x(t),$$

wobei $x = x(t)$ diejenige Lösung von $\dot{x} = f(x)$ ist mit $x(0) = x_0$.

Definition 1.2.12 Für einen Fluss φ heißt φ_t die **Zeit- t -Abbildung** von φ .

Lemma 1.2.13 Wenn φ ein C^k -Fluss ist, dann ist die Zeit- t -Abbildung φ_t ein C^k -Diffeomorphismus für alle t .

Proof. φ_t ist invertierbar mit Umkehrabbildung φ_{-t} , da $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_{-t+t} = \varphi_0 = \mathbb{1}$. Mit φ ist auch φ_t und φ_{-t} eine C^k -Abbildung. $\square$

1.3 Kontraktionen

Definition 1.3.14 Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X und eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Daraus kann man die üblichen Folgerungen ziehen, wie z.B. $d(x, y) \geq 0$ (was oft überflüssigerweise in die Axiome geschrieben wird) usw.

Definition 1.3.15 Sei X ein metrischer Raum. Eine **Kontraktion** auf X ist eine Abbildung $f : X \rightarrow X$, für die es $c < 1$ gibt, so dass für alle x, y in X gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y).$$

Wie schon aus Analysis 1 bekannt, ist dies viel stärker als die Bedingung $d(f(x), f(y)) < cd(x, y)$, $c \leq 1$.

Es gilt der **Kontraktionssatz** (auch Fixpunktsatz von Banach² genannt):

Satz 1.3.16 (Banach) Sei X vollständiger metrischer Raum, f Kontraktion auf X . Dann hat f einen eindeutigen **Fixpunkt**, d.h. einen Punkt mit

$$f(x_0) = x_0.$$

Für alle $x \in X$ gilt: $f^n(x)$ konvergiert gegen x_0 für $n \rightarrow \infty$. Es gilt die Abschätzung

$$d(f^n x, x_0) \leq c^n d(x, x_0).$$

Satz 1.3.17 Wenn X eine konvexe kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, $f : X \rightarrow X$ differenzierbar und $\|Df\| < 1$ auf ganz X gilt, dann ist f eine Kontraktion.

Proof. Sei $c = \sup \left\{ \|Df(x)\| \mid x \in X \right\}$, so gilt (Analysis III) für $x, y \in X$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|Df(\xi)\| \|x - y\|,$$

wobei ξ ein Punkt auf der Verbindungsgeraden von x und y , zwischen den beiden Punkten ist. $\square$

Definition 1.3.18 Die C^1 -Norm einer differenzierbaren Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\|f\|_{C^1} := \sup_{x \in X} \|f(x)\| + \sup_{x \in X} \|Df(x)\|.$$

(Das ist endlich für X kompakt und $f \in C^1(X)$.)

Satz 1.3.19 Wenn $f : X \rightarrow X$ eine C^1 -Kontraktion eines metrischen Raumes X ist, dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass jede Abbildung C^1 -Abbildung $\tilde{f}$ mit $\|f - \tilde{f}\|_{C^1} < \varepsilon$ auch eine Kontraktion ist.

Proof. Die oben benannte Eigenschaft, dass $\|Df(x)\| < 1$ für alle $x \in X$ ist, ist für eine Kontraktion auch notwendig. Ansonsten gibt es ein $x_0 \in X$ mit

$$\|Df(x_0)\| \geq 1.$$

²Stefan Banach

Dann folgt aus der Definition der Ableitung, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, so dass

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq (1 - \varepsilon)\|x_n - x_0\|, \text{ für } n \geq N_0(\varepsilon).$$

Dies widerspricht der Kontraktionseigenschaft und daher ist die Notwendigkeit der Bedingung gezeigt.

Ist aber $\|Df(x)\| < \lambda_0$ und

$$\|f\|_{C^1} < \varepsilon < 1 - c_0$$

so ist offensichtlich $\|D\tilde{f}(x)\| < 1$ für alle $x \in X$ und damit $\tilde{f}$ eine Kontraktion. $\square$

Der Fixpunkt einer Kontraktion hängt stetig von Parametern ab:

Satz 1.3.20 Sei $f : X \times Y \rightarrow X$ stetig, X ein vollständiger metrischer Raum, Y ein beliebiger metrischer Raum, und für alle $y \in Y$ sei $f_y := f(\cdot, y) : x \mapsto f(x, y)$ eine λ -Kontraktion. Dann hängt der (existierende und eindeutige) Fixpunkt $g(y)$ der Abbildung f_y stetig von y ab.

Proof. Es ist (unter Ausnutzung der geometrischen Reihe)

$$d(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d(f_y^i(x), f_y^{i+1}(x)) \leq \frac{1}{1 - \lambda} d(x, f_y(x))$$

und daher gilt für $x = g(\tilde{y})$, dass

$$d(g(y), g(\tilde{y})) \leq \frac{1}{1 - \lambda} d(g(\tilde{y}), f_y(g(\tilde{y}))) = \frac{1}{1 - \lambda} d(f_{\tilde{y}}g(\tilde{y}), f_y(g(\tilde{y}))),$$

was wegen der Stetigkeit von f beliebig klein wird für $\tilde{y} \rightarrow y$. $\square$

1.4 Irgendwann kontrahierende Abbildungen

Definition 1.4.21 Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ eines metrischen Raums X heißt **irgendwann kontrahierend**, wenn es $\lambda < 1$ und $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(f^n(x), f^n(y)) < C\lambda^n d(x, y).$$

Die Eigenschaft einer Abbildung, irgendwann kontrahierend zu sein, ist robuster als die Eigenschaft, kontrahierend zu sein. Zum Beispiel bleibt sie erhalten, wenn die Metrik sich „uniform ändert“:

Definition 1.4.22 Die Metriken d und $\tilde{d}$ auf einer Menge X heißen **uniform äquivalent**, wenn es $c < \infty$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\frac{1}{c}d(x, y) < \tilde{d}(x, y) < cd(x, y).$$

Lemma 1.4.23 Wenn f irgendwann kontrahierend ist bezüglich der Metrik d , und wenn $\tilde{d}$ eine andere Metrik ist, die zu d uniform äquivalent ist, dann ist f auch bezüglich $\tilde{d}$ irgendwann kontrahierend.

Proof. Wir rechnen nach

$$\tilde{d}(f^n(x), f^n(y)) \leq cd(f^n(x), f^n(y)) \leq cC\lambda^n d(x, y) \leq c^2C\lambda^n \tilde{d}(x, y).$$

□

Satz 1.4.24 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine irgendwann kontrahierende Abbildung $f : X \rightarrow X$ ist uniform äquivalent zu einer Kontraktion auf X . D.h., es gibt eine Metrik d_L auf X , die zu d uniform äquivalent ist, so dass f bezüglich d_L eine Kontraktion ist.

Proof. Die Abbildung f erfüllt

$$d(f^n(x), f^n(y)) < C\lambda^n$$

mit Konstanten $C < \infty$, $\lambda < 1$. Wähle $\mu \in (\lambda, 1)$ und n so groß, dass

$$C \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n < 1.$$

Definiere

$$d_L(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d_L(f(x), f(y)) &= \mu \sum_{i=1}^n \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y)) \\ &= \mu \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y)) - d(x, y) + \mu^{-n} d(f^n(x), f^n(y)) \right) \\ &= \mu \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y)) - d(x, y) + C \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n d(x, y) \right) \\ &\leq \mu d_L(x, y). \end{aligned}$$

d_L ist uniform äquivalent zu d , dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus obiger Definition. □

Definition 1.4.25 Sei f eine irgendwann kontrahierende Abbildung mit $d(f^n(x), f^n(y)) < C\lambda^n d(x, y)$. Eine Metrik

$$d_L(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y))$$

mit $\mu \in (\lambda, 1)$ und n so groß, dass $C \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n < 1$, heißt eine **Lyapunov-Metrik**³ (auch: **angepasste Metrik**).

³Lyapunov

Es gibt mehr als eine Lyapunov-Metrik, da μ und n frei wählbar sind. Oft wird auch der Fall $n = \infty$ betrachtet und ebenfalls als Lyapunov-Metrik bezeichnet.

1.5 Lineare Systeme

1.5.1 Zerlegungen

Es gilt für eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^0$$

mit

$$\begin{aligned} E^s &= E^s(A) = E^- = \bigoplus_{|\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| < 1, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\ E^u &= E^u(A) = E^+ = \bigoplus_{|\lambda| > 1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| > 1, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\ E^0 &= E^0(A) = E^1 = \bigoplus_{|\lambda| = 1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| = 1, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \end{aligned}$$

wobei jeweils E_λ der verallgemeinerte Eigenraum von A zum Eigenwert λ ist.

Für eine Matrix A ist die Einschränkung von A auf E^s irgendwann kontrahierend. Dies folgt aus der folgenden Beobachtung aus der linearen Algebra. Für alle $\delta > 0$ gibt es eine Norm $\|\cdot\|_L$ mit

$$\|A|_{E^s}\|_L < r(A|_{E^s}) + \delta.$$

Wenn A invertierbar ist, so ist die Einschränkung von A^{-1} auf E^u irgendwann kontrahierend. Für alle $\delta > 0$ gibt es eine Norm $\|\cdot\|_L$ mit

$$\|A|_{E^s}\|_L < r(A|_{E^s}) + \delta, \quad \|A|_{E^u}^{-1}\|_L < r(A|_{E^u}^{-1}) + \delta.$$

$\|\cdot\|_L$ heißt **Lyapunov-Norm**. Analog gilt für eine lineare Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^0$$

mit

$$\begin{aligned} E^s &= E^s(A) = E^- = \bigoplus_{\lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda) < 0, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\ E^u &= E^u(A) = E^+ = \bigoplus_{\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda) > 0, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\ E^0 &= E^0(A) = E^c = \bigoplus_{\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda) = 0, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Für alle $x_0 \in E^s$ gilt: Die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ konvergiert gegen 0 für $t \rightarrow \infty$.

Für alle $x_0 \in E^u$ gilt: Die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ konvergiert gegen 0 für $t \rightarrow -\infty$.

Für alle $x_0 \in E^0 \setminus \{0\}$ gilt: Es gibt $0 < C < \infty$, so dass die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt, dass $1/C < \|x(t)\| < C$.

1.5.2 Klassifikation ebener linearer Systeme

1.6 Asymptotisches Verhalten und Stabilität

Definition 1.6.26 Sei $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung (bzw. φ ein Fluss) auf X . Ein Punkt $x \in X$ heißt **positiv rekurrent**, wenn es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$f^{t_k}(x) \rightarrow x \quad \text{und} \quad t_k \rightarrow +\infty \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty$$

$$\text{bzw.} \quad \varphi_{t_k}(x) \rightarrow x \quad \text{und} \quad t_k \rightarrow +\infty \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty,$$

wobei $t_k \in \mathbb{N}$ (bzw. $t_k \in \mathbb{R}$ für einen Fluss).

Analog heißt ein Punkt $x \in X$ unter einer invertierbaren Abbildung oder einem Fluss **negativ rekurrent**, wenn es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$f^{t_k}(x) \rightarrow x \quad \text{und} \quad t_k \rightarrow -\infty \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty$$

$$\text{bzw.} \quad \varphi_{t_k}(x) \rightarrow x \quad \text{und} \quad t_k \rightarrow -\infty \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty$$

mit $t_k \in \mathbb{N}$ (bzw. $t_k \in \mathbb{R}$). Wenn ein Punkt positiv und negativ rekurrent ist, heißt er **rekurrent**.

Definition 1.6.27 Die ω -Limesmenge eines Punktes x ist die Menge der Häufungspunkte des positiven Semiorbits $f^{\mathbb{N}}(x)$ bzw. $\varphi^{[0, \infty)}(x)$:

$$\omega(x) := \{y : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} : f^{t_k}(x) \rightarrow y, \quad t_k \rightarrow +\infty \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty\}$$

$$\text{bzw.} \quad \omega(x) := \{y : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} : \varphi_{t_k}(x) \rightarrow y, \quad t_k \rightarrow +\infty \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty\}$$

Die α -Limesmenge eines Punktes x ist die Menge der Häufungspunkte des negativen Semiorbits $f^{-\mathbb{N}}(x)$ bzw. $\varphi^{(-\infty, 0]}(x)$:

$$\alpha(x) := \{y : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} : f^{t_k}(x) \rightarrow y, \quad t_k \rightarrow -\infty \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty\}$$

$$\text{bzw.} \quad \alpha(x) = \{y : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} : \varphi_{t_k}(x) \rightarrow y, \quad t_k \rightarrow -\infty \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty\}$$

Lemma 1.6.28 Es gilt:

- x ist positiv rekurrent $\iff x \in \omega(x)$,
- x ist negativ rekurrent $\iff x \in \alpha(x)$,
- x ist rekurrent $\iff x \in \omega(x) \cap \alpha(x)$.

Weiterhin gilt:

- Wenn der positive Semiorbit von x einen Limes y hat, dann ist $\omega(x) = \{y\}$.
- Wenn der negative Semiorbit von x einen Limes y hat, dann ist $\alpha(x) = \{y\}$.

Proof. Trivial. □

Definition 1.6.29 Es sei X ein metrischer Raum, $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung oder $\varphi_t : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ ein Fluss. Ferner sei $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Wir nennen K

- positiv invariant, falls zu $x \in K$ der positive Semiorbit in K liegt.
- negativ invariant, falls zu $x \in K$ der negative Semiorbit in K liegt.
- invariant, falls K positiv und negativ invariant ist.

Definition 1.6.30 Eine kompakte invariante Menge heißt stabil, wenn zu jeder Umgebung U von K eine Umgebung $K \subset V \subset U$ existiert, so dass $x \in V$ impliziert, dass der positive Semiorbit von x in U liegt.

1.7 Maß-erhaltende Systeme

Zunächst zur Wiederholung:

Definition 1.7.31 Sei X eine Menge. Eine σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf X ist eine Menge von Teilmengen von X mit

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- wenn $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$,
- wenn $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann ist auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Definition 1.7.32 Sei nun X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra darauf. Ein **Maß** auf X ist eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty],$$

so dass gilt:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$,
3. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Es ist üblich zu sagen: „Sei X ein Maßraum“, obwohl μ und nicht X das Objekt ist, das die Information über das Maß enthält, damit auch über die zugehörige σ -Algebra (was der Definitionsbereich des Maßes ist) und damit über X (was die Vereinigung aller Elemente in der σ -Algebra ist).

Beispiel 1.7.33 *Lebesgue-Maß⁴ ist ein Maß im $\mathbb{R}^n$ (im folgenden Volumen genannt, geschrieben. vol).*

Definition 1.7.34 *Sei μ ein Maß auf X . Dann heißt eine **bijektive** Abbildung $f : X \rightarrow X$ **maßerhaltend**, wenn gilt:*

$$\mu(f(A)) = \mu(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$.

Bei dieser Definition wird erstens die σ -Algebra $\mathcal{A}$ in den Voraussetzungen gar nicht erwähnt; das ist korrekt, denn μ enthält diese ja schon als Definitionsbereich. Zweitens wird stillschweigend vorausgesetzt, dass f die σ -Algebra wieder auf sich abbildet. Das stimmt nicht für jede Abbildung und jede σ -Algebra. Für die Abbildungen und σ -Algebren, die wir betrachten (z.B. stetige Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ und Lebesgue-Maß), ist das aber immer erfüllt.

Diese Definition ist ein Spezialfall der folgenden:

Definition 1.7.35 *Sei μ ein Maß auf X . Dann heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ **maßerhaltend**, wenn gilt:*

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

*für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir sagen dann auch, das Maß μ ist **invariant** unter f .*

Gemäß dieser Definition ist die Abbildung

$$f : [0, 1) \rightarrow [0, 1), \quad f(x) = 2x \bmod 1$$

längenerhaltend.

Definition 1.7.36 *Die **Jacobische** bzw. **Jacobi-Determinante** einer differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist*

$$Jf = \det Df.$$

Satz 1.7.37 *Eine differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist volumenerhaltend genau dann, wenn*

$$|\det Df| = n1$$

ist.

⁴Henri Lebesgue

Proof. Folgt aus der Transformationsformel aus der Analysis III. $\square$

Aus der Definition für Abbildungen erhalten wir sofort eine für Flüsse:

Definition 1.7.38 Ein Fluss φ auf einem Maßraum heißt **maßerhaltend**, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung φ_t mäserhaltend ist. D.h., für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ ist $(\varphi_t(A))$ unabhängig von t .

Satz 1.7.39 Ein Fluss auf $\mathbb{R}^n$ (oder auf einer Teilmenge davon) ist volumenerhaltend genau dann, wenn das zugehörige Vektorfeld

$$f(x) = \frac{d}{dt} \varphi_t(x)|_{t=0}$$

überall verschwindende Divergenz hat, d.h.

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0.$$

Proof. Wir berechnen die zeitliche Ableitung $\frac{d}{dt}(\operatorname{vol}(\varphi_t(A)))$ bei $t = 0$ zu

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(\varphi_t(A))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(A)} dx|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_A |J\varphi_t(x)| dx|_{t=0} = \int_A \operatorname{div} f dx = 0.$$

$\square$

Satz 1.7.40 (Poincaré-Rekurrenz) Sei μ endliches Maß auf X und invariant unter $f : X \rightarrow X$. Ist $A \subset X$ mit $\mu(A) > 0$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A \cap f^n(A) \neq \emptyset.$$

Proof. Wir betrachten die Menge

$$\hat{A} = \left\{ x \in A \mid f^n(x) \notin A \ \forall n \geq 1 \right\}.$$

Dann ist

$$f^{-n} \hat{A} \cap \hat{A} = \emptyset,$$

ansonsten gibt es $x \in \hat{A}$ mit $f^n(x) \in \hat{A} \subset A$, was der Definition von $\hat{A}$ widerspricht. Dann folgt aber für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$

$$f^{-n}(\hat{A}) \cap f^{-m}(\hat{A}) = \emptyset.$$

Ansonsten hat man, oBdA $n > m$, für ein Element $x \in f^{-n}(\hat{A}) \cap f^{-m}(\hat{A})$, daß $f^m(x) \in \hat{A}$ und $(f^{n-m}(f^m(x))) \in \hat{A} \subset A$ und wiederum erhalten wir einen Widerspruch zur Definition von $\hat{A}$. Dann ist

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-j}(\hat{A}) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(f^{-j}(\hat{A})) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\hat{A}) < \infty,$$

also $\mu(\hat{A}) = 0$ and $A \setminus \hat{A} \neq \emptyset$. □

Wir werden uns später noch ausführlich über Mannigfaltigkeiten unterhalten. Eine der einfachsten Mannigfaltigkeiten ist der Torus $\mathbb{T}^n$. Am einfachsten nähert man sich dieser Struktur von der Gruppentheorie, man beobachtet, dass $\mathbb{Z}^n$ eine (normale) Untergruppe von $\mathbb{R}^n$ ist. Den Quotienten $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ bezeichnet man als n -dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n$. Die kanonische Projektion $\pi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ nutzt man um eine Topologie zu definieren. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{T}^n$ heißt offen, genau dann wenn

$$\pi_n^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$$

offen ist. Wir sehen leicht, dass dies eine Topologie definiert. Die Borelalgebra ist gerade die σ -Algebra, die von der Menge der offenen Mengen erzeugt wird, die Lebesgue-Algebra erhält man daraus wie im $\mathbb{R}^n$ durch Vervollständigung. Ein Maß erhält man dadurch, dass man für eine meßbare Menge $W \subset \mathbb{T}^n$ $\pi_n^{-1}(W)$ betrachtet und

$$\mu(W) = \text{vol}([0, 1]^n \cap \pi_n^{-1}(W))$$

setzt. Man prüft leicht nach, dass dies ein Maß ist.

Satz 1.7.41 *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{T}^n$, $\text{vol}(X) < \infty$, $f : X \rightarrow X$ invertierbar und volumenerhaltend. Dann gilt: Für alle $x \in X$ gibt es Folgen $y_k \rightarrow x$, $m_k \rightarrow \infty$, so dass $f^{m_k}(y_k) \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$.*

Proof. Sei $A_n = B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ oder $x_0 \in \mathbb{T}^n$ fest gewählt. Betrachte nach Wahl von m_n, y_n die Abbildung f^{m_n} . Dann ist $\text{vol}(A_n) > 0$ und nach dem vorherigen Satz gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^{mm_n}(A_{n+1}) \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Wähle $y_{n+1} \in A_{n+1}$ mit $f^{-mm_n}(y_{n+1}) \in A_{n+1}$. Diese wahl erfüllt offensichtlich die geforderten Bedingungen. □

Für den nächsten Satz der besagt, dass rekurrente Punkte für volumenerhaltende Abbildungen von großer Bedeutung sind benötigen wir noch zwei Hilfsmittel. Zunächst charakterisieren wir Rekurrenz durch eine geeignete Abschwächung, danach beweisen wir einen zentralen Satz der Mathematik, der an verschiedenen Stellen gebraucht wird.

Definition 1.7.42 *Ein Punkt x heißt (N, ε) -rekurrent, wenn zu jedem $N \in \mathbb{N}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $m = m(N, \varepsilon) > N$ existiert mit $f^m(x) \in B_\varepsilon(x)$.*

Dies ist eine Abschwächung des Begriffes der Rekurrenz, denn offensichtlich ist jeder rekurrenten Punkt auch für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ (N, ε) -rekurrent. Aber wir können auch zeigen, dass Rekurrenz aus dem Begriff der (N, ε) -Rekurrenz zurück gewonnen werden kann.

Lemma 1.7.43 *Ist X ein metrischer Raum, $x \in X$ und es gelte*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad x \text{ ist } (N, \varepsilon)\text{-rekurrent}$$

so ist x rekurrent.

Proof. Sei $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge positiver Zahlen. Wähle $N_1 = 1$, $N_1 < m_1 \in \mathbb{N}$, so dass $f^{m_1}(x) \in B_{\varepsilon_1}(x)$.

Angenommen $m_k > N_k$ sei gewählt, dass $f^{m_k}(x) \in B_{\varepsilon_k}(x)$. Setze $N_{k+1} = m_k$, dann ist x $(N_{k+1}, \varepsilon_{k+1})$ -rekurrent und wir finden

$$m_{k+1} > N_{k+1} \text{ mit } f^{m_{k+1}}(x) \in B_{\varepsilon_{k+1}}(x).$$

Dann konvergiert

$$\{f^{m_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ gegen } x$$

und x ist rekurrent. □

Definition 1.7.44 In einem metrischen Raum X heißt eine Menge A nirgends dicht, wenn das Innere von $\overline{A}$ leer ist.

Satz 1.7.45 (Baire) Es sei X ein vollständiger metrischer Raum,

1. dann kann X nicht als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen geschrieben werden.
2. dann ist der abzählbare Durchschnitt dichter offener Mengen dicht.

Proof. Es reicht eine der beiden Aussagen zu beweisen, die andere folgt dann sofort. Wir beweisen die zweite Aussage. Es seien O_i offene und dichte Mengen. Es sei $B_0 \neq \emptyset$ offen und $\varepsilon > 0$ fest gewählt und $x_0 \in O_0 \cap B_0$ und $0 < r_1 \leq \frac{\varepsilon}{0} = \infty$ seien so gewählt, dass $B_1 = \overline{B_{r_1}(x_0)} \subset O_0 \cap B_0$. Da der Schnitt von $B_0 \cap O_0$ nicht leer ist, ist eine solche Wahl möglich. Wir nehmen nun an, eine entsprechende Wahl von $B_k = \overline{B_{\rho_k}(x_{k-1})}$, $\rho_k < \frac{\varepsilon}{k-1}$ sei für k erfolgt. Wähle nun $x_{k+1} \in B_k \cap O_{k+1}$ und $\rho_{k+1} < \frac{\varepsilon}{k}$ mit $B_{k+1} = \overline{B_{\rho_{k+1}}(x_{k+1})} \subset B_k \cap O_{k+1}$. Betrachte nun die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Dies ist eine Cauchyfolge, besitzt einen Grenzwert und dieser ist in

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

(Der Schnitt ist als Schnitt einer abzählbaren Menge von durch Inklusion geordneten kompakten Mengen nichtleer.) Also hat man

$$\emptyset \neq \bigcap_k B_k \subset B_0 \cap \bigcap_i O_i.$$

Also ist $\bigcap_i O_i$ dicht.

Wir kommen kurz zur ersten Aussage. Ist A_i nirgends dicht und abgeschlossen, so ist $O_i = X \setminus A_i$ offen und dicht. Da

$$\bigcap_i O_i = X \setminus \bigcup_i A_i$$

dicht liegt, ist

$$\bigcup_i A_i \neq X.$$

□

Satz 1.7.46 *Sei X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{T}^n$ mit $\text{vol}(X) < \infty$. Die Abbildung $f : X \rightarrow X$ sei stetig, volumenerhaltend und invertierbar. Dann ist die Menge der rekurrenten Punkte dicht in X .*

Proof. Sei

$$R(N, k) = \left\{ x \in X \mid x \text{ ist } (N, \frac{1}{k}) - \text{rekurrent} \right\}.$$

Dann ist $R(N, k)$ offen:

zu gegebenem $N \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n > N$ mit $d(f^n(x), x) < \frac{1}{k}$. Sei nun $\frac{1}{2k} > \varepsilon > 0$ gegeben, finde $\frac{1}{2k} > \delta > 0$ mit

$$f^n(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(x).$$

Dann gilt für $y \in B_\delta(x)$:

$$d(f^n(y), y) \leq d(f^n(y), x) + d(x, y) < \varepsilon + \delta \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}.$$

$R(N, k)$ ist dicht:

ist $x \in X$, so gibt es mit der gleichen Wahl von ε, δ wie im obigen Schritt nach Satz 1.7.41 ein $y \in B_\delta(x)$, ein $m_k > N$ mit $f^{m_k}(y) \in B_\varepsilon(x)$. Dann ist wie oben $d(f^{m_k}(y), y) < \frac{1}{k}$.

Also ist der Schnitt

$$\bigcap_{N, k} R(N, k).$$

nach dem Baireschen Kategoriensatz 1.7.45 dicht. Wegen Lemma 1.7.43 sind die Punkte in diesem Durchschnitt rekurrent. $\square$