

Kapitel 6

Bifurkationen

In diesem Kapitel wollen wir einige elementare Verzweigungen besprechen. Obwohl wir keine tiefergehende Theorie entwickeln werden, können wir bemerken, dass Verzweigungen innerhalb der von einem Parameter abhängigen Systeme in folgendem Sinne „generisch“ sind: Hat man eine solche Verzweigung, so kann diese nicht durch kleine Störungen in andere Verzweigungen oder gar in Systeme ohne Verzweigungen verwandelt werden. Dies ist Ausgangspunkt einer Reihe von tiefergehenden Überlegungen, denen wir aber an anderer Stelle nachgehen wollen.

Inhalt

6.1	Grundlagen	149
6.2	Der Satz von Hartman-Grobman	151
6.3	Sattel-Knoten-Verzweigung	153
6.4	Hopf-Verzweigung	154
6.5	Symmetrie-brechende-Verzweigung	157

6.1 Grundlagen

Die Theorie der Verzweigungen bei dynamischen Systemen charakterisiert jene Systeme, wo durch kleine Störungen (des Systems) große Veränderungen im Systemverhalten hervorgerufen werden. Dazu bedarf es einer-

seits des Messens der Kleinheit der Störung und andererseits einer systematischen Definition der großen Veränderung im Verhalten. Wir wollen hier nur eine Art Metadefinition geben, die man auch in der angestrebten Allgemeinheit vereinbaren könnte und die dann zu einer Reihe tiefliegender Sätze führen kann. Wir wollen hier nur das Prinzip beschreiben und dann sofort dies anhand einfacherer Konzepte vertiefen.

Wir betrachten dynamische Systeme, die entweder durch einen Diffeomorphismus $f : M \rightarrow M$ der Klasse C^r , einen Diffeomorphismus einer beschränkten, offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ der Klasse C^r oder durch C^R -Vektorfelder entweder auf einer Mannigfaltigkeit M oder aber auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gegeben sind. Die Menge aller solchen dynamischen Systeme bezeichnen wir mit $\mathcal{D}^r$. Der Abstand der Vektorfelder, bzw. der Diffeomorphismen wird dann mit der C^r -Topologie gemessen, d.h. wir betrachten $(\mathcal{D}^r, d)$ als metrischen Raum. Gleichzeitig führen wir eine Äquivalenzrelation $\equiv$ ein. Diese beinhaltet Eigenschaften der Dynamik, wir werden gleich einige Beispiele anschreiben. Damit haben wir dann folgende Definition. Das Wort dynamisches System in der folgenden Definition steht wahlweise für ein C^r -Vektorfeld oder für einen C^r -Diffeomorphismus und d bezeichnet die Metrik auf der Menge dieser dynamischen Systeme.

- Definition 6.1.1** 1. Das dynamische System f heißt $\equiv$ -stabil, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $g \in B_\delta(f)$ gilt $f \equiv g$.
2. Das dynamische System f heißt $\equiv$ -verzweigend, wenn jede Umgebung von f im Raum der C^r -dynamischen Systeme $\equiv$ -inequivalente dynamische Systeme enthält.

Definition 6.1.2 Ist $f \equiv$ -verzweigend und bildet die Menge

$$[f] = \left\{ g \in \mathcal{D}^r \mid g \equiv f \right\}$$

einen linearen Raum der Kodimension $m(f) > 0$, so nennen wir $m(f)$ die Kodimension des durch f definierten Verzweigungsproblems.

- Bemerkung 6.1.3** 1. Wir betrachten die Anzahl der Ruhelagen: und sagen $f \equiv g$, falls die Anzahl der Ruhelagen gleich ist.
2. Wir betrachten die Anzahl der Ruhelagen und der periodischen Orbits: Wir sagen $f \equiv g$, falls die Anzahl der Ruhelagen von f und g gleich ist und entsprechendes für die Anzahl der periodischen Orbits gilt.

3. Für diskrete dynamische Systeme kann man $\equiv$ als die Relation der topologischen Äquivalenz nehmen.
4. Man kann solche Relationen auch lokal, d.h. für dynamische Systeme definieren, die auf einer Umgebung eines bestimmten Punktes definiert sind.
5. Man kann dies auf parameterabhängige Systeme anwenden.

Bei den weiteren Betrachtungen werden wir Vektorfelder ins Zentrum unseres Interesses rücken.

6.2 Der Satz von Hartman-Grobman

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir nur einen einzigen Satz ohne Beweis angeben, dieser geht auf den amerikanischen Mathematiker HARTMAN und den russischen Mathematiker GROBMAN zurück.

Satz 6.2.1 Ist x_0 hyperbolische Ruhelage eines C^1 -Vektorfeldes f , so gibt es eine Umgebung U von x_0 und eine Umgebung V von 0, und einen Homöomorphismus

$$h : U \rightarrow V,$$

so dass für $u_0 \in U$ gilt $h(\phi_t(u_0)) = E(A, t)h(u_0)$, wobei ϕ den Fluss von f bezeichne und $A = D_x f(x_0)$ ist.

Definition 6.2.2 Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so dass 0 eine hyperbolische Ruhelage von $\dot{x} = Ax$ ist, so nennen wir A hyperbolisch. Ist A hyperbolisch, so wird die Anzahl der Eigenwerte von A mit positivem Realteil als Index von A bezeichnet.

Lemma 6.2.3 Sind A, B hyperbolisch vom gleichen Index, so sind $x \mapsto E(A, t)x$ und $x \mapsto E(B, t)x$ lokal bei Null topologisch konjugiert.

Damit können wir folgenden lokalen Nichtverzweigungssatz beweisen.

Satz 6.2.4 Es sei x_0 eine hyperbolische Ruhelage von f . Dann gibt es eine Umgebung U von x_0 , und ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes Vektorfeld g mit $d_1^U(f, g) < \varepsilon$ gilt, dass die maximale invariante Teilmenge $K \subset U$ genau aus der Null besteht. f ist $\equiv$ -nichtverzweigend, wenn wir als Relation die Homöomorphie der maximalen invarianten Teilmenge von U wählen.

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz von Hartman-Grobman. $\square$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt der folgende lokale Nichtverzweigungssatz.

Satz 6.2.5 *Ist x_0 Ruhelage von dem C^1 -Vektorfeld f , und ist $A = Df(x_0)$, so dass 0 kein Eigenwert von A ist, so gibt es eine Umgebung U von x_0 , und ein $\varepsilon > 0$, so dass $g \in \mathcal{D}^1(U)$ mit $d_1^U(f, g) < \varepsilon$ impliziert, dass es genau eine Ruhelage $x = x(g) \in U$ gibt.*

Beweis. Setze

$$F : \mathcal{D}^1(U) \times U \rightarrow \mathbb{R}^n : (g, x) \mapsto g(x).$$

Dann ist die partielle Ableitung

$$D_x F(f, x_0) = A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ regulär,}$$

gibt es Umgebungen $B_\varepsilon(f)$ von U von x_0 , und eine Abbildung $x = x(g)$, so dass

$$F(g, x(g)) = 0$$

und

$$F(h, y) = 0 \text{ impliziert } y = x(h).$$

$\square$

Satz 6.2.6 *Es sei λ_0 ein (algebraisch) einfacher Eigenwert von $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. dann gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(A_0)$ und eine glatte Funktion $\lambda : B_\varepsilon(A_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(A_0) = \lambda_0$ mit*

$$A \in B_\varepsilon(A_0) \Rightarrow \lambda(A) \text{ ist Eigenwert von } A.$$

Der Eigenwert $\mu(A)$ ist (algebraisch) einfach, die Abbildung $A \mapsto \lambda(A)$ ist reell analytisch der zugehörige Eigenvektor kann ebenfalls reell analytisch gewählt werden.

Beweis. Wir lösen die Eigenwertgleichung

$$Av = \lambda v$$

in einer geeigneten Weise mit dem Satz über implizite Funktionen.

Sei $v_0 \in \mathbb{R}$ mit $\|v_0\|_{\mathbb{R}^n} = 1$ und $A_0 v_0 = \lambda_0 v_0$. Wir betrachten das Paar $(\lambda_0, v_0) \in \mathbb{R}, \mathbb{S}^{n-1}$ als Lösung einer geeigneten Gleichung. Sei

$$G : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : G(A, v, \lambda) = Av - \lambda v.$$

Dann ist G eine reell analytische Abbildung, $G(A_0, v_0, \lambda_0) = 0$. Wir fassen die Variable (v, λ) zusammen und schreiben dafür w , also ist $G(A_0, w_0) = 0$ und wir betrachten

$$D_w G(A_0, w_0) : \mathbb{R}^{n \times n} \times T_{w_0}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dies ergibt sich mit $w = (v, \lambda)$ zu

$$D_w G(A_0, w_0)w = D_v G(A_0, v_0, \lambda_0)v + D_\lambda G(A_0, v_0, \lambda_0)\lambda = (A_0 - \lambda_0 \mathbb{1})v - \lambda v_0.$$

Nun ist

$$T_{v_0} \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} = v_0^\perp.$$

Auf $v_0^\perp$ ist A_0 ein Isomorphismus, da v_0 einfacher Eigenwert von A_0 ist, liegt v_0 nicht im Bild von A_0 und $D_w G(A_0, w_0)$ ist ein Isomorphismus auf $\mathbb{R}$. Also gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(A_0)$ und Umgebungen W von w_0 , so dass

$$w : B_\varepsilon(A_0) \rightarrow W$$

reell analytisch ist und die Gleichung

$$G(A, w) = 0$$

löst. □

6.3 Sattel-Knoten-Verzweigung

In diesem Abschnitt betrachten wir ein C^2 -Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x_0) = 0$ und $D_x f(x_0)$ hat einen einfachen Eigenwert 0 und keine weiteren auf der imaginären Achse. Nun betrachten wir eine Abbildung

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto f_\lambda, \quad f_0 = f.$$

Wir nehmen an, dass $\frac{\partial}{\partial \lambda} f_0(x_0) \neq 0$. Dann gibt es lokal eindeutige Kurve

$$\lambda = \lambda(x)$$

mit

$$f_{\lambda(x)}(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 \\ \ker D_x f(0, 0) &\neq \{0\} \\ R(D_x f(0, 0)) \oplus D_\lambda f(0, 0)1 &= \mathbb{R}^n \\ \langle D_{xx} f x_0, x_0 \rangle &\notin R(D_x f(0, 0)), \end{aligned}$$

wobei x_0 den Kern von $D_x f(0, 0)$ aufspannt. Dann ist $Df(0, 0)$ surjektiv, also $f^{-1}(0)$ eine eindimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Sei $(x(s), \lambda(s))$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist $f(x(s), \lambda(s)) = 0$ und natürlich auch $\frac{d^j}{ds^j} f(x(s), \lambda(s)) = 0$. Für $j = 1$ ergibt sich

$$D_x f(0, 0)\dot{x} + D_\lambda f(0, 0)\dot{\lambda} = 0.$$

Da $D_\lambda f(0, 0)\dot{\lambda} \in \ker D_x f(0, 0)$, ist $D_x f(0, 0)x \neq 0$, also $\dot{\lambda} = 0$ und $\dot{x} = \alpha x_0$. Für $j = 2$ ergibt sich

$$f_{xx}\dot{x}^2 + f_{x\ddot{x}} + D_{\lambda x} f \dot{x}\dot{\lambda} + f_{\lambda\ddot{\lambda}} = 0.$$

Es folgt aus den Annahmen $\ddot{\lambda} \neq 0$. Insbesondere haben wir die wesentlichen Eigenschaften einer Sattel-Knoten Verzweigung.

6.4 Hopf-Verzweigung

Dies ist neben der Sattel-Knoten Verzweigung der einzige stabile Verzweigungstyp, bezüglich üblicher Äquivalenzbegriffe. Hier fragt man nach dem Entstehen kleiner periodischer Lösungen durch den Übergang von einer stabilen Ruhelage zu einer instabilen Ruhelage. Die Entdeckung dieses Phänomens geht auf den Mathematiker Eberhard Hopf¹ zurück.

Satz 6.4.1 [E. Hopf, 1943] Sei $\dot{u} = f(u, \lambda)$ eine gewöhnliche, parameterabhängige Differentialgleichung mit $f(0, \lambda) = 0$. Wie zuvor sei $A(\lambda) = D_u f(0, \lambda)$ die Linearisierung bei 0. Wir setzen voraus, $A = A(0)$ habe einen einfachen

¹Eberhard Hopf (17.4.1902-24.7.1983), Bruder des Topologen Heinz Hopf, wirkte vor allem in der Ergodentheorie und auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen. Neben der nach ihm benannten Verzweigung trägt noch ein wichtiges Lemma in der Theorie der Maximumprinzipien seinen Namen.

Eigenwert $\pm i$, keine Eigenwerte der Form ni , $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $\tau(\lambda) = \alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ eine Fortsetzung des Eigenwertes i mit $\alpha'(0) \neq 0$. Dann gibt es in jeder Umgebung von $(0, 0)$ geschlossene Orbits der angegebenen Differentialgleichung.

Beweis. Den vollständigen Beweis wollen wir nur im $\mathbb{R}^2$ führen, einige Überlegungen gelten aber immer, dies wollen wir in voller Allgemeinheit angeben. Allerdings ist in unserem Beweis die Hauptidee „zweidimensional“. Ein Beweis des Satzes in voller Allgemeinheit bedarf entweder etwas (nichtlinearer) Funktionalanalysis oder eines wichtigen Satz aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, dem sogenannten Zentrumsmanigfaltigkeitssatz, der Anfang der sechziger Jahre vom amerikanischen Mathematiker A. Kelley bewiesen worden war. Zunächst beachten wir, daß es eine Umgebung W von $(0, 0)$ gibt, die keine nichttrivialen Ruhelagen enthält. Dies folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, da null nicht Eigenwert von A ist.

Im zweidimensionalen Raum ist der Beweis erbracht, wenn wir zeigen, daß jede Umgebung vollständige Trajektorien beinhaltet. Denn dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Poincaré-Bendixson.

Wir halten den Parameterwert $\lambda = 0$ fest und zeigen, daß hinreichend nahe bei *null* zu einer Transversale die Poincaré-Abbildung definiert ist. Wir betrachten die Differentialgleichung in Polarkoordinaten, der lineare Anteil hat die Form

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= 1.\end{aligned}$$

Die nichtlinearen Terme führen auf eine allgemeine Form

$$\begin{aligned}\dot{r} &= o(r^2) \\ \dot{\varphi} &= 1 + o(r).\end{aligned}$$

Als Transversale wählen wir die x -Achse. Als Anfangswert wählen wir den Punkt mit dem Abstand $0 < r_0 < \frac{\delta}{2}$. Ist δ hinreichend klein, so gibt es eine Zeit $t_1 > 0$ mit $r(t, r_0) < \delta$ für $0 \leq t \leq t_1$ und $\varphi(t_1, 0) = 2\pi$. Solange $r < \delta$ ist $\dot{\varphi} \geq 1 - \delta$ und $\varphi(t) = t(1 - \delta)$. Es gibt Zahlen a, b mit $\dot{r} < ar^2$, $\dot{\varphi} > 1 - b\delta$. Wähle $\delta > 0$ mit

$$\delta < \min \left\{ \frac{1}{10b}, \frac{5b}{a} \right\}.$$

Nun ist $\varphi(t) \geq (1 - b\delta)t$. Also existiert ein $t_1 < \frac{2\pi}{1-b\delta}$, so daß $\varphi(t_1) = 2\pi$. Solange $t < \frac{1}{2a\delta}$ ist, bleibt $r(t, r_0) \leq \delta$. Mit der angegebenen Wahl von δ werden beide Wahlmöglichkeiten erfüllt.

Sei $r_1 = r(t_1, r_0)$. O.B.d.A. ist $r_1 < r_0$. Das Gebiet, das von dem Intervall $[r_1, r_0]$ und vom Bogen $\{r(t, r_0) \mid 0 \leq t \leq t_1\}$ umschlossen wird, ist positiv invariant, siehe Abbildung 6.1 (und vergleiche den Beweis des Satzes von

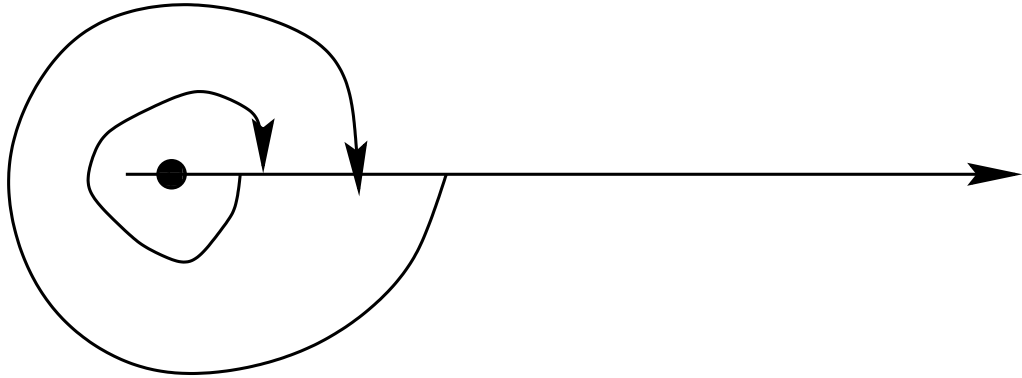


Abbildung 6.1: Illustration des Beweises für den Hopf'schen Verzweigungssatz in zwei Dimensionen.

Poincaré-Abbildung).

Dann ist für $\lambda > 0$ auch $r(t(\lambda), r_0) = 0$ für ein $t(\lambda)$ nahe t_1 . Wegen der stetigen Abhängigkeit von Parametern ist für $|\lambda|$ ausreichend klein auch noch $r(t(\lambda), r_0) < r_0$. Nun ist der oben angegebene Bereich auch für $\lambda > 0$ positiv invariant und enthält daher die Grenzmengen aller Anfangswerte. Da für $\lambda > 0$ der Ursprung abstoßend ist, kann keine ω -Grenzmenge den Ursprung beinhalten. Weil das angegebene Gebiet relativ kompakt ist, sind Grenzmengen nicht leer. Der Satz von Poincaré-Bendixson garantiert nun eine Ruhelage oder einen geschlossenen Orbit in der Grenzmenge. Wir hatten am Anfang gesehen, daß es eine Umgebung gibt, in der sich keine nichttrivialen Ruhelagen befinden. Daher muß in der ω -Grenzmenge auf jeden Fall ein geschlossener Orbit auftreten. $\square$

Bemerkung 6.4.2 Für einen vollständigen Beweis gibt es mindestens zwei Varianten: Man reduziert entweder auf eine zweidimensionale gewöhnliche Differentialgleichung und benutzt die obige Idee. Man kann sogar zeigen, daß die Voraussetzungen implizieren, daß die Gleichung $r(t, r_0) = r_0$

maximal eine Lösung haben kann. Damit hätte man sogar die Eindeutigkeit des Lösungszweiges gezeigt.

Die zweite Variante besteht darin, die Gleichung so umzuschreiben, daß die Methode von Ljapunov-Schmidt anwendbar wird. Man macht dies, indem man sich auf einen Raum von 2π -periodischen Funktionen beschränkt und dort die Nullstellenmenge des Operators $G(u, \lambda) = \omega i u - f(u, \lambda)$ untersucht. Man beachte, daß die Linearisierung dieses Operators einen *doppelten* Eigenwert null besitzt. Allerdings tritt hier noch die à-priori unbekannte Periode der periodischen Lösungen auf. Durch einen Kunstgriff reduziert sich das Problem auf eine Verzweigungsgleichung, die der Situation am einfachen Eigenwert Null entspricht. Man hat zwei Parameter und sucht eine eindimensionale Schar von Lösungen (nämlich alle auf dem geschlossenen Orbit). Durch Festlegen der Phase, d.h. des Anfangswertes auf dem geschlossenen Orbit, läßt sich die Gleichung für die Periode lösen und der Rest entspricht dem Verhalten am einfachen Eigenwert null.

6.5 Symmetrie-brechende-Verzweigung

Gruppe G , Aktion auf $\mathbb{R}^n$ über lineare Darstellung, Vektorfeld f

$$f(gx) = gf(x), \forall (g, x) \in G \times \mathbb{R}^n.$$

absolut irred. Darstellung

Fixpunktraum $\text{Fix}((\cdot)H), f; \text{Fix}((\cdot)H) \rightarrow \text{Fix}((\cdot)H)$.

$\dim \text{Fix}((\cdot)H) = 1$

Normalform $f(sx, \lambda) = \lambda sx - s^3x$. Lösung $\lambda = s^2$.

Index

- abgeschlossen, 12
- Abhängigkeit, 77
 - rechte Seite, 77
 - Parameter, 77
- Algebraische Struktur des Lösungs-
raumes, 58, 59
- Anfangswertproblem, 6
- asymptotisch stabil, 52
- asymptotisch stabil, 131
- attraktiv, 28
 - global, 28
- Attraktor, 29
 - global, 29
- Austrittspunkt, 134
 - echt, 134
- Banachraum, 14
- Begradigungssatz, 141
- Cauchyfolge, 13
- Collatz-Problem, 3
- Differentialgleichung, 6
 - nichtautonom, 68
- differenzierbar, 19
- Eigenraum
 - verallgemeinerter, 44, 102
- Eigenvektor, 44
- Eigenwert, 44
- einfach zusammenhängend, 144
- Einzugsbereich, 65
- Existenzintervall
 - maximales, 74
- Exponent
 - charakteristischer, 121
- Fixpunkt, 8
- Fixpunkte, 33
- Fixpunktsatz
 - Banach, 15
- Floquetexponent, 121
- Floquetmultiplikatoren, 121
- Fluss, 21, 22
 - diskret, 22
 - volumenerhaltend, 130
- Folge
 - periodisch, 34
- Fortsetzung, 74
- Geburtsrate, 4
- Gleichgewicht, 24
- Gleichung
 - charakteristische, 44
 - logistische, 7
 - Lorenz, 109
- Gradient, 128
- Gradientensystem, 127
- Grenzmenge, 25
- Halbgruppe, 21
- Halbgruppen, 21
- Halbwertszeit, 5–7

- Hamiltonsch, 130
- Homöomorphismus, 12
- hyperbolisch
 - periodischer Orbit, 146
- instabil, 52
- Integral
 - erstes, 123
- Integralkurve, 69
- invariant, 25
 - negativ, 25
 - positiv, 25
- Jordansche Normalform, 45
- Kontraktion, 15
- Kraftgesetz
 - Newton, 9
- Kugel
 - metrisch, 11
- Lemma
 - Gronwall, 83
- Linearkombination, 18
- Lipschitz stetig
 - lokal, 69
- Ljapunov Funktion, 124
- Lorenz Gleichung, 109
- Matrixexponentialfunktion, 54
 - Jordan-Block, 58
- Matrixnorm, 54
- Menge
 - nichtwandernd, 27
- Metrik, 11
- Monodromiematrix, 121
- Multiplikatoren
 - charakteristische, 121
- nichtwandernd, 27
- Niveau
 - verschieden, 128
- Niveaumengen, 128
- Norm, 54
- offen, 11
- Orbit, 23
 - heteroklin, 144
 - homoklin, 144
 - periodisch, 24
 - verbindender, 144
- orbital asymptotisch stabil, 114
- orbital stabil, 114
- Periode, 24
 - minimale, 24
- Phase
 - asymptotische, 114
- Phasenraum, 69
 - erweitert, 69
- Poincaré Abbildung, 115
- Poincaré Schnitt, 115
- Poincaré-Abbildung, 30
- Punkt
 - periodisch, 24
- quadratisch, 65
- Raum
 - metrisch, 11
 - normiert, 13
 - vollständig, 13
- Retrakt, 134
- Retraktion, 134
- Richtungsfeld, 68
- Riemannsche Mannigfaltigkeit, 127
- Ruhelage, 24
 - hyperbolisch, 109
- Satz

- Begradigungs-, 141
- Floquet, 120
- Schnitt, 30
- Semiorbit
 - negativ, 23
 - positiv, 23
- Shift-Operator, 3
- Spektrum, 44
- stabil, 28, 52, 116
 - periodischer Punkt, 53
- stark kontrahierend, 15
- Sterberate, 4
- stetig, 12
- superattraktiv, 65
- Suspensionsfluss, 31
- System
 - dynamisch
 - diskret, 23
 - dynamisches, 22
- Tangentialbündel, 19
- Tangentialbündels, 17
- Tangentialraum, 18
- Untermannigfaltigkeit
 - eingebettet, 18
- Variation der Konstanten, 59
- Variationsgleichung, 88
- Vektorfeld, 20, 21
 - zeitabhängig, 21
- Verdoppelung, 5
- Verdoppelungszeit, 7
- Verschiebeoperator, 3
- Wazewski Prinzip, 135
- Wiederkehrabbildung, 115
- Wiederkehrrsatz, 132
- Wiederkehrzeit, 30
- Zeitmenge, 21
- Zerfall
 - radioaktiver, 5

Literaturverzeichnis

- [1] *Brockhaus Enzyklopädie in 24 Bänden*. F.A. Brockhaus, Mannheim, 19.te Auflage, 1986.
- [2] R. ABRAHAM & J. W. ROBBIN. *Transversal Mappings and Flows*. Benjamin, New York, 1967.
- [3] H. AMANN. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, Berlin New York, 1995.
- [4] V. ARNOLD. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
- [5] T. BRÖCKER & K. JÄNICH. *Differentialtopologie*, Heidelberger Taschenbücher 98. Springer Verlag, 1973.
- [6] K. DEIMLING. *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1974.
- [7] M. DENKER. *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme*. Springer Verlag, 2005.
- [8] R. DEVANEY. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, New York, 1989.
- [9] S. Gottwald, H.-J. Ilgauds & K.-H. Schlote, editors. *Lexikon bedeutender Mathematiker*. Verlag Harri Deutsch, Leipzig, Thun, 1990.
- [10] R. GUNESCH. *Einführung in Dynamische Systeme*. Vorlesung, Universität Hamburg, 2004.
- [11] R. GUNESCH. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Vorlesung, Universität Hamburg, 2006.

- [12] J. K. HALE. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Corp, 1969.
- [13] P. HARTMAN. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Corp., 1964.
- [14] B. HASSELBLATT & A. KATOK. *A First Course in Dynamics with a Panorama of Recent Developments*. Cambridge Univ. Press, 2003.
- [15] H. HEUSER. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, 1979.
- [16] A. KATOK & B. HASSELBLATT. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encycl. Math. Appl. 54. Cambridge Univ. Press, 1995.
- [17] H.-W. KNOBLOCH & F. KAPPEL. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner, 1974.
- [18] T.-Y. LI & J. A. YORKE. Period three implies chaos. *Am. Math. Mon.*, 82, 985-992, 1975.
- [19] J. PALIS, JR. & W. DE MELO. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer Verlag, New York, 1982.
- [20] W. WALTER. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Heidelberger Taschenbücher. Heidelberger Taschenbücher. Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [21] F. W. WARNER. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman and Company, Glenview, IL, 1971.