

Kapitel 5

Spezielle Systeme und Methoden

In diesem Kapitel wollen wir uns einerseits mit speziellen zusätzlichen Strukturen befassen, die sich auf das Lösungsverhalten auswirken, wie auch einige spezielle Methoden vorstellen, die für die Untersuchung des Lösungsverhaltens von Bedeutung sind.

5.1 Gradientensysteme

Unter *Gradientensystemen* versteht man Differentialgleichungen, die durch eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, bzw. $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ im folgenden Sinne gegeben sind: es sei $f = \nabla F$ und

$$\dot{u} = -f(u)$$

die zu untersuchende gewöhnliche Differentialgleichung. Um den Gradienten einer reellwertigen differenzierbaren Funktion auf einer Mannigfaltigkeit erklären zu können, benötigen wir allerdings noch eine zusätzliche Struktur.

Definition 5.1.1 Eine Mannigfaltigkeit M heißt Riemannsche Mannigfaltigkeit, wenn es auf jedem Tangentialraum $T_x M$ ein Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_x M}$$

gibt, das in folgendem Sinne differenzierbar ist: für jede Karte (U_x, τ_x) und für je zwei differenzierbare Vektorfelder $X, Y : U_x \rightarrow TM|_{U_x}$ bei x ist die Funktion

$$g(X, Y) : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle X(x), Y(x) \rangle_{T_x M},$$

differenzierbar.

Definition 5.1.2 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Es sei df die zugehörige 1-Form und für festes $x \in M$ ist der Gradient

$$\nabla f(x)$$

definiert durch

$$\langle \nabla f(x), v \rangle_{T_x M} = df(x)(v)$$

für alle $v \in T_x M$.

Hat man eine Lösung $u(t)$ dieser gewöhnlichen Differentialgleichung, so erhält man für

$$\frac{d}{dt}F(u(t)) = \langle \nabla F(u(t)), \dot{u}(t) \rangle = -\langle f(u(t)), f(u(t)) \rangle \leq 0.$$

Genauer wird dieser Ausdruck genau dann null, wenn $f(u(t)) = 0$, d.h. wenn $u(t)$ eine Ruhelage ist. Diese einfache Beobachtung hat weitreichende Konsequenzen.

Satz 5.1.3 In einem Gradientensystem bestehen die α - und ω -Grenzmengen jeweils aus stationären Lösungen.

Beweis. Angenommen, $w_1, w_2 \in \omega(\mathcal{O})$ sind zwei Punkte in der ω -Grenzmenge des Orbits $\mathcal{O}$ mit $F(w_2) < F(w_1)$. Sei u eine Lösung im Orbit und $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zeitfolge mit $t_n \rightarrow \infty$ und $u(t_n) \rightarrow w_2$. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $|F(u(t_n)) - F(w_2)| < \frac{1}{2}|F(w_1) - F(w_2)|$. Dann ist für $t > t_n$ wegen der Gradientenstruktur auch $F(u(t)) < F(u(t_n))$, und insbesondere gilt

$$F(u(t)) < F(w_1) - \frac{1}{2}(F(w_1) - F(w_2)) = \frac{1}{2}(F(w_1) + F(w_2)),$$

also ist $F(u(t))$ von $F(w_1)$ wegbeschränkt. Demzufolge gibt es keine Folge mit $t_m \rightarrow \infty$ mit $u(t_m) \rightarrow w_1$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $F(w_1) \neq F(w_2)$ ist und daher folgt $F(w_1) = F(w_2)$. Längs Trajektorien in der Grenzmenge ist also F konstant, also nach der Vorüberlegung $f = 0$, und daher ist eine solche Trajektorie die einer Ruhelage. $\square$

Definition 5.1.4 Wir nennen die Mengen $F = \text{const}$ Niveaumengen. Insbesondere sagen wir, zwei Punkte w_1, w_2 sind von verschiedenem Niveau, falls $F(w_1) \neq F(w_2)$.

Satz 5.1.5 (Charakterisierung der Attraktoren von Gradientensystemen)

Attraktoren in Gradientensystemen bestehen aus Ruhelagen und aus verbindenden Orbits von Ruhelagen unterschiedlichen Niveaus.

Beweis. Folgt sofort aus dem zuvor gesagten. $\square$

Beispiel 5.1.6 *In diesem Beispiel wollen wir sehen, dass es Attraktoren gibt, die aus mehr als nur Ruhelagen bestehen. Es sei*

$$\dot{x} = x(1 - x^2).$$

Dann ist $[-1, 1]$ ein Attraktor, der aus den Ruhelagen $-1, 0, 1$ besteht und den verbindenden Orbits.

5.2 Hamilton Systeme

Ähnlich wie Gradientensysteme sind auch Hamiltonsche Systeme¹ durch die Angabe einer reellwertigen Funktion bestimmt. Hamiltonsche Systeme spielen vor allem in der Mechanik eine zentrale Rolle, viele Probleme werden in der Sprache Hamilton'scher Systeme formuliert und gelöst. Die Theorie Hamilton'scher Systeme ist bereits seit Euler bei der mathematischen Beschreibung mechanischer Probleme fest etabliert, allerdings auch heute noch von enormer Bedeutung, wenn man auch heute oft die Theorie Hamilton'scher Systeme hinter anderen Begriffen versteckt: z.B. symplektische Geometrie. Die Bedeutung wird vielleicht dadurch ersichtlich, dass beim letzten ICM alle Hauptvorträge zum Thema Differentialgleichungen/Dynamische Systeme mit einer Ausnahme symplektische Geometrie zum Thema hatten. Diese Bedeutung wird untermauert dadurch, dass auch heute noch alle bedeutenden Mathematiker auf dem Gebiet der Differentialgleichungen dieses Gebiet bearbeiten. Wir wollen dieser Bedeutung Rechnung tragen, indem wir diese Systeme definieren und einige wichtige Eigenschaften kennenlernen.

¹William Rowan Hamilton (4.8.1805-2.9.1865), irischer Mathematiker und Physiker, fand 1822 einen Fehler in Laplace's Arbeit „Mécanique céleste“. Er arbeitete als Astronom, fand aber viele bedeutende mathematische Ergebnisse, u.a. die Quaternionen und die nach ihm benannten Funktionen und Differentialgleichungen.

Da in einem Hamilton'schen System immer Impuls- und Ortsvariable gleichberechtigt auftauchen, lebt ein solches System auf natürliche Weise auf dem $\mathbb{R}^{2n}$. Es sei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 5.2.1 Eine Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ heißt Hamilton'sch, falls es eine Funktion $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $f(u) = J\nabla H(u)$.

Bemerkung 5.2.2 In mechanischen Systemen wird H oft als Energie interpretiert. Der Energieerhaltungssatz für solche Systeme lautet dann

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = 0.$$

Wie man leicht sieht, gilt in Hamilton'schen Systemen der Energieerhaltungssatz.

Satz 5.2.3 H bleibt längs Orbits der zugehörigen Differentialgleichung konstant.

Beweis. Wir schreiben $p = (u_1, \dots, u_n)$, $q = (u_{n+1}, \dots, u_{2n})$. Damit wird ein Hamilton'sches System zu

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Ableitung und erhalten

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

□

Definition 5.2.4 Ein Fluss $\Phi_t : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ heißt volumenerhaltend, wenn für jede meßbare, beschränkte Menge $V \subset U$ gilt, dass $\mu(V) = \mu(\Phi_t(V))$ für alle $t \geq 0$, wobei μ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.

Satz 5.2.5 Der Fluss einer Hamilton'schen Differentialgleichung ist volumenerhaltend.

Beweis. Sei V offen und beschränkt, wir zeigen

$$\mu(\Phi_t(V)) = \mu(V)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dazu zeigen wir $\frac{d}{dt}\mu(\Phi_t(V)) = 0$. Mit der Transformationsformel erhält man

$$\mu(\Phi_t(V)) = \int_{\Phi_t(V)} dx = \int_V |\det D_x \Phi_t(x)| dx.$$

Es gilt

$$\Phi_t(x) = x + tf(X) + O(t^2),$$

also

$$D_x \Phi_t(x) = \mathbb{1} + tD_x f(X) + O(t^2).$$

Zur Berechnung der Determinante bemerkt man

$$\det(1 + tA) = 1 + t \operatorname{tr}(A) + O(t^2).$$

Zusammen ergibt sich

$$\det D_x \Phi_t(x) = 1 + t \operatorname{tr}(D_x f(x)) + O(t^2) = 1 + t \operatorname{div} f(x) + O(t^2).$$

Also ist

$$\frac{d}{dt}\mu(\Phi_t(V))|_{t=0} = \int_V \operatorname{div} f(x) dx.$$

Hat man $\operatorname{div} f = 0$, so ist diese Ableitung null und demzufolge der Fluss volumenerhaltend.

Dazu muss man noch die Divergenz eines Hamiltonschen Vektorfeldes ausrechnen. Man erhält

$$\operatorname{div} J\nabla H(u) = \operatorname{div}_p\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \operatorname{div}_q\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) = 0.$$

□

Korollar 5.2.6 *Ein divergenzfreies Vektorfeld ist volumenerhaltend.*

Definition 5.2.7 1. Eine Ruhelage x_0 heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und es eine Umgebung U von x_0 gibt, mit $x_0 = \omega(u_0)$ für alle $u_0 \in U$.

2. Eine periodische Lösung P heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und es eine Umgebung U von P gibt, mit $P = \omega(u_0)$ für alle $u_0 \in U$.

Satz 5.2.8 In Hamiltonschen Systemen gibt es weder asymptotisch stabile Ruhelagen, noch asymptotisch stabile periodische Lösungen.

Beweis. Widerspricht dem Volumenerhaltungssatz in einer Umgebung der Ruhelage, bzw. des periodischen Orbits. $\square$

Satz 5.2.9 (Poincaréscher Wiederkehrssatz) Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\Phi : G \rightarrow G$ sei stetig, volumenerhaltend und injektiv. Dann gilt: Für jeden Punkt $y \in G$ und jede Umgebung U von y existiert ein Punkt $x \in U$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Phi^n(x) \in U$.

Beweis. Wegen des Erhalts des Volumens gilt $\mu(\Phi^n(U)) = \mu(U)$. Sind alle $\Phi^n(U)$ disjunkt, so folgt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi^n(U) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(U) = \infty.$$

Daher ist die Familie der $\Phi^n(U)$ nicht disjunkt. Ist aber $v \in \Phi^n(U) \cap \Phi^j(U)$, so gibt es $x, w \in U$ mit $v = \Phi^n(x) = \Phi^j(w)$, also (o.B.d.A. $n > j$) $U \ni w = \Phi^{n-j}(x)$. $\square$

Korollar 5.2.10 Ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $g : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto e^{i\alpha}z$, so ist der Orbit eines Punktes $\{e^{in\alpha}z\}_{n \in \mathbb{N}}$ dicht in S^1 .

Beweis. g ist Homöomorphismus und volumenerhaltend. Sind $z_1, z_2 \in S^1$, $z_2 = e^{i\phi}z_1$, so geht der Orbit $e^{in\alpha}z_2$ durch Multiplikation aus dem von z_1 hervor. Also ist entweder jeder Orbit dicht, oder es ist kein Orbit dicht. Wir zeigen die Dichtheit eines Orbits in zwei Schritten:

1. Jeder Punkt eines Orbits ist Häufungspunkt der anderen Punkte des Orbits.

Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(y)$, die keinen weiteren Punkt von des Orbits von y enthält. Betrachte $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y)$. Es gibt darin einen Punkt x und eine Iterierte, die wieder in dieser Umgebung landet. Dann ist aber der Orbit von y der von x um den entsprechenden (kleinen) Winkel gedreht. Also schneidet er die ursprüngliche ε -Umgebung in einem Punkt z . Dann ist $z \neq y$, da ansonsten α rational wäre.

Insbesondere ist 1 Häufungspunkt des Orbits von 1.

2. Der Orbit von 1 ist dicht in S^1 .

Angenommen, dies wäre nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt $w \in S^1$ und eine Umgebung $B_\varepsilon(w)$, die vom Orbit von 1 nicht getroffen wird. Sei $y \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(1) \cap \mathcal{O}(1)$. Dann ist jede Potenz von y im Orbit von 1, und zwei benachbarte Punkte sind nicht weiter als $\frac{\varepsilon}{4}$ voneinander entfernt. Dies widerspricht der Konstruktion von w . $\square$

Bemerkung 5.2.11 1. Eine zumindest auf den ersten Blick überraschende Anwendung des Poincaré'schen Wiederkehrsatzes ist das folgende Gedankenexperiment. Das Verhalten eines Gases kann als Vielteilchensystem modelliert werden, so dass für jedes Molekül eine Gleichung für Ort und Impuls aufgeschrieben wird. Bei ca. $6 \cdot 10^{23}$ -Teilchen hat man dann $6 \cdot 6 \cdot 10^{23}$ Gleichungen. Es stellt sich heraus, dass diese Gleichungen Hamilton'sch und damit volumenerhaltend im $\mathbb{R}^{6 \cdot 6 \cdot 10^{23}}$ sind. Stellen wir uns nun einen Behälter vor, der durch eine Wand in zwei Teile geteilt wird, von denen eine mit einem Gas gefüllt ist, und die andere leer ist. Diese Situation ist unsere Anfangsbedingung. Öffnet man nun die Wand, kann sich das Gas ungehindert in beide Teile ausbreiten. Der Poincaré'sche Wiederkehrsatz sagt nun, dass es eine Umgebung der Ausgangsbedingung gibt, so dass der Orbit nach einer genügend langen Zeit in diese Umgebung zurückkehrt.

Dieses Ergebnis erscheint widersinnig, denn es entspricht nicht unserer Erfahrung. Allerdings ist die Zeit, die für diese Wiederkehr benötigt wird, länger als die Zeit der Existenz unseres Sonnensystems! Da dieser Zeitraum jenseits unserer erfahrbaren Wirklichkeit liegt, dürfen wir unsere Erfahrung auch nicht zur Grundlagen von diesbezüglichen Aussagen machen.

2. Eine weitere überraschende Anwendung des Satzes besteht auf der Deformation und dem Zerschneiden eines Bildes nach einer fest vorgegebenen Regel. Iteriert man diesen Prozess, so besagt der Satz, findet man das ursprüngliche Bild irgendwann (fast) wieder. Wir wollen uns ein Beispiel ansehen.

5.3 Das Wazewski-Prinzip

Der Satz von Poincaré-Bendixson gibt eine Art von topologischem Prinzip, um Lösungen bestimmter Art zu garantieren. Wir wollen hier ein weiteres

solches Prinzip kennenlernen. Es gehört eigentlich nicht unter die Überschrift „Autonome Gleichungen“, denn wir können hier auch nichtautonome Gleichungen zulassen. Die Anwendungen betreffen jedoch zumeist autonome Probleme, und deshalb ist es vielleicht gerechtfertigt, dieses Prinzip, das den Namen des polnischen Mathematikers Wazewski² trägt, hier im Anschluß an den Satz von Poincaré-Bendixson zu präsentieren. Wir beginnen mit einem Spezialfall einer Definition aus der Topologie.

Definition 5.3.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Menge $V \subset U$ heißt Retrakt von U , falls es eine stetige Abbildung $\pi : U \rightarrow V$ gibt mit den Eigenschaften $\pi|_V : V \rightarrow V = \mathbb{1}_V$. Die Abbildung π wird Retraktion genannt.

Beispiel 5.3.2 Jede nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Retrakt. Es reicht den Fall zu betrachten, dass $\mathbb{R}^n$ der lineare Span von Punkten in V ist. Man wählt einen Punkt x_0 in V und definiert die Abbildung $\pi(x) = x$, falls $x \in V$ und $x_0 + \lambda \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$ für x außerhalb V , wobei λ so gewählt ist, dass der Punkt auf ∂V liegt und zwar zwischen x_0 und x .

Ein einfaches Argument zeigt, dass keine nichtleere offene Menge $V \neq \mathbb{R}^n$ Retrakt des $\mathbb{R}^n$ ist.

Der Rand des Einheitskreises ist kein Retrakt der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Gleiches gilt in höheren Dimensionen. Der Beweis dieser Aussage beruht auf dem Brouwerschen Fixpunktsatz.

Eine nichtzusammenhängende Menge ist kein Retrakt einer zusammenhängenden Menge. Auch dies sollte man sich zur Übung überlegen.

Definition 5.3.3 Sei $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ in der ersten Komponente Lipschitz stetig. Weiter sei W^0 eine offene Teilmenge von W , ∂W^0 der Rand von W^0 und $\overline{W^0}$ der Abschluß von W^0 . Ein Austrittspunkt von W^0 für die Differentialgleichung $\dot{u} = f(u, t)$ ist ein Paar $(u_0, t_0) \in \partial W^0$, so dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $(u(t, t_0, u_0), t)$ für $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ in W^0 enthalten ist. Ein Austrittspunkt wird echter Austrittspunkt genannt, falls es ein Intervall $(t_0, t_0 + \delta)$ gibt, so dass für $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ die Lösung $(u(t, t_0, u_0), t)$ außerhalb von $\overline{W^0}$ ist. Mit W_a^0 bezeichnen wir die Menge der Austrittspunkte, mit W_{sa}^0 die Menge der echten (strikten) Austrittspunkte.

²Tadeus Wazewski(24.9.1896-5.9.1972) war wesentlicher Vertreter einer polnischen Schule, die sich topologische Ideen beim Studium von Differentialgleichungen zu Nutze machte. Er litt unter der deutschen Besetzung Polens und wurde für längere Zeit im Konzentrationslager Sachsenhausen interniert.

Satz 5.3.4 Sei $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich der ersten Komponente Lipschitz stetig. Jeder Austrittspunkt einer offenen Teilmenge W^0 von W sei echter Austrittspunkt, d.h. $W_a^0 = W_{sa}^0$. Sei $S \subset W^0 \cup W_a^0$ nichtleer. Angenommen, $S \cap W_a^0$ ist kein Retrakt von S , aber ein Retrakt von W_a^0 . Dann gibt es einen Anfangswert $(u_0, t_0) \in S$, so dass $(u(t, t_0, u_0), t)$ auf dem maximalen (rechtsseitigen) Existenzintervall in W^0 enthalten ist.

Definition 5.3.5 Die in diesem Satz dargestellte Existenzaussage wird als Wazewski Prinzip bezeichnet.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Widerspruch. Unter der Annahme, dass der Satz falsch ist, konstruieren wir eine Retraktion, d.h. eine Abbildung mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften von S auf $S \cap W_a^0$. Zu jedem Paar $(u_0, t_0) \in S \cap W^0$ existiert ein $t_1 > t_0$, so dass für $t \in (t_0, t_1)$ die Lösung $(u(t, t_0, u_0), t) \in W^0$ ist, und für t_1 gilt $(u(t_1, t_0, u_0), t_1) \in \partial W^0$. Insbesondere ist $(u(t_1, t_0, u_0), t_1) \in W_a^0$. Wir definieren eine Abbildung $\pi : S \rightarrow W_a^0$ durch $\pi(u_0, t_0) = (u(t_1, t_0, u_0), t_1)$ falls $(u_0, t_0) \notin W_a^0$ und $\pi(u_0, t_0) = (u_0, t_0)$, falls $(u_0, t_0) \in W_a^0$. Dann ist π stetig. Dies folgt, da jeder Austrittspunkt echter Austrittspunkt ist. Sei nun $\tau : W_a^0 \rightarrow S \cap W_a^0$ eine Retraktion. Dann ist $\tau \circ \pi$ eine Retraktion von S auf $S \cap W_a^0$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Bleibt nur noch zu überlegen, warum $S \cap W^0 \neq \emptyset$ ist. Falls dies leer wäre, so wäre $S \subset W_a^0$ und $S \cap W_a^0 = S$ ist ein Retrakt von S im Gegensatz zur Annahme. $\square$

Beispiel 5.3.6 1.) Wir betrachten zunächst ein nichtautonomes Beispiel. Gegeben sei eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche in der ersten Komponente Lipschitz stetig sei. Wir nehmen an, dass es zwei Zahlen $u_1 < u_2 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(u_1, t) < 0 \text{ und } f(u_2, t) > 0.$$

Dann gibt es eine Lösung $u(t)$ von $\dot{u} = f(u, t)$ mit $u_1 < u(t) < u_2 \forall t \in \mathbb{R}$. Sei

$$W^0 = \{(u, t) \mid u_1 < u < u_2\},$$

siehe Abbildung 5.1. Alle Punkte auf den Geraden $u = u_1$, bzw. $u = u_2$ sind Austrittspunkte, sogar echte Austrittspunkte. Sei

$$S = \{(u, 0) \mid u \in [u_1, u_2]\}.$$

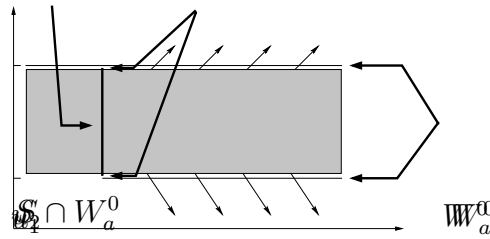


Abbildung 5.1: Wazewski Prinzip: erstes Beispiel

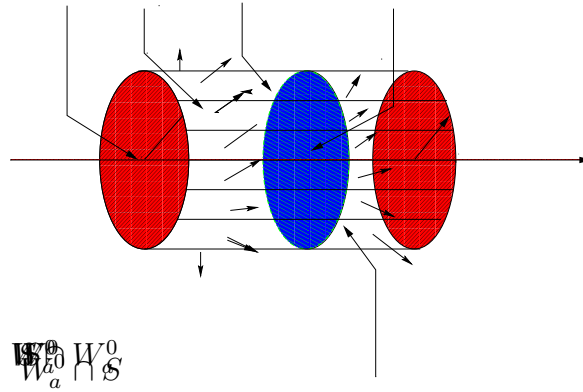


Abbildung 5.2: Das erste Beispiel in höherer Dimension

Dann ist die Menge $S \cap W_a^0 = \{(u_1, 0), (u_2, 0)\}$. Dies ist kein Retrakt von S , aber ein Retrakt von W_a^0 . Damit existiert eine Lösung $u(t, u_0)$, mit $u_0 \in (u_1, u_2)$, die für alle positiven Zeiten in W^0 bleibt. Da W^0 negativ invariant ist, bleibt diese Lösung für alle Zeiten in W^0 . Ein ähnliches Argument funktioniert, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^n$ ersetzt. Auch dort ist der Rand einer Kugel nicht Retrakt der Kugel, aber Retrakt des entsprechenden Zylinders, vgl. Abbildung 5.2.

Man kann dies auf die Problemstellung von Aufgabe ?? anwenden. Wir schauen uns nur die eindimensionale Situation an (in höheren Dimensionen hat man das gleiche Argument). Sei $\dot{u} = \lambda u + f(t)$, $\lambda \neq 0$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann existieren Zahlen $u_1 < 0 < u_2$ mit $\lambda u_1 + f(t) < 0 < \lambda u_2 + f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das vorstehende Argument ist anwendbar, und man erhält eine beschränkte Lösung. Eine Eindeutigkeitsaussage kann man von einem solchen Prinzip nicht erwarten.

2.) Wir betrachten die Abbildung 5.3. Hier schließt man auf die Existenz einer Lösung, die für positive Zeiten in W^0 bleibt. Offenkundig ist

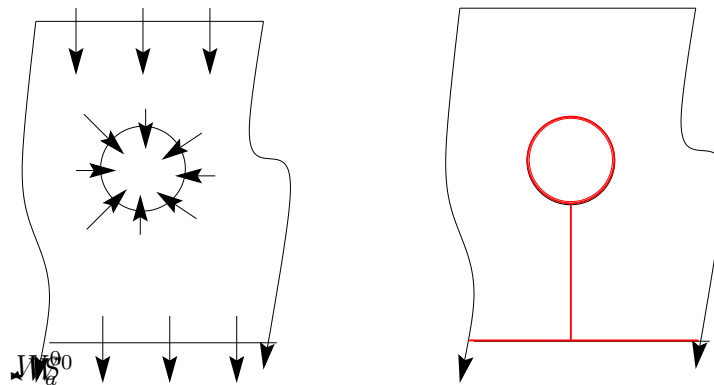


Abbildung 5.3: Wazewski-Prinzip: zweites Beispiel, in der rechten Darstellung die Menge S .

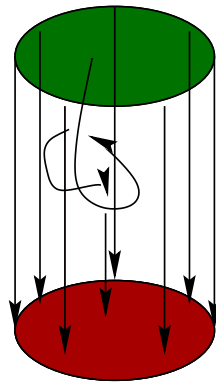


Abbildung 5.4: Ein etwas komplizierteres Beispiel

besteht $S \cap W_a^0$ aus zwei Komponenten, während S zusammenhängend ist. Da $W_a^0 = S \cap W_a^0$, ist dies offenkundig ein Retrakt von W_a^0 , jedoch kein Retrakt von S . In der angedeuteten zweidimensionalen Situation kann man dann mit dem Satz von Poincaré-Bendixson schließen, dass W^0 sogar eine Ruhelage oder einen geschlossenen Orbit enthält. 3.) Wir erwähnen eine weitere Anwendung, die die Mächtigkeit des Wazewski-Prinzips aufzeigt, jedoch für eine vollständige Begründung mehr Kenntnisse aus der Topologie erfordert, als wir zugrunde legen möchten. Dies ist ein Zylinder mit flussinvariantem Mantel, wobei das Vektorfeld am Boden nach außen gerichtet ist, am Deckel nach innen. Allein die Existenz einer Lösung mit dem angedeuteten Knoten impliziert, dass es eine Lösung gibt, die für alle

Zeiten im Inneren bleibt.

5.4 Satz von Poincaré–Bendixson

Im vorigen Abschnitt haben wir Existenz und einige Eigenschaften von Limesmengen kennengelernt. Hier wollen wir einen Satz vorstellen, der zu Beginn unseres Jahrhunderts bewiesen wurde, und nach dem schwedischen Mathematiker Ivar Otto Bendixson³ und dem französischen Mathematiker Jules Henri Poincaré⁴ benannt wurde. Der Satz, mit dem wir uns nun beschäftigen wollen, wurde vor kurzem wiederbelebt, indem eine Verallgemeinerung für bestimmte partielle Differentialgleichungen und auch für sogenannte Funktionaldifferentialgleichungen entdeckt wurde. Zuerst noch ein wichtiges Hilfsmittel, der sogenannte Jordan'sche Kurvensatz.

Satz 5.4.1 (Jordan) *Jeder Jordan Bogen zerlegt den $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten, von denen genau eine beschränkt ist.*

Beweis. s. Deimling [6]. □

Satz 5.4.2 (Poincaré–Bendixson) *Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lipschitz stetig, $\dot{u} = f(u)$ eine autonome Differentialgleichung im $\mathbb{R}^2$ und $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung. Sei $u_0 \in \{u(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ist*

1. $\mathcal{O}_{u_0}^+$ beschränkt, so enthält $\omega(u_0)$ entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit,
2. $\mathcal{O}_{u_0}^-$ beschränkt, so enthält $\alpha(u_0)$ entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit.
3. Sind sowohl $\mathcal{O}_{u_0}^+$, wie auch $\mathcal{O}_{u_0}^-$ beschränkt, so enthalten beide Grenzmen-
gen jeweils entweder eine Ruhelage oder einen periodischen Orbit.

³Ivar Otto Bendixson (1.8.1861–29.11.1935) forschte und lehrte an der Universität Stockholm. Er befaßte sich mit algebraischen Fragen (Auflösung von Gleichungen) wie auch mit Differentialgleichungen

⁴Jules Henri Poincaré (29.4.1854–17.7.1912) war ein Zeitgenosse Hilberts und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, wie auch dieses Jahrhunderts. Er führte topologische Methoden bei der Untersuchung analytischer Probleme ein und wurde damit auch zu einem der Mitbegründer der algebraischen Topologie.

Beweis. Die Beweise sind für die beiden Grenzmengen identisch, wir führen deshalb nur den Beweis für die ω -Limesmenge aus. Sei $U_0 \in \omega(u_0)$ ein regulärer Punkt. Wegen der Invarianz von Grenzmengen ist auch der Orbit durch U_0 wieder in $\omega(u_0)$ und natürlich dann auch dessen Grenzmenge. Dies sieht man ein, indem man annimmt, dass U_1 ein Punkt in der Grenzmenge $\omega(U_0)$ ist. Dann gibt es eine Folge $t_n \rightarrow \infty$, so dass $u(t_n, U_0)$ gegen U_1 konvergiert. Für jedes n existiert eine Folge $t_{n_k} \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ mit $u(t_{n_k}, u_0) \rightarrow u(t_n, U_0)$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gibt es eine Folge, $t_{n_{k_j}}$, so dass $u(t_{n_{k_j}}, u_0)$ gegen U_1 konvergiert. Man führe das Argument aus. Wir wollen zeigen, dass entweder der Orbit $\mathcal{O}$ durch U_0 geschlossen ist, oder die Grenzmenge von $\mathcal{O}$ aus Ruhelagen besteht. Die weiteren Schritte des Beweises wollen wir in einige Lemmata aufgliedern. Der Beweis beruht auf dem Existenzsatz für minimale Mengen und ist demzufolge nicht konstruktiv.

Lemma 5.4.3 *Sei w_0 ein regulärer Punkt und L eine abgeschlossene Transversale zu f in w_0 . D.h. L ist eine Transversale, die durch eine Abbildung γ beschrieben wird, deren Definitionsbereich ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ ist. Sei $L_0 = \gamma(\text{int}(I))$. Sei $V \subset L_0$ definiert durch*

$$V = \{w \in L_0 \mid \exists t_w > 0 : u(t_w, w) \in L_0 \text{ und } u(t, w) \notin L \forall t \in (0, t_w)\}.$$

Sei $W = \gamma^{-1}(V) \subset I$ und $g : W \rightarrow I$ definiert durch

$$g(y) = \gamma^{-1}u(t_{\gamma(y)}, \gamma(y)).$$

Dann ist

1. W offen;
2. g stetig;
3. $g^k(w)$ ist monoton, wobei $g^k(w) = g(g^{k-1}(w))$, solange es definiert ist.

Beweis. Wegen der stetigen Abhängigkeit und der Tatsache, dass L Transversale ist, folgt, dass W offen ist. Ebenso erhält man die Stetigkeit von g . Nun betrachten wir den Jordan Bogen, der für einen Punkt $w \in V$ aus $\{u(t, w) \mid t \in [0, t_w]\}$ und dem Abschnitt in L_0 zwischen w und $u(t_w, w)$ besteht. Ist $w = u(t_w, w)$, so ist diese Lösung periodisch und damit ist für $y \in \gamma^{-1}(w)$, also $g^k(y) = y$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Angenommen, es ist $g^k(y) >$

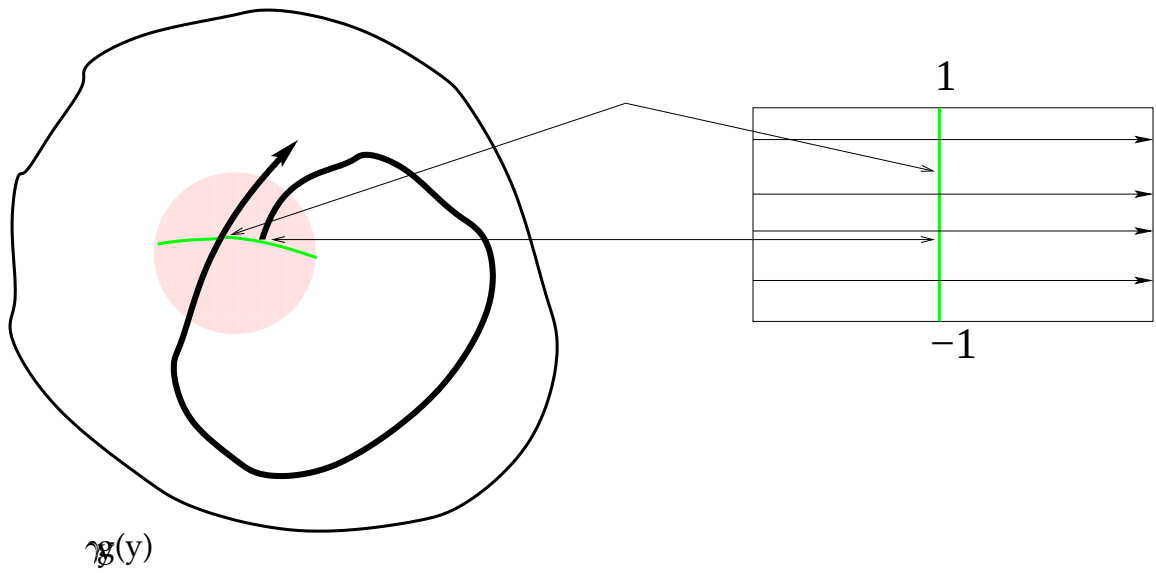
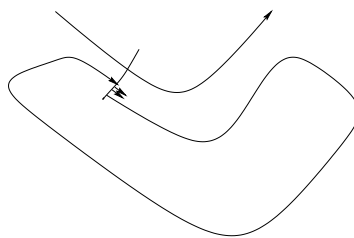
Abbildung 5.5: Konstruktion von g 

Abbildung 5.6: Transversale und Jordan Bogen

$g^{k-1}(y)$ und $g^k(y) \in W$. Dieser Jordan Bogen zerlegt die Ebene in ein beschränktes Gebiet G_b und ein unbeschränktes Gebiet G_u . Da L Transversale ist, können Lösungen diese nur in eine Richtung überqueren. Betrachte $\gamma([g^k(y), b])$. Dieses Stück der Transversale liegt entweder in G_b oder in G_u . Sonst müßte ein Orbit den Abschnitt zwischen w und $u(t_w, w)$ in anderer Richtung queren als der Orbit durch $\gamma^{-1}(g^k(w))$. Demzufolge liegt, falls $g^{k+1}(w)$ definiert ist, dieses auch in $[g^k(w), 1]$. Damit ist per Induktion dieses Lemma gezeigt. $\square$

Wir benötigen noch einen weiteren Satz zur Vorberetung des Beweises.

Satz 5.4.4 (Begradigungssatz) *Sei u_0 ein regulärer Punkt der autonomen Differentialgleichung $\dot{u} = V(u)$, wobei V als Lipschitz stetig vorausgesetzt wird. Dann gibt es Umgebungen W von u_0 und V von 0 im $\mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $\Psi : W \rightarrow V$ welcher die Orbits der Gleichung $\dot{u} = V(u)$ auf die Orbits der Gleichung*

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

im folgenden Sinne abbildet: Sei $u(t, w_0)$ eine Lösung in W , so ist

$$v(t, \Psi(w_0)) = \Psi(u(t, w_0))$$

Lösung des Anfangswertproblems (5.1) und $v(0, \Psi(w_0)) = \Psi(w_0)$. Dabei kann V in der Form $(-a, a) \times B_\delta^{n-1}(0)$ für ein $a > 0$ und

$$B_\delta^{n-1} = \{(x_2, \dots, x_n) \mid |(x_2, \dots, x_n)| < \delta\}$$

gewählt werden. Ist V differenzierbar, so kann Ψ als Diffeomorphismus gewählt werden.

Die Abbildung 5.7 zeigt das begradigte Vektorfeld und den begradigenden Homöomorphismus.

Beweis. Übungsaufgabe! $\square$

Korollar 5.4.5 *Die ω -Limesmenge eines Orbits kann L_0 (das Innere einer Transversale) in höchstens einem Punkt schneiden. Ist $w_0 \in \omega(\mathcal{O}) \cap L_0$, so ist entweder $\omega(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, also $\mathcal{O}$ geschlossen, oder zu einer Lösung $u(t)$ in $\mathcal{O}$ existiert eine Zeitfolge $t_n \rightarrow \infty$ mit $u(t_n) \in L_0$ und $u(t_n) \rightarrow w_0$ (monoton, wie zuvor).*

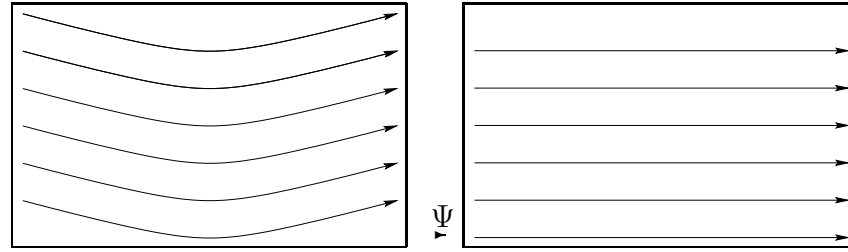


Abbildung 5.7: Begradigung des Vektorfeldes

Beweis. Seien W , V , Ψ wie im Begradigungssatz 5.4.4. Da w_0 Limes einer Folge $u(t_n, u_0)$ ist, gibt es zu jeder Umgebung von w_0 unendlich viele der Punkte $u(t_n, u_0)$. Sei $B_\varepsilon(w_0)$ eine Kugel um w_0 , die vollständig in der Umgebung W enthalten ist. Da jede Lösung mit Anfangswert in $B_\varepsilon(w_0)$ sowohl die Umgebung W verläßt, wie auch die Transversale schneiden muss, hat man unendlich viele Schnittpunkte mit L_0 , falls $\mathcal{O}_{u_0} \cap \mathcal{O}_{w_0} = \emptyset$. Seien nun $u(t^n, u_0)$ die Schnittpunkte der Lösung u mit L_0 . Wegen des vorhergehenden Lemmas hat man die monotone Konvergenz. Daraus folgt auch die Eindeutigkeit. $\square$

Korollar 5.4.6 Falls der positive Halborbit $\mathcal{O}_u^+$ und $\omega(\mathcal{O}_u^+)$ einen gemeinsamen Punkt haben, so ist $\mathcal{O}$ geschlossen.

Beweis. Ist $u_0 \in \mathcal{O}_u^+ \cap \omega(\mathcal{O}_u^+)$, so existiert eine Transversale zu f durch u_0 . Wäre $\omega(\mathcal{O}_u^+) \neq \mathcal{O}$, so gäbe es eine Folge $t_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \infty$ mit $u(t_k) \in L_0$ und $u(t_k) \rightarrow u_0$ (monoton). Da u_0 in $\mathcal{O}_u^+$ liegt, widerspricht dies der monotonen Konvergenz. Damit folgt der Satz aus Korollar 5.4.5. $\square$

Lemma 5.4.7 Ist M eine beschränkte minimale Menge, so ist M entweder eine periodische Lösung oder eine Ruhelage.

Beweis. Jeder Orbit in M hat nichtleere Grenzmengen (wegen der Beschränktheit von M). Diese sind kompakt und invariant. Da M minimal ist, fallen sie mit dem Orbit zusammen:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(\mathcal{O}) \subset M \\ \omega(\mathcal{O}) \subset M \end{array} \right\} M \text{ minimal} \Rightarrow \alpha(\mathcal{O}) = M = \omega(\mathcal{O}).$$

Daher ist $\mathcal{O} \subset \omega(\mathcal{O})$. Entweder M enthält einen regulären Punkt, dann ist der zugehörige Orbit periodisch. Im anderen Fall besteht M aus einer einzigen Ruhelage. $\square$

Nun folgt der Satz von Poincaré–Bendixson unmittelbar: Die ω -Limesmenge ist nichtleer, kompakt und invariant und enthält demzufolge eine minimale Menge. Diese hat die gewünschte Gestalt.

Wir wollen noch etwas mehr zeigen, nämlich dass die Limesmenge einer Lösung im Orbit selbst schon (fast) minimal ist. Dies ergibt einen zweiten Beweis, der nicht auf dem Zorn'schen Lemma beruht.

Lemma 5.4.8 *Sei $\mathcal{O}_{U_0}$ ein Orbit in der Grenzmenge $\omega(u_0)$. Ist w_0 ein regulärer Punkt in $\mathcal{O}_{U_0}$, so hat man folgende Alternative:*

1. $\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ enthält einen geschlossenen Orbit $\mathcal{O}_1$. Dann ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{w_0}$.
2. $\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ enthält keinen regulären Punkt.

Beweis. Angenommen v_0 ist ein regulärer Punkt in $\mathcal{O}_{w_0}$. Wir müssen zeigen, dass erstens der Orbit $\mathcal{O}_{v_0}$ geschlossen ist und zweitens mit dem Orbit $\mathcal{O}_{w_0}$ zusammenfällt. Sei L eine abgeschlossene Transversale zu f in v_0 mit Innerem L_0 . Dann kann $u(t, w_0)$ die Transversale L_0 wegen Korollar 5.4.5 in höchstens einem Punkt schneiden. Andererseits gibt es eine Folge $t_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \infty$, so dass $u(t_k) \rightarrow w_0$ konvergiert. Wegen des Begradigungssatzes schneidet jede Lösung, die dem Punkt v_0 nahe kommt auch die Transversale in einem Punkt nahe v_0 . Also gibt es ein k_0 , so dass aus $k > k_0$ folgt $u(t_k) = v_0$. Damit ist $u(t)$ periodisch und es folgt die erste Aussage. $\square$

Wir bemerken, dass die zweite Möglichkeit noch genauer formuliert werden kann, entweder $\omega(\mathcal{O}_{w_0})$ besteht aus einer Ruhelage oder unendlich vielen. Dies folgt u.a. aus dem nächsten Korollar, mit dem man genauere Aussagen über die Struktur der Grenzmengen macht. Wir fassen diese in der folgenden Aussage zusammen.

Korollar 5.4.9 (Struktur der Grenzmengen) *Sei f wie im Satz und habe in U nur endlich viele kritische Punkte. Es sei u eine halbseitig beschränkte Lösung. Dann besteht die entsprechende Limesmenge entweder aus*

1. *einer endlichen Anzahl von Ruhelagen U_ℓ , $\ell = 1, \dots, m$ und m Lösungen u_ℓ $\ell = 1, \dots, m$ mit $u_\ell(t) \rightarrow_{t \rightarrow -\infty} U_\ell$ und $u_\ell(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} U_{\ell+1 \pmod{m}}$ und einer nicht bestimmten Zahl von Lösungen $u_{k,\ell}(t, u_0)$ mit $\omega(u_0) = \alpha(u_0) = U_\ell$, die wir als Schleifen bezeichnen wollen, oder*
2. *einem periodischen Orbit.*

Beweis. Dies folgt aus dem Beweis des Satzes 5.4.2. Angenommen, $\mathcal{O}$ ist ein Orbit in $\omega(u_0)$, $u_0 = u(0)$. Entweder dieser korrespondiert zu einer Ruhelage oder einer periodischen Lösung oder er enthält einen regulären Punkt und ist nicht geschlossen. Im zweiten Fall ist der geschlossene Orbit die gesamte Grenzmenge, nach Lemma 5.4.8. Im dritten Fall enthält die Grenzmenge keinen regulären Punkt. Also ist die Grenzmenge in der diskreten Menge der Ruhelagen enthalten und besteht wegen des Zusammenhangs von Grenzmengen aus einer einzigen Ruhelage. Auf diese Weise kann man jedem Orbit mit regulären Punkten genau eine Ruhelage in der ω - und eine in der α -Limesmenge zuordnen. Der Satz ist gezeigt, wenn diese Zuordnung injektiv auf einer Teilmenge ist, d.h. eine Teilmenge der Orbits mit regulären Punkten existiert, so dass je zwei verschiedene Orbits verschiedene Grenzmengen haben. Dies folgt durch die Betrachtung von Transversalen in verschiedenen regulären Punkten. $\square$

Korollar 5.4.10 *Ist $\mathcal{O}^+$ ein beschränkter Halborbit und enthält $\omega(\mathcal{O}^+)$ mindestens einen regulären Punkt und genau eine Ruhelage U_0 , so besteht $\omega(\mathcal{O}^+)$ aus mindestens zwei Orbits, nämlich $\{U_0\}$ und $\mathcal{O}_0$ mit*

$$\alpha(\mathcal{O}_0) = \omega(\mathcal{O}_0) = \{U_0\}$$

und eventuell weiteren Orbits (Schleifen) wie in Korollar 5.4.9 im Punkt 1.

Definition 5.4.11 (a) *Sind U_1, U_2 Ruhelagen und ist $u(t, u_0)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ mit $\omega(u_0) = U_2$ und $\alpha(u_0) = U_1$, so nennt man den zugehörigen Orbit einen heteroklinen Orbit. Man spricht auch von einem verbindenden Orbit (engl. connecting orbit).*
 (b) *Sind in der Definition des Teils (a) die Punkte $U_1 = U_2$ gleich, so wird der in (a) beschriebene Orbit als homokliner Orbit bezeichnet.*

Bemerkung 5.4.12 *Mit dieser Terminologie besteht die ω -Limesmenge einer beschränkten Lösung eines zweidimensionalen autonomen Systems entweder aus einem periodischen Orbit oder entweder aus einer Ruhelage und homoklinen Orbits oder aus endlich vielen Ruhelagen und einer gleichen Anzahl von heteroklinen Orbits und einer unbestimmten Zahl von homoklinen Orbits (falls nur endlich viele kritische Punkte vorhanden sind).*

Definition 5.4.13 *Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ heißt einfach zusammenhängend, wenn sie homöomorph zum offenen Einheitskreis ist.*

Für den Beweis des nächsten Satzes möchte ich ein Ergebnis zitieren, dessen Beweis z.B. in [5] zu finden ist.

Satz 5.4.14 *Jede stetige Abbildung des abgeschlossenen Einheitskreises in sich hat einen Fixpunkt.*

Satz 5.4.15 *Gegeben sei eine Differentialgleichung wie im Satz 5.4.2. Die Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ sei einfach zusammenhängend. Dann umschließt jeder periodische Orbit eine Ruhelage.*

Bemerkung 5.4.16 Eine periodische Lösung entspricht einem geschlossenen Orbit, dieser wiederum ist eine Jordankurve. Nach dem Jordan'schen Satz zerlegt der Orbit den $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten, von denen eine beschränkt ist. Die Aussage des Satzes ist, dass die beschränkte Komponente einen stationären Punkt enthält. Da U einfach zusammenhängend ist, ist auch die beschränkte Komponente einfach zusammenhängend und damit homöomorph zum offenen Einheitskreis. Diese an sich recht anschauliche Behauptung wird in der Funktionentheorie bewiesen.

Beweis. Sei G_b die beschränkte Komponente, die von dem geschlossenen Orbit nach dem Jordan'schen Kurvensatz definiert wird. Weiter sei H deren Abschluß. Zu jedem $\tau > 0$ betrachten wir die Abbildung $\Phi_\tau : H \rightarrow H$. Es ist klar, dass wegen des Eindeutigkeitssatzes die Menge H invariant ist. Da H homöomorph zum abgeschlossenen Einheitskreis ist, hat jede Abbildung Φ_τ einen Fixpunkt u_τ . Ist nun $\{\tau_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ eine gegen Null konvergierende Folge, und u_m eine Folge von Fixpunkten von Φ_{τ_m} , so kann man o.B.d.A. davon ausgehen, dass die Menge u_m gegen u^* konvergiert (nach Übergang zu einer Teilfolge). Zu jedem $t > 0$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert eine Zahl $k_m(t)$ mit der Eigenschaft $k_m(t)\tau_m \leq t < (k_m(t) + 1)\tau_m$. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} |\Phi_t(u^*) - u^*| &\leq |\Phi_t(u^*) - \Phi_t(u_m)| + |\Phi_t(u_m) - u_m| + |u_m - u^*| \\ &= |\Phi_t(u^*) - \Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m)| + |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - u_m| + |u_m - u^*|. \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Term werden aufgrund der Konvergenz von $u_m \rightarrow u^*$ und der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten klein. Für den mittleren Ausdruck brauchen wir eine gewisse Gleichmäßigkeit der Konvergenz von $\Phi_t(\cdot) \rightarrow \mathbb{1}$ für $t \rightarrow 0$. Wir umgehen dies mit folgender Abschätzung::

$$|\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - u_m| \leq |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u_m) - \Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u^*)| + |\Phi_{t-k_m(t)\tau_m}(u^*) - u^*| + |u^* - u_m|$$

Hier wird wieder der erste und der letzte Ausdruck klein, wegen der Konvergenz $u_m \rightarrow u^*$ und der stetigen Abhängigkeit. Der mittlere Ausdruck wird klein, da

$$t - k_m(t)\tau_m \rightarrow 0$$

konvergiert. □

5.4.1 Invariante Mannigfaltigkeiten

In der Nähe regulärer Punkte gibt der Begradigungssatz eine Art Normalform für den Fluss.

Für kritische Punkte, also für Ruhelagen gibt es keine entsprechende Aussage. Man muss noch eine zusätzliche Voraussetzung machen um einen entsprechenden Satz beweisen zu können. Wir erinnern an den Begriff der hyperbolischen Ruhelage aus Definition 4.1.13 und definieren entsprechend den Begriff des hyperbolischen periodischen Orbits.

Definition 5.4.17 *Eine periodische Lösung heißt hyperbolisch, wenn alle Floquetmultiplikatoren vom Betrag ungleich 1 sind.*

Gegeben sei nun ein autonomes C^1 -Vektorfeld $v : M \rightarrow TM$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (oder $U \subset \mathbb{R}^n$). Es sei u_0 eine hyperbolische Ruhelage. Es sei $k_s = \dim E_s$ und $k_u = \dim E_u$. Dann gilt der folgende Satz über die Existenz lokaler stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten.

Satz 5.4.18 (Lokale invariante Mannigfaltigkeiten) *Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ bzw. $V \subset M$ von u_0 und*

1. *eine C^1 -Mannigfaltigkeit $W_{loc}^s(u_0) \subset V$ mit $u_0 \in W_{loc}^s(u_0)$ und $T_{u_0}W^s(u_0) = E_s$, so dass für alle $v_0 \in V$ gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, v_0) = u_0.$$

2. *eine C^1 -Mannigfaltigkeit $W_{loc}^u(u_0) \subset V$ mit $u_0 \in \tilde{W}^u(u_0)$ und $T_{u_0}\tilde{W}^s(u_0) = E_u$, so dass für alle $v_0 \in V$ gilt*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t, v_0) = u_0.$$

Definition 5.4.19 *Die Mannigfaltigkeit $W_{loc}^s(u_0)$ heißt eine lokal stabile Mannigfaltigkeit von u_0 . Entsprechend bezeichnet man die Mannigfaltigkeit $W_{loc}^u(u_0)$ als lokal instabile Mannigfaltigkeit.*

Für den folgenden Satz nehmen wir an, dass wir entweder auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M arbeiten, oder aber (in der Zeit) globale Existenz von Lösungen gewährleistet sei.

Definition 5.4.20 (Globale invariante Mannigfaltigkeiten) *Es sei Φ der zu unserer Differentialgleichung gehörende Fluss, u_0 eine hyperbolische Ruhelage und $W^s(u_0)$, bzw. $W^u(u_0)$ seien lokal stabile, bzw. lokal instabile Mannigfaltigkeiten. Dann*

Satz 5.4.21 (Globale invariante Mannigfaltigkeiten) *Es seien*

$$W^s(u_0) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Phi(W_{loc}^s(u_0), -k)$$

und

$$W^u(u_0) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Phi(W_{loc}^u(u_0), k).$$

Dann sind $W^s(u_0)$ und $W^u(u_0)$ Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Folgt aus dem Satz 5.4.18 und der Tatsache, dass $\Phi(\cdot, k)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein Diffeomorphismus ist. $\square$

