

Kapitel 4

Stabilität

In diesem Kapitel befassen wir uns zunächst mit der Stabilität von Ruhelagen, danach betrachten wir periodische Orbits diskreter Systeme und im vorletzten Abschnitt mit der Stabilitätstheorie von periodischen Orbits gewöhnlicher Differentialgleichungen. Im letzten Abschnitt wollen wir erstens einen Ausblick auf den Zusammenhang zwischen Stabilitätstheorie und der Theorie invarianter Mannigfaltigkeiten geben und zweitens Elemente der Bifurkationstheorie einführen. Im ersten Abschnitt werden wir auch das berühmte Lorenz-System¹ einführen, das die Entwicklung der Theorie der letzten zwanzig Jahre wesentlich mit beeinflusst hat.

Inhalt

4.1	Stabilität von Ruhelagen	98
4.2	Periodische Orbits in diskreten Systemen	111
4.3	Periodische Orbits und Floquettheorie	114
4.3.1	Periodische Orbits und Variationsgleichung . . .	114
4.3.2	Floquetmultiplikatoren	120
4.4	Ljapunov-Funktionen	123

¹

4.1 Stabilität von Ruhelagen

Ein hinreichendes Stabilitätskriterium geht auf den russischen Mathematiker Ljapunov² zurück, das er in seiner Dissertation im Jahre 1892 bewies. Wir beginnen mit einer Aussage zum Lösungsverhalten linearer Gleichungen.

Satz 4.1.1 (Spektrum und Stabilität I) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir betrachten nochmals die Differentialgleichung

$$\dot{u} = Au.$$

Die Lösungen zeigen folgendes Verhalten:

1. Haben alle Eigenwerte negativen Realteil, so ist 0 die einzige beschränkte Lösung und alle anderen konvergieren für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. Für $t \rightarrow -\infty$ hat man Konvergenz gegen unendlich.
2. Gibt es einen Eigenwert mit positivem Realteil, so gibt es eine Lösung, die für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0 konvergiert und für $t \rightarrow \infty$ jedes Kompaktum verläßt.
3. Gibt es einen Eigenwert mit Realteil 0, so existiert zumindest eine Lösung $u(t, u_0)$, $u_0 \neq 0$, welche für alle Zeiten beschränkt ist.

Beweis. 1.) Angenommen, u_0 ist Anfangswert einer beschränkten Lösung $u(t, u_0)$. Jede Lösung der linearen Gleichung hat nach der Bemerkung die dem Beweis von Satz 2.5.5 folgt und der eindeutigen Lösbarkeit die Darstellung $u(t, u_0) = E(A, t)u_0$. Sei C die Matrix, die A in die komplexe Jordan Normalform J transformiert, $v_0 = Cu_0$ ist dann der Anfangswert für eine beschränkte Lösung $v(t) = E(J, t)v_0$. Sei $v_0 = (v_0^1, \dots, v_0^n)$. Ist $u_0 \neq 0$, so ist $v_0 \neq 0$ und es gibt ein $\mu \in \{1, \dots, n\}$ mit $v_0^\mu \neq 0$ und für $m \in \{\mu + 1, \dots, n\}$ ist $v_0^m = 0$. Sei λ der Eigenwert zum μ -ten Eigenvektor in der Basis zur Jordan Form. So ist die μ -te Komponente von

²Aleksandr Michailowitsch Ljapunov (6.6.1857-3.11.1918) leistete in seiner Dissertation fundamentale Beiträge zur Stabilitätstheorie. Weitere Ergebnisse in der Theorie der Differentialgleichungen betreffen die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, ein Problem das von Riemann studiert worden war und bis heute aktuell ist.

$E(J, t)v_0$ gegeben durch $e^{\lambda t}v_0^\mu$. Dann ist $\|e^{\lambda t}v_0\| \geq e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}|v_0^\mu|$. Für $t \rightarrow -\infty$ ist dies unbeschränkt. Um die Konvergenz zu zeigen, betrachten wir $\nu = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\nu < 0$ und $E(J, t) = e^{\nu/2 t}F(t)$. Dabei ist F eine matrixwertige Funktion. Jedes $F(t)$ ist eine obere Dreiecksmatrix, mit Einträgen $e^{\rho t}p(t)$, wobei p ein Polynom ist und $\operatorname{Re}(\rho) < 0$. Dann ist $\|F(t)\|$ beschränkt und $\|E(J, t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Damit konvergiert auch

$$\|E(A, t)\| = \|C^{-1}E(J, t)C\| \leq \|C^{-1}\| \|E(J, t)\| \|C\|$$

für $t \rightarrow \infty$ gegen null.

2.) Die zweite Aussage beweist man ebenso wie die Unbeschränktheit für $u(t, u_0)$ für $t \rightarrow -\infty$ im ersten Fall. Man betrachtet hier einfach einen Anfangswert im verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert mit positivem Realteil.

3.) Die dritte Aussage erhält man, indem man einen Eigenvektor als Anfangswert im Eigenraum des Eigenwertes λ mit verschwindendem Realteil betrachtet. Hier unterscheiden wir zwei Fälle:

(a) $\lambda = 0$

(b) $\lambda \neq 0$.

Der erste dieser Fälle ist einfach. Ist u_0 im Kern von A , so ist natürlich $E(A, t)u_0 = u_0$ für alle t und damit ist die Lösung $u(t, u_0) = u_0$ eine konstante, und damit beschränkte Lösung.

Im zweiten Fall hat man im Komplexen einen Anfangswert u_0^c , so dass $E(A, t)u_0^c = e^{\lambda t}u_0^c$ ist, also gilt $\|E(A, t)u_0^c\| = |e^{\lambda t}||u_0^c| = \|u_0^c\|$. Wir setzen $u_0 = u_0^c + \overline{u_0^c}$. Dies ist ein reeller Vektor. Es gilt dann $E(A, t)u_0 = e^{\lambda t}u_0^c + e^{-\lambda t}\overline{u_0^c}$. Da $\overline{\lambda} = -\lambda$ ist dies immer reell. Da beide Summanden in der Norm beschränkt sind, folgt dies auch für $E(A, t)u_0$. $\square$

Zwei Hilfssätze wollen wir vor dem wesentlichen Resultat bereitstellen.

Hilfssatz 4.1.2 (a) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gibt es zu jedem $\alpha > \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ eine Konstante $M_\alpha \geq 1$, so dass für alle $t \geq 0$ gilt

$$\|E(A, t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t}.$$

(b) Entsprechend gibt es zu jedem $\beta < \min\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ eine Konstante $N_\beta \geq 1$ mit

$$\|E(A, t)\| \leq N_\beta e^{\beta t} \quad \forall t \leq 0.$$

Beweis. Es reicht (a) zu beweisen. Die Aussage (b) folgt dann in gleicher Weise. Die Aussage folgt im wesentlichen aus dem Beweis des Satzes über Spektrum und Stabilität I, d.h. Satz 4.1.1. Sei α wie im Hilfssatz angegeben. Wir schreiben $A = A - \alpha \mathbb{1} + \alpha \mathbb{1}$. Da $\mathbb{1}$ mit jeder anderen Matrix kommutiert, erhält man

$$\|E(A, t)\| \leq e^{\alpha t} \|E(A - \alpha \mathbb{1}, t)\|.$$

Da alle Eigenwerte von $A - \alpha \mathbb{1}$ in der linken Halbebene sind, ist nach dem Beweis von Satz 4.1.1 $E(A - \alpha \mathbb{1}, t)$ für $t \geq 0$ beschränkt. Das heißt also, es gibt eine Konstante $M_\alpha > \|E(A - \alpha \mathbb{1}, t)\|$ und damit $\|E(A, t)\| < M_\alpha e^{\alpha t}$, wie behauptet. $\square$

Hilfssatz 4.1.3 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung der Null, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$. Dann existiert zu jedem $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ mit

$$|u_1| < \eta, |u_2| < \eta \Rightarrow |g(u_1) - g(u_2)| < L|u_1 - u_2|.$$

Beweis. Da die Ableitung $Dg(u)$ stetig in U ist, läßt sich zu jeder Konstante $L > 0$ eine Zahl $\eta > 0$ finden, so dass $\|Dg(u)\| < L$ für $|u| < \eta$ ist. Wegen des Mittelwertsatzes läßt sich die Lipschitz Konstante auf einer Umgebung durch die maximale Norm der Ableitung abschätzen. $\square$

Satz 4.1.4 (Ljapunov, Spektrum und Stabilität II) Gegeben sei eine autonome Differentialgleichung (??) mit einer Ruhelage u_0 . Die Abbildung f sei in einer Umgebung von u_0 stetig differenzierbar und $A = Df(u_0)$ sei die Linearisierung (Ableitung) von f im Punkt u_0 . Dann gilt:

1. Haben alle Eigenwerte von A negative Realteile, so ist u_0 asymptotisch stabil.
2. Gibt es einen Eigenwert von A dessen Realteil positiv ist, so ist u_0 instabil.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Stabilitätsaussage. O.B.d.A. dürfen wir davon ausgehen, dass $u_0 = 0$ ist. Zur Erleichterung der Schreibweise wollen wir dies auch tun. Da $A = Df(0)$ ist, kann man die Abbildung f in der Form $f(u) = Au + g(u)$ schreiben, wobei g bei 0 stetig differenzierbar ist und $Dg(0) = 0$ ist. Also hat die zu betrachtende Gleichung die Form

$$\dot{u} = Au + g(u) \tag{4.1}$$

Wir müssen die Stabilität und die Attraktivität von $u_0 = 0$ zeigen. Die Stabilität kann man auch so formulieren: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|v_0\| < \delta \implies \|u(t, v_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $v_0 \in U$. Die Lösung $u(t) = u(t, v_0)$ von (4.1) genügt der Integralgleichung

$$u(t) = E(A, t)v_0 + \int_0^t E(A, t-s)g(u(s))ds,$$

da natürlich nach Einsetzen der Lösung $u(t, v_0)$ in die Gleichung (4.1) daraus mit $h(t) = g(u(t, v_0))$ die äquivalente Gleichung

$$\dot{u} = Au + h(t)$$

entsteht. Sei $\mu = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Dann ist $\mu < 0$ und die Norm von $E(A, t)$ kann für jedes $\alpha \in (\mu, 0)$ abgeschätzt werden durch

$$\|E(A, t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t},$$

wobei M_α die reelle Konstante ist, deren Existenz der Hilfssatz 4.1.2 gewährleistet. Wir finden auch eine positive Konstante $L > 0$ mit

$$M_\alpha L < \frac{1}{2} \min\{-\alpha, 1\}.$$

Nach Hilfssatz 4.1.3 gibt es ein $\eta > 0$, $\eta < \varepsilon$, so dass auf $B_\eta(0)$ die Funktion g die Lipschitz Konstante L hat. Sei $\delta = \frac{1}{2} \frac{\eta}{M_\alpha}$. Nun hat man für $\|v_0\| < \delta$ die Abschätzung

$$\|u(t, v_0)\| \leq \|E(A, t)\| \|v_0\| + \int_0^t \|E(A, t-s)\| \|f(u(s, v_0))\| ds. \quad (4.2)$$

Einsetzen ergibt (jedenfalls solange $\|u(s, v_0)\| < \eta$ ist)

$$\begin{aligned} \|u(t, u_0)\| &\leq M_\alpha e^{\alpha t} \delta + M_\alpha L \eta \int_0^t e^{\alpha(t-s)} ds \\ &< \frac{1}{2} \eta + M_\alpha L \eta \frac{1}{|\alpha|} (1 - e^{\alpha t}) \\ &< \frac{1}{2} \eta + M_\alpha L \eta \frac{1}{|\alpha|} \\ &< \eta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit hat man die Stabilität, denn angenommen es gäbe eine Zahl $t^* > 0$ mit $\|u(t^*, v_0)\| = \eta$, dann kann man o.B.d.A. davon ausgehen, dass t^* minimal gewählt wurde. Dann ist für $t \in (0, t^*)$ $\|u(t, v_0)\| < \eta$. Unsere Abschätzung garantiert, dass auch noch für $t = t^*$ die Lösung $u(t, v_0)$ in $B_\eta(0)$ enthalten ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Um die asymptotische Stabilität zu zeigen, nutzen wir die Formel (4.2) und schätzen etwas anders ab:

$$\|u(t, v_0)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t} \delta + M_\alpha L \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \|u(s, v_0)\| ds. \quad (4.3)$$

Multiplikation mit $e^{-\alpha t}$ liefert für die Funktion $v(t) = e^{-\alpha t} \|u(t, v_0)\|$ die Abschätzung

$$v(t) \leq M_\alpha \delta + M_\alpha L \int_0^t v(s) ds.$$

Hier verwenden wir das Lemma von Gronwall (Lemma 3.2.5) und erhalten

$$v(t) \leq M_\alpha \delta e^{M_\alpha L t}.$$

Damit ergibt sich für die Norm von $u(t, u_0)$ die Abschätzung

$$\|u(t, u_0)\| \leq M_\alpha \delta e^{(M_\alpha L + \alpha)t}.$$

Da $M_\alpha L + \alpha < 0$ ist, konvergiert dies gegen Null. Damit ist die asymptotische Stabilität gezeigt.

Wir nehmen nun an, dass die Linearisierung einen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt. Wir zeigen, dass es eine nichttriviale Lösung $u(t)$ gibt mit $u(t) \rightarrow w_0$ für $t \rightarrow -\infty$. Daraus folgt dann die Behauptung. Zunächst wollen wir uns überlegen, wie die Aussage des Satzes aus dieser Tatsache folgt. Dies werden wir als eigenes Lemma formulieren. Sei $u(t)$ eine Lösung mit $u(t) \rightarrow w_0 = 0$ für $t \rightarrow -\infty$. Sei $\varepsilon = \|u(0)\| > 0$. (Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass 0 im maximalen Existenzintervall enthalten ist.) Angenommen, es existiere ein $\delta > 0$, so dass aus $|u_0| < \delta$ folgen würde, dass für alle $t \geq 0$ gilt $\|u(t, u_0)\| < \varepsilon$, so könnte man schließen, dass $\|u(t)\| > \delta \forall t \leq 0$. Dies ist ein Widerspruch. Wie angekündigt wollen wir die Existenz von $u(t)$ getrennt zeigen. $\square$

Definition 4.1.5 Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann bezeichnen wir mit E^+ die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten mit positivem Realteil, entsprechend mit E^- die Summe der verallgemeinerten Eigenräume zu Eigenwerten

mit negativem Realteil, und E^0 entsprechend mit Realteil 0. P^+ , P^- , P^0 schreiben wir für die Projektoren auf diese Räume mit Kern $E^0 \oplus E^-$ bzw. $E^+ \oplus E^-$ bzw. $E^0 \oplus E^+$. Weiter seien $Q^+ = I - P^+$, $Q^- = I - P^-$ die entsprechenden komplementären Projektoren. Weiterhin wollen wir vereinbaren, dass $\sigma^+(A)$ für $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ steht und ganz entsprechend $\sigma^0(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$, bzw. $\sigma^-(A) = \sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$ definiert sind.

Lemma 4.1.6 Die Räume E^+ , E^- und E^0 sind invariante Unterräume für A , d.h. $AE^+ \subset E^+$, $AE^- \subset E^-$ und schließlich $AE^0 \subset E^0$.

Beweis. Folgt sofort aus der Definition der Räume. □

Definition 4.1.7 Die Einschränkungen von A auf die verschiedenen Unterräume wollen wir folgendermaßen bezeichnen:

$$\begin{aligned} A_u &= A|_{E^+} \\ A_s &= A|_{E^-} \\ A_c &= A|_{E^0} \\ A_{cu} &= A|_{E^0 \oplus E^+} \\ A_{cs} &= A|_{E^0 \oplus E^-} \end{aligned}$$

Lemma 4.1.8 (a) Die jeweiligen Spektren dieser lineare Abbildungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sigma(A_u) &= \sigma^+(A) \\ \sigma(A_s) &= \sigma^-(A) \\ \sigma(A_c) &= \sigma^0(A) \\ \sigma(A_{cu}) &= \sigma^0(A) \cup \sigma^+(A) \\ \sigma(A_{cs}) &= \sigma^0(A) \cup \sigma^-(A). \end{aligned}$$

(b) Die Matrixexponentialfunktionen der Einschränkungen A_u , A_{cs} genügen den Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \forall \beta < \frac{1}{3} \min \{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma^+(A) \} \quad \exists N_{3\beta} \geq 1 \quad \|E(A_u, t)\| \leq N_{3\beta} e^{3\beta t} \quad \forall t \leq 0 \\ \forall \alpha > 0 \quad \exists M_\alpha \geq 1 \quad \|E(A_{cs}, t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t} \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Hilfssatz 4.1.2. $\square$

Bemerkung 4.1.9 Ähnliche Abschätzungen gelten natürlich auch für die anderen Teile von A .

Bemerkung 4.1.10 Außerdem kann man eine solche Dreiteilung auch an anderen Achsen als der imaginären Achse vornehmen.

Satz 4.1.11 Sei $\dot{u} = Au + g(u)$ eine autonome Differentialgleichung mit stetig differenzierbarem $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$. Hat A Eigenwerte mit positivem Realteil, so existiert eine Umgebung $B_\delta(0)$, so dass zu jedem $u_0 \in B_\delta(0) \cap E^+$ eine Lösung $u(t)$ existiert mit

1. $P^+u(0) = u_0$,
2. $u(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$.

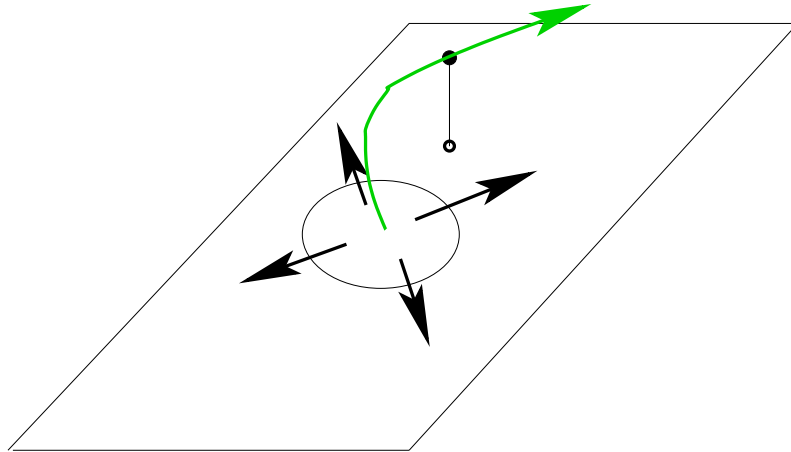


Abbildung 4.1: Existenz einer Lösung, die für $t \rightarrow -\infty$ gegen eine Ruhelage konvergiert. Die schwarzen Pfeile deuten den linearisierten Fluss in dem Raum E^+ an, die grüne Linie eine Lösung der Gleichung mit $P^+u(0) = u_0$.

Beweis. Wähle ein

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{3} \min \{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma^+(A) \} \right).$$

Dann gibt es nach dem oben angegebenen Lemma 4.1.8 Zahlen M_α und $N_{3\alpha}$ mit den entsprechenden Abschätzungen $\|E(A_{cs}, t)\| \leq M_\alpha e^{\alpha t}$ für positive t und

$$\|E(A_u, t)\| \leq N_{3\alpha} e^{3\alpha t}$$

für nichtpositive t . Setze

$$M = \max \{M_\alpha, N_{3\alpha}\}.$$

Damit gilt $\|E(P^+ A, t)P^+\| \leq M e^{3\alpha t}$ für $t \leq 0$ und $\|E(Q^+ A, t)Q^+\| \leq M e^{\alpha t}$ für $t > 0$. Wir wählen $\eta > 0$ so klein, dass

$$\frac{ML(\eta)}{\alpha} \max \{\|P^+\|, \|Q^+\|\} < \frac{1}{4}$$

ist, wobei $L(\eta)$ die Lipschitz Konstante von g auf $B_\eta(0)$ ist. Wir betrachten den Raum der Funktionen

$$C^\alpha(u_0) = \{u : (-\infty, 0] \rightarrow U \mid u \text{ ist stetig, } \|u(t)\| < \eta e^{2\alpha t} < \infty, P^+ u(0) = u_0\}.$$

Auf $C^\alpha(u_0)$ definieren wir eine Metrik d^α durch

$$d^\alpha(u, v) = \eta \sup \{\|u(t) - v(t)\| e^{-2\alpha t} \mid t \leq 0\}.$$

d^α macht $C^\alpha(u_0)$ zum vollständigen, metrischen Raum. Wir prüfen die Vollständigkeit nach. Sei $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Metrik d^α . Dann existiert ein punktwiser Limes $u(t)$. Wir müssen zeigen, dass u wieder in C^α liegt. Dazu prüfen wir die Wachstumsbedingung nach:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|u(t) - u_n(t)\| + \|u_n(t)\| \leq \|u(t) - u_n(t)\| e^{-2\alpha t} e^{2\alpha t} + \eta e^{2\alpha t} \\ &\leq (d^\alpha(u, u_n) + \eta) e^{2\alpha t} \leq (\varepsilon + \eta) e^{2\alpha t}. \end{aligned}$$

Wir setzen für $t \leq 0$

$$Tu(t) = e^{P^+ A t} u_0 + \int_0^t e^{P^+ A(t-s)} P^+ g(u(s)) ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+ A(t-s)} Q^+ g(u(s)) ds. \quad (4.4)$$

Wir müssen für ein genügend kleines $\delta > 0$ drei Dinge beweisen:

1. T bildet für $\|u_0\| < \delta$ den Raum $C^\alpha(u_0)$ in sich ab.
2. T ist eine starke Kontraktion.

3. Der Fixpunkt u hat die gewünschten Eigenschaften.

1.) T bildet den Raum $C^\alpha(u_0)$ in sich ab. Dazu müssen wir die drei Eigenschaften nachprüfen, nämlich die Stetigkeit von Tu , die Wachstumsbeschränke und schließlich die Anfangsbedingung. Die Stetigkeit von Tu ist klar, sofern die Integrale existieren. Auch die letzte Eigenschaft ist offensichtlich:

$$P^+Tu(0) = P^+E(P^+A, 0)u_0 + P^+ \int_{-\infty}^0 E(Q^+A, -s)Q^+g(u(s))ds.$$

Dies ist gleich P^+u_0 . Bleibt die Beschränktheit von Tu zu zeigen. Dazu schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \|Tu(t)\| &\leq \|e^{P^+At}\| \|u_0\| + \int_t^0 \|e^{P^+A(t-s)}\| \|P^+\| L(\eta) \|u(s)\| ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \|e^{Q^+A(t-s)}\| \|Q^+\| L(\eta) \|u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt mit

$$C = ML(\eta) \max\{\|P^+\|, \|Q^+\|\}$$

(Dabei beachte man, dass im zweiten Integral die Zeitdifferenz positiv, im dritten negativ ist.)

$$\|Tu(t)\| \leq Me^{\alpha t} \|u_0\| + C \left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} \|u(s)\| ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} \|u(s)\| ds \right).$$

Wegen der Wachstumsbeschränkung in C^α kann man weiter abschätzen

$$\|Tu(t)\| \leq Me^{3\alpha t} \|u_0\| + C \left(\int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} e^{2\alpha s} ds + \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} e^{2\alpha s} ds \right).$$

Wir betrachten zunächst das erste Integral, es liefert folgenden Beitrag:

$$e^{3\alpha t} \int_t^0 e^{-3\alpha s} e^{2\alpha s} ds = e^{3\alpha t} \frac{1}{-\alpha} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Dies ergibt als obere Abschätzung für das erste Integral

$$\frac{1}{\alpha} (e^{2\alpha t} - e^{3\alpha t}).$$

Für das zweite Integral erhält man

$$e^{\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{\alpha s} ds \leq \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha t}.$$

Zusammen ergibt sich die endgültige Abschätzung

$$\|Tu(t)\| \leq Me^{3\alpha t} \|u_0\| + ML(\eta)\eta \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha t} - \frac{ML(\eta)\eta}{\alpha} e^{3\alpha t}.$$

Mit $\delta < \frac{L(\eta)\eta}{\alpha}$ und der Wahl von η erhält man

$$\|Tu(t)\| \leq \eta e^{2\alpha t}.$$

Damit haben wir den ersten Schritt abgeschlossen.

2.) Seien $u_1, u_2 \in C^\alpha(u_0)$. Wir müssen den Abstand $d^\alpha(Tu_1, Tu_2)$ kontrollieren. Also

$$d^\alpha(Tu, Tv) = \eta \sup \{ \|Tu(t) - Tv(t)\| e^{-2\alpha t} \mid t \leq 0 \}.$$

Die Differenz $Tu(t) - Tv(t)$ hat die Form

$$\begin{aligned} Tu(t) - Tv(t) &= \int_0^t e^{P^+ A(t-s)} P^+ (g(u(s)) - g(v(s))) ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t e^{Q^+ A(t-s)} Q^+ (g(u(s)) - g(v(s))) ds. \end{aligned}$$

Übergang zu den Normen und die grundlegenden Abschätzungen ergeben

$$\begin{aligned} \|Tu(t) - Tv(t)\| &\leq ML(\eta) \left(\|P^+\| \int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} \|u(s) - v(s)\| ds \right. \\ &\quad \left. + \|Q^+\| \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} \|u(s) - v(s)\| ds \right). \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder die beiden Integrale getrennt und multiplizieren zunächst mit $\eta e^{-2\alpha t}$. Für das erste Integral erhalten wir

$$e^{-2\alpha t} \int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} e^{-2\alpha s} e^{2\alpha s} \|u(s) - v(s)\| ds \leq e^{\alpha t} \int_t^0 e^{-\alpha s} ds d^\alpha(u, v).$$

Damit ergibt sich für das erste Integral die Abschätzung

$$e^{-2\alpha t} \int_t^0 e^{3\alpha(t-s)} e^{-2\alpha s} e^{2\alpha s} \|u(s) - v(s)\| ds \leq \frac{1}{\alpha} d^\alpha(u, v).$$

Für das zweite erhalten wir

$$e^{-2\alpha t} \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s)} |u(s) - v(s)| ds.$$

Wie oben ergibt sich dafür

$$\int_{-\infty}^t e^{2\alpha(t-s)} ds d^\alpha(u, v) \leq \frac{1}{\alpha} d^\alpha(u, v).$$

Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned} d^\alpha(Tu, Tv) &\leq ML(\eta) \max\{\|P^+\|, \|Q^+\|\} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) d^\alpha(u, v) \\ &< 2 \frac{ML(\eta)}{\alpha} \max\{\|P^+\|, \|Q^+\|\} d^\alpha(u, v). \end{aligned}$$

Nach der Wahl von $L(\eta)$ ist damit

$$d^\alpha(Tu, Tv) \leq \frac{1}{2} d^\alpha(u, v)$$

und T ist eine starke Kontraktion.

3.) Sei $Tu = u$. Wir müssen zeigen, dass u die Differentialgleichung löst, und das richtige Verhalten für $t \rightarrow -\infty$ zeigt. Letzteres ist aufgrund der Definition von C^α klar. Dass u die Differentialgleichung löst, folgt aus der Invarianz der Unterräume und der Tatsache, dass man die Differentialgleichung in ein gekoppeltes System auf den Unterräumen äquivalent umschreiben kann. Wir rechnen nach $\dot{u} + \frac{d}{dt}(Tu)(t)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Ae^{P^+At} u_0 + P^+ g(u(t)) + A \int_0^t e^{P^+A(t-s)} P^+ g(u(s)) ds \\ &\quad + Q^+ g(u(t)) + A \int_{-\infty}^t e^{Q^+A(t-s)} Q^+ g(u(s)) ds. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt

$$g(u(t)) + A \left(e^{P^+ A t} u_0 + \int_0^t e^{P^+ A(t-s)} P^+ g(u(s)) ds + \int_{-\infty}^t e^{Q^+ A(t-s)} Q^+ g(u(s)) ds \right) = Au(t) + g(u(t)).$$

□

Bemerkung 4.1.12 Die dritte Aussage, die wir im ersten Satz über Spektrum und Stabilität (im linearen Fall) gemacht haben, hat keine Übertragung auf die gegenwärtige Situation. Hat A Eigenwerte auf der imaginären Achse, so kann u_0 asymptotisch stabil, stabil aber nicht asymptotisch stabil oder auch instabil sein. Drei triviale Fälle, die dies erläutern, sind $\dot{u} = -u^3$, $\dot{u} = 0$ und schließlich $\dot{u} = u^2$. Im ersten Fall ist $u_0 = 0$ asymptotisch stabil, im zweiten stabil, aber nicht asymptotisch stabil, und im dritten Fall instabil.

Definition 4.1.13 Sei $\dot{u} = f(u)$ wie im Satz und w_0 eine Ruhelage, so dass $A = Df(w_0)$ keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat, so nennt man die Ruhelage hyperbolisch.

Diesen Begriff motiviert das Phasenporträt der Gleichung $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$, die man kurz in der Form $\dot{z} = \bar{z}$ schreibt.

Beispiel 4.1.14 (Lorenz Gleichungen) Wir betrachten das dreidimensionale System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Dabei seien b, r, σ drei positive reelle Zahlen. Für Ruhelagen erhält man aus der ersten Gleichung $x = y$. Damit ergibt die zweite Gleichung $(r - 1 - z)x = 0$. Die Lösungen dieser Gleichungen sind $x = 0$ oder $z = 1 - r$. Mit der dritten Gleichung erhält man schließlich $x^2 = bz$. Damit ergibt sich als Lösung $x = y = z = 0$ oder

$$x = y, \quad z = 1 - r, \quad x = \pm \sqrt{b(r - 1)}.$$

Damit erkennt man, dass die nichttriviale Lösung nur für $r > 1$ existiert. Für $r < 1$ hat man also nur die triviale Lösung $x = y = z = 0$, und für $r > 1$

hat man neben dieser trivialen Lösung noch zwei weitere Lösungen. Wir werden die Stabilität der trivialen Lösung ausrechnen. Als Linearisierung bei $x = y = z = 0$ ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Das Spektrum kann man leicht ausrechnen: Man hat einen Eigenwert $-b < 0$. Um die Vorzeichen der anderen beiden zu diskutieren, betrachten wir

$$\det A = \sigma(1 - r) \text{ und } \operatorname{tr} A = -1 - \sigma < 0.$$

Also ist für $r < 1$ die triviale Ruhelage asymptotisch stabil. Bei $r = 1$, dort wo weitere Lösungen entstehen, verliert diese Lösung die Stabilität, sie wird instabil. Um die Stabilität der neuen Ruhelagen zu bekommen, geben wir zunächst die Linearisierung A von f in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) an:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Die charakteristische Gleichung für diese Eigenwerte lautet

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Man rechnet nach, dass für

$$r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

alle Realteile für die nichttriviale Lösung negativ sind. Für $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$ hat man die Stabilität für $1 < r < \frac{470}{19}$. Dort werden auch die nichttrivialen Lösungen instabil. Weitere interessante Phänomene treten auf.

Beispiel 4.1.15 Ist w_0 eine Ruhelage einer autonomen Differentialgleichung und gibt es eine Umgebung $B_\varepsilon(w_0)$, so dass für jedes $u_0 \in B_\varepsilon(w_0)$ gilt $\omega(u_0) = w_0$, so folgt nicht, dass w_0 asymptotisch stabil ist. Man beachte, dass bei der Definition der asymptotischen Stabilität die Stabilität gefordert wurde. Ein Beispiel für dieses Phänomen liefert Aufgabe 3, Blatt 10. In Abbildung 4.2 sehen wir ein qualitatives Phasenportrait, das das beschriebene Phänomen illustriert.

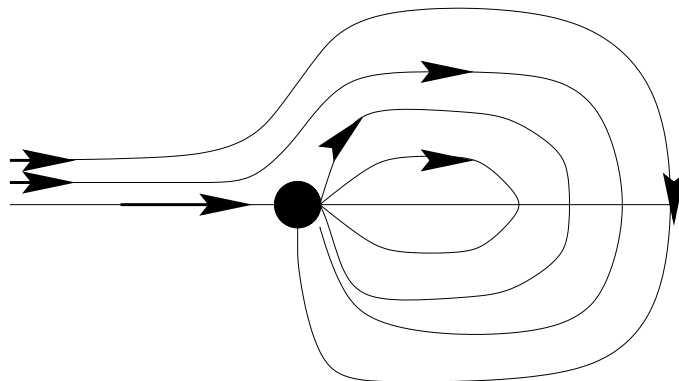


Abbildung 4.2: Ein Beispiel einer attraktiven Ruhelage, die nicht asymptotisch stabil ist. Typisch ist das Auftreten von homoklinen Orbits.

4.2 Periodische Orbits in diskreten Systemen

In diesem kurzen Abschnitt betrachten wir periodische Orbits diskreter dynamischer Systeme. Wir untersuchen zunächst Stabilität und danach betrachten wir das Verhalten bei Stabilitätsverlust in parameterabhängigen Systemen.

In diesem Abschnitt sei (M, d) ein metrischer Raum, (M, d, f) ein diskretes dynamisches System. Wir nehmen an, es gibt ein (minimales) $p \geq 1$ und ein $x_0 \in U$ mit $f^{(p)}(x_0) = x_0$.

Definition 4.2.1 Der Orbit $\mathcal{O}_f(x_0)$ heißt *periodisch mit (minimaler) Periode p* .

Einen solchen periodischen Orbit nennen wir (asymptotisch) stabil, wenn $\mathcal{O}_f(x_0)$ als kompakte invariante Menge (asymptotisch) stabil ist. In diesem Fall können wir ein Stabilitätskriterium angeben, das nur von einem einzigen Punkt abhängt.

Satz 4.2.2 Sei (M, d) ein metrischer Raum, $f : M \rightarrow M$ stetig. Es sei $x_0 \in M$ mit $f^{(p)}(x_0) = x_0$, p minimal mit dieser Eigenschaft, $K = \{f^{(k)}(x_0) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Die folgenden Aussagen sind paarweise äquivalent:

1. x_0 ist als Fixpunkt des dynamischen Systems $(M, d, f^{(p)})$ (asymptotisch) stabil.

2. Ist $x \in \mathcal{O}_f(x_0)$, so ist x Fixpunkt von $f^{(p)}$ und als solcher (asymptotisch) stabil.
3. Die kompakte invariante Menge K ist (asymptotisch) stabil für (M, d, f) .

Beweis. Wir zeigen zunächst (1) $\Rightarrow$ (2): Sei x_0 stabiler Fixpunkt von $f^{(p)}$ und $x \in \mathcal{O}_f(x_0)$, k minimal mit der Eigenschaft $f^{(k)}(x_0) = x$. Dann ist (trivialerweise) $f^{(p)}(x) = f^{(k+p)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) = x$. Angenommen x_0 ist stabil, dann gibt es zu einer offenen Umgebung U von x_0 eine offene Umgebung V von x_0 , so dass für jedes $y \in V$ gilt

$$\mathcal{O}_{f^{(p)}}(y) \subset U.$$

Sei $\tilde{U}$ eine offene Umgebung von x . Wegen der Stetigkeit von f ist $U = (f^{(k)})^{-1}(\tilde{U})$ eine offene Umgebung von x_0 und V sei die zugehörige Umgebung von x_0 . Wegen $f^{(p-k)}(x) = f^{(p-k)}(f^{(k)}(x_0)) = x_0$ ist $\tilde{V} = (f^{(p-k)})^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x . Dann ist für $v \in \tilde{V}$, $y = f^{(p-k)}(w) \in V$ und damit $\mathcal{O}_{f^{(p)}}(y) \subset U$. Also ist für $j > 1$

$$f^{jp}(v) = f^{(k)}(f^{((j-1)p)}(f^{(p-k)}(v))) = f^{(k)}(f^{((j-1)p)}(w)) \in f^{(k)}(U) \subset \tilde{U}.$$

Also ist x stabil. Ist x_0 zusätzlich asymptotisch stabil, so gibt es eine Umgebung W von x_0 mit $y \in W$ impliziert $\omega_{f^{(p)}}(y) = \{x_0\}$, d.h. $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{(jp)}(y) = x_0$. Setze $\tilde{W} = (f^{(p-k)})^{-1}(W)$. Dies ist eine offene Umgebung von x . Dann ist für $w \in \tilde{W}$

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} f^{(jp)}(w) &= \lim_{j \rightarrow \infty} f^{(k)}(f^{((j-1)p)}(f^{(p-k)}(w))) = f^{(k)}\left(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{((j-1)p)}(f^{(p-k)}(w))\right) \\ &= f^{(k)}(x_0) = x. \end{aligned}$$

Also ist x auch asymptotisch stabil.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei zunächst jeder Punkt im Orbit von x_0 stabil, und U eine offene Umgebung von K . Dann gibt es zu einem $x \in K$ eine Umgebung W_x , so dass für $w \in W_x$ gilt $\mathcal{O}_{f^{(p)}}(w) \subset U$. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ eine Umgebung $V_x \subset W_x$, so dass für $r \in \{1, \dots, p-1\}$ $f^{(r)}(V_x) \subset W_{f^{(r)}(x)}$. Setze

$$V = \bigcup_{i=1}^{p-1} V_x.$$

Dies ist eine Umgebung von K und für $v \in V$ und $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(v) = f^{(r+jp)}(v) \in O_{f^{(p)}}(f^{(r)}v) \subset U.$$

Ist zusätzlich jeder Punkt in K asymptotisch stabil für $f^{(p)}$. Sei V_x eine offene Umgebung, von $x \in K$ mit $v \in V_x$ impliziert

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{(jp)}(v) = x.$$

Nun ist

$$V = \bigcup x \in KV_x$$

offen (als endliche Vereinigung offener Mengen) und für $v \in V$ und eine streng monotone unbeschränkte Folge $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gilt dann

$$d_k = m_k p + r_k$$

wobei $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine monotone unbeschränkte Folge ist und $r_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ist. Dann ist für $v \in V$, $v \in V_x$ für ein $x \in K$ und die $f^{m_k p}(v) \rightarrow v$ für $k \rightarrow \infty$. Dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^{(d_k)}(v), V) = 0$$

und $\omega_f(v) \subset K$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei U eine offene Umgebung von K . K ist eine endliche Menge, daher gibt es ein $\varepsilon' > 0$, so dass für $x \in K$ gilt $B_{\varepsilon'}(x) \cap K = \{x\}$. Sei $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$ und für $x \in K$ $U_\varepsilon(x) = U \cap B_\varepsilon(x)$. Setze

$$U_\varepsilon = \bigcup_{x \in K} U_\varepsilon(x).$$

Dann ist U_ε offen und $K \subset U_\varepsilon$. Sei $V_\varepsilon \subset U_\varepsilon$ offen, mit $v \in V_\varepsilon$ impliziert $\mathcal{O}_f(v) \subset U_\varepsilon$. Eine solche offene Menge existiert aufgrund der Stabilität von K . Für $x \in K$ sei $V_\varepsilon(x)$ die Zusammenhangskomponente von x in $V_\varepsilon \cap B_\varepsilon(x)$. Dann ist für $v \in V_\varepsilon(x)$ der Orbit $\mathcal{O}_f(v) \subset U_\varepsilon$. Da für $0 \leq r < p$ $f^{(r+jp)}(V_\varepsilon(x))$ zusammenhängend ist und den Punkt $f^{(r+jp)}(x)$ enthält, gilt $f^{(r+jp)}(v) \in U_\varepsilon(f^{(r)}(x))$. Insbesondere ist

$$\mathcal{O}_{f^{(p)}}(v) \subset U_\varepsilon(x).$$

Damit ist die Stabilität von $x \in K$ bzgl. $f^{(p)}$ gezeigt. Ist K zusätzlich attraktiv, so gibt es eine Umgebung V von K mit $v \in V$ impliziert $\omega(v) \subset K$.

Setzen wir für $x \in K$ wieder $V_\varepsilon(x)$ wie im Beweisschritt zuvor, so folgt für $v \in V_\varepsilon(x)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{(jp)}(v) = x.$$

□

4.3 Periodische Orbits und Floquettheorie

4.3.1 Periodische Orbits und Variationsgleichung

Sei wieder $\dot{u} = f(u)$ die autonome Differentialgleichung (??) mit einer Lipschitz stetigen rechten Seite. In diesem Abschnitt betrachten wir einen geschlossenen Orbit $\mathcal{O}$ für (??) und eine Lösung $u(t)$ in diesem Orbit. Wie im vorigen Abschnitt für eine Ruhelage wollen wir auch hier den Begriff der Stabilität definieren und Kriterien für verschiedene Formen der Stabilität angeben. Hier ist die Situation naturgemäß etwas komplizierter als im Fall einer Ruhelage.

Definition 4.3.1 *Der geschlossene Orbit $\mathcal{O}$ heißt orbital stabil, wenn $\mathcal{O}$ als Menge stabil im Sinne der Definition ?? ist. Er wird als orbital asymptotisch stabil bezeichnet, wenn er stabil und attraktiv im Sinne der Definition ?? ist. Man nennt u orbital asymptotisch stabil mit asymptotischer Phase, wenn $\mathcal{O}$ asymptotisch stabil ist und es eine Umgebung U von $\mathcal{O}$ gibt, so dass zu jedem Anfangswert $u_0 \in U$ eine Zahl $T(u_0)$ gibt, so dass*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t - T(u_0)) - u(t, t_0)| = 0$$

ist.

Ein geometrischer Zugang zur Stabilitätstheorie periodischer Lösungen geht auf Poincaré zurück. Zunächst konstruiert man sich den sogenannten Poincaré Schnitt und die Poincaré Abbildung. Dabei geht man von der Beobachtung aus, dass jeder Punkt auf einem geschlossenem Orbit regulärer Punkt ist und somit eine Transversale existiert.

Lemma 4.3.2 *Sei L eine Transversale zum Lipschitz stetigen Vektorfeld f in einem Punkt u_0 auf einem geschlossenem Orbit $\mathcal{O}$. Dann gibt es eine Umgebung U_0 von u_0 , so dass zu jedem Punkt $v \in U_0 \cap L$ ein $t_v > 0$ existiert, so dass $u(t_v, v) \in L$ ist, aber für $t \in (0, t_v)$ die Lösung $u(t, v) \notin L$ ist.*

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz über stetige Abhängigkeit von Anfangswerten. $\square$

Definition 4.3.3 Eine Transversale L , wie sie im vorherigen Lemma angegeben war, heißt Poincaré Schnitt. Die Abbildung $\Pi : L \cap U_0 \rightarrow L : v \mapsto u(t_v, v)$ nennt man Poincaré Abbildung oder auch Wiederkehrabbildung, engl. return map.

Ein alternativer Beweis von Lemma 4.3.2 beruht auf dem Satz über implizite Funktionen, damit erhält man auch eine etwas stärkere Aussage.

Satz 4.3.4 Ist $f \in C^1(U)$, so existiert eine Umgebung U_0 von u_0 , so dass $\Pi : L \cap U_0 \rightarrow L$ stetig differenzierbar ist.

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz über implizite Funktionen: Man wähle eine affin lineare Transversale $u_0 + H$, so ist für jeden Punkt v nahe u_0 der affine Raum $v + H$ eine Transversale und man hat eine stetig differenzierbare Abbildung π einer Umgebung V nach $\mathcal{O}$ durch

$$u + H \ni v \mapsto u.$$

Wir betrachten für w nahe u_0 und t nahe t_{u_0} die Abbildung $Q(w, t) = \pi \circ \Phi(w, t)$, wobei Φ der zu f gehörende Fluß ist. Dann ist Q stetig differenzierbar, $Q(u_0, t_{u_0}) = u_0$ und

$$Q_t(u_0, t_{u_0}) = D_w \pi \circ \Phi_t(u_0, t_{u_0}) = D_w \pi f(u_0) \neq 0.$$

Damit garantiert der Satz über implizite Funktionen die lokale Lösbarkeit der angegebenen Gleichung und damit die Behauptung des Satzes. $\square$

Die Poincaré Abbildung gibt uns ein einfaches geometrisches Kriterium für die Stabilität einer periodischen Lösung, das auch für theoretische Untersuchungen von Bedeutung ist.

Satz 4.3.5 Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig, $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$, u_0 ein (regulärer) Punkt auf $\mathcal{O}$. Sei L ein Poincaré Schnitt mit Poincaré Abbildung Π . Dann gilt:

1. Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, dass $w \in L$ und $|w - u_0| < \delta$ implizieren, so dass die Iterierten $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind und gilt $|\Pi^n(w) - u_0| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathcal{O}$ orbital stabil.

2. Ist $\mathcal{O}$ orbital stabil und gibt es eine Umgebung U_1 von u_0 , so dass aus $w \in U_1$ folgt, dass $\Pi^n(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist und für $n \rightarrow \infty$ gegen u_0 konvergiert, so ist $\mathcal{O}$ orbital asymptotisch stabil.
3. Gibt es ein w , so dass $\Pi^{-n}(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren und gegen u_0 für $n \rightarrow -\infty$ konvergieren so ist $\mathcal{O}$ instabil.

Beweis. Folgt offensichtlich aus der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten! Beachte, dass es eine Umgebung gibt, auf der die Rückkehrzeit durch $2t_{u_0} \geq t_w \geq \frac{1}{2}t_{u_0}$ nach oben bzw. unten beschränkt ist! $\square$

Um ein eher algebraisches Kriterium zu erhalten, müssen wir uns noch einmal Gedanken über Übergangsmatrizen machen.

Definition 4.3.6 Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, in der ersten Komponente Lipschitz stetig mit $f(0, t) = 0$. Die Ruhelage $u = 0$ der Gleichung (??) nennt man stabil, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass aus $|u_0| < \delta$ folgt, dass $|u(t, t_0, u_0)| < \varepsilon$ für alle $t > t_0$. Kann δ unabhängig von t_0 aus einer Menge $S \subset \mathbb{R}$ gewählt werden, so spricht man von gleichmäßiger Stabilität bezüglich S . Entsprechend definiert man asymptotisch stabil, wenn es ein $\delta_1(t_0) > 0$ gibt, so dass aus $|u_0| < \delta_1(t_0)$ folgt $u(t, t_0, u_0) \rightarrow 0$. Man nennt u_0 instabil, wenn es nicht stabil ist. Bei der Definition gleichmäßiger asymptotischer Stabilität (bezüglich S) verlangt man, dass 0 stabil und asymptotisch stabil ist und die Zahl $\delta_1 = \delta_1(t_0)$ unabhängig von $t_0 \in S$ gewählt werden kann und schließlich zu jeder positiven Zahl $\eta > 0$ eine Zeit $T(\eta)$ gefunden werden kann, so dass für alle $t > t_0$ $|u(t + T(\eta), t_0, u_0)| < \eta$ für alle $t_0 \in S$ und alle u_0 mit $|u_0| < \delta_1$ ist. Man überträgt diese Begriffe auf beliebige Lösungen, indem man für eine Lösung $u(t)$ das System $\dot{y} = f(u(t) + y, t) - f(u(t), t)$ betrachtet.

Lemma 4.3.7 Alle Lösungen von $\dot{u} = A(t)u$ haben die gleichen Stabilitätseigenschaften.

Beweis. Folgt aus der Linearität. $\square$

Bemerkung 4.3.8 Aus diesem Grunde sagt man auch, das System (??) $\dot{u} = A(t)u$ ist stabil, asymptotisch stabil oder instabil.

Satz 4.3.9 Sei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig. Sei $\Psi(t)$ eine Fundamentalmatrix für $\dot{u} = A(t)u$ und β sei eine beliebige reelle Zahl. Dann ist das System $\dot{u} = A(t)u$

1. stabil, genau dann wenn es zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Konstante $K(t_0)$ gibt mit $\|\Psi(t)\| \leq K(t_0)$ für alle $t \geq t_0$,

2. gleichmäßig stabil für $t_0 \geq \beta$, genau dann wenn es eine Konstante $K(\beta)$ gibt, so dass für $t_0 \geq \beta$ und $t_0 \leq s \leq t$ gilt

$$\|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\| \leq K(\beta),$$

3. asymptotisch stabil genau dann, wenn

$$\|\Psi(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

4. gleichmäßig asymptotisch stabil für $t_0 \geq \beta$ genau dann, wenn es Konstanten $K = K(\beta) > 0$, $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ gibt mit

$$\|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \text{ für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Beweis. 1.) Die Rückrichtung folgt einfach aus der Darstellung der Lösung: Sei $u(t)$ eine Lösung, so ist $u(t) = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u(t_0)$. Sei $M = |\Psi(t_0)^{-1}|$. Dann ist $|u(t)| \leq K(t_0)M |u(t_0)|$. Wählt man $\delta = \frac{\varepsilon}{K(t_0)M}$, so hat man die Stabilitätsbedingung erfüllt. Die Hinrichtung ist auch nahezu offensichtlich: Stabilität besagt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $|u_0| < \delta$ die Norm $|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u_0| < \varepsilon$ beschränkt bleibt. Angenommen es gäbe Folgen u_ν , t_ν , so dass

$$\Psi(t_\nu)u_\nu \rightarrow_{\nu \rightarrow \infty} \infty$$

konvergiert. Dann hat $\tilde{u}_\nu = \frac{1}{2}\delta \frac{1}{|\Psi(t_0)u_\nu|} \Psi(t_0)u_\nu$ die Norm $\frac{\delta}{2}$ und $|\Psi(t_\nu)\Psi(t_0)^{-1}\tilde{u}_\nu| \geq \varepsilon$ für genügend großes ν .

2.) Beide Richtungen können wie im ersten Teil durchgeführt werden, hier hängt δ für $t_0 \geq \beta$ nicht von t_0 ab.

3.) Als erstes folgt aus der Abklingbedingung die Beschränktheit von $\|\Psi(t)\|$ und damit die Stabilität. Die Asymptotik erhält man wie im ersten Beweisschritt. Die Umkehrung folgt auch wie oben.

4.) Ist die angegebene Bedingung erfüllt, so konvergiert $\|\Psi(t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und aus 2.) folgt die Stabilität. Aus dem dritten Schritt erhält man die asymptotische Stabilität. Sei $|u(t_0)| \leq 1$ und $\eta \in (0, K)$. Setze

$$T = -\frac{\log(\eta/K)}{\alpha}.$$

Dann ist für $t \geq t_0 + T$, $t' = t - (T + t_0) > 0$

$$|u(t)| = |\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u(t_0)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|u(t_0)| = Ke^{-\alpha T}e^{-\alpha t'}|u(t_0)| < Ke^{-\alpha T} = \eta.$$

Hier ist die Umkehrung schwieriger. Wir nehmen also an, dass die Nulllösung gleichmäßig asymptotisch stabil für $t_0 \geq \beta$ ist. Insbesondere existiert ein $b > 0$, so dass zu jedem $\eta < b$ ein $T = T(\eta)$ existiert mit

$$|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}u(t_0)| \leq \eta, \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 > \beta, \quad |u(t_0)| < b.$$

Daher ist (warum kann man so abschätzen?)

$$\|\Psi(t+T)\Psi(t_0)^{-1}\| < \frac{\eta}{b} < 1 \quad \text{für } t \geq t_0 \geq \beta.$$

Aufgrund der Definition von gleichmäßiger asymptotischer Stabilität gilt eine entsprechende Abschätzung für alle $t \geq \beta$, d.h.

$$\|\Psi(t+T)\Psi(t)^{-1}\| < \frac{\eta}{b} < 1 \quad \text{für } t \geq \beta.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stabilität existiert ein $M = M(\beta)$ mit

$$\|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\| \leq M, \quad \text{für } \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Setze

$$\alpha = -T^{-1} \log\left(\frac{\eta}{b}\right)$$

und

$$K = Me^{\alpha T}.$$

Dann gibt es zu jedem $t \geq t_0$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $kT \leq t - t_0 < (k+1)T$. Daher gilt dann

$$\begin{aligned} \|\Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}\| &= \|\Psi(t)\Psi(t_0 + kT)^{-1}\Psi(t_0 + kT)\Psi(t_0)^{-1}\| \\ &\leq \|\Psi(t)\Psi(t_0 + kT)^{-1}\| \|\Psi(t_0 + kT)\Psi(t_0)^{-1}\| \\ &\leq M \|\Psi(t_0 + Tk)\Psi(t_0)^{-1}\| \\ &\leq M \|\Psi(t_0 + Tk)\Psi(t_0 + (k-1)T)^{-1}\Psi(t_0 + (k-1)T)\Psi(t_0)^{-1}\| \\ &\leq M \frac{\eta}{b} \|\Psi(t_0 + (k-1)T)\Psi(t_0)^{-1}\| \\ &\vdots \\ &\leq M \left(\frac{\eta}{b}\right)^k \\ &\leq Me^{-\alpha kT} \\ &= Ke^{-\alpha(k+1)T} \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)} \end{aligned}$$

Dies vervollständigt den Beweis. $\square$

Wir betrachten nun die homogene, lineare Gleichung

$$\dot{u} = A(t)u \quad (4.8)$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\exists T > 0 \text{ mit } A(t+T) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ oder $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ eine stetige Abbildung ist. Der Zusammenhang mit periodischen Lösungen wird in Kürze klar werden.

Lemma 4.3.10 *Zu jeder komplexen $n \times n$ Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $\det A \neq 0$ gibt es eine Matrix $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ mit $e^B = E(B, 1) = A$.*

Beweis. Ist $e^B = A$, so gilt für jede nichtsinguläre Matrix C

$$e^{C^{-1}BC} = C^{-1}AC.$$

Daher ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass A in Jordan'scher Normalform gegeben ist. Also hat A die Gestalt (2.3) mit Jordan Blöcken der Form (2.4). Jeden Block der Form (2.4) schreiben wir in der Gestalt

$$\mathcal{B}_k = \lambda_k \mathbb{1} + N_k,$$

wobei N_k der nilpotente Anteil ist. Aufgrund der Annahme, dass die Determinante von A von Null verschieden ist, ist auch $\lambda_k \neq 0$. Wir geben nun eine Matrix B_k an, so dass $e^{B_k} = \mathcal{B}_k$ ist. Wir schreiben $\mathcal{B}_k$ in der Form $\mathcal{B}_k = \lambda_k(\mathbb{1} + \frac{1}{\lambda_k}N_k)$. Dann ist (für einen geeigneten Zweig des Logarithmus) $B_k = (\log \lambda_k)\mathbb{1} + S_k$ mit

$$S_k = - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j \lambda^j} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}^j.$$

Einsetzen in die Potenzreihe gibt das gewünschte Resultat. $\square$

Bemerkung 4.3.11 Man beachte, dass Lemma 4.3.10 nicht für $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\det A \neq 0$ gilt.

4.3.2 Floquetmultiplikatoren

Satz 4.3.12 (Floquet) Sei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ stetig und T -periodisch. Jede Fundamentalmatrix der Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ hat die Form

$$\Psi(t) = P(t)E(B, t),$$

wobei B eine konstante und P eine T -periodische Matrix ist.

Beweis. Ist $\Psi(t)$ eine Fundamentalmatrix, so ist $\Psi(t+T)$ auch eine Fundamentalmatrix. Daher gibt es eine nichtsinguläre Matrix C , so dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\Psi(t+T) = \Psi(t)C$$

gilt. C hat dann aufgrund der Flußeigenschaft die Darstellung $C = \Psi(T)$. Nach Lemma 4.3.10 gibt es eine Matrix B mit $e^{TB} = C$. Setze

$$P(t) = \Psi(t)E(B, -t).$$

Dann hat man

$$P(t+T) = \Psi(t+T)E(B, -(t+T)) = \Psi(t)E(B, T)E(B, -(t+T)) = P(t).$$

□

Korollar 4.3.13 (Transformation auf konstante Koeffizienten)

Zu T -periodischem $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gibt es eine nichtsinguläre periodische Koordinatentransformation $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, welche die Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ in eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten überführt.

Beweis. Seien P, B wie im Satz 4.3.12. Wir setzen $w = (P(t))^{-1}u$. Die Differentialgleichung für w ist dann mit

$$\frac{d}{dt}P(t)w = \dot{P}w + P\dot{w} = \dot{u} = Au$$

und damit

$$\dot{w} = P(t)^{-1}(A(t)P(t) - \dot{P}(t))w.$$

Da $P(t) = \Psi(t)E(B, -t)$ ist, hat man $\dot{P} = A(t)P(t) - P(t)B$. Einsetzen gibt

$$\dot{w} = P(t)^{-1}(A(t)P(t) - A(t)P(t) + P(t)B) = Bw.$$

Die rechte Seite hängt nicht von t ab.

□

Definition 4.3.14 Gegeben sei das homogene, lineare System (??) $\dot{u} = A(t)u$ mit T -periodischem $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann heißt eine Matrix C , die für eine Fundamentalmatrix $\Psi(t)$ des angegebenen Systems der Beziehung

$$\Psi(t+T) = \Psi(t)C$$

genügt, eine Monodromiematrix von (??). Die Eigenwerte ρ_j einer Monodromiematrix heißen charakteristische Multiplikatoren oder auch Floquetmultiplikatoren³ von (??). Ist ρ ein charakteristischer Multiplikator und $\rho = e^{\lambda T}$, so wird λ als charakteristischer Exponent oder Floquetexponent bezeichnet.

Lemma 4.3.15 Eine komplexe Zahl λ ist charakteristischer Exponent der Gleichung (??) mit einer T -periodischen rechten Seite A , falls das System (??) eine nichttriviale Lösung $p(t)e^{\lambda t}$ besitzt, wobei p periodisch mit Periode T ist. Speziell gibt es genau dann eine nichttriviale Lösung $u(t)$ mit Periode T (bzw. $2T$), wenn es den Multiplikator 1 (bzw. -1) gibt.

Beweis. Sei $e^{\lambda t}p(t)$ eine solche Lösung. Dann gibt es ein u_0 und eine Fundamentalmatrix $\Psi(t)$ mit $e^{\lambda t}p(t) = \Psi(t)u_0$. Nach dem Satz von Floquet 4.3.12 kann $\Psi(t)$ in der Form $P(t)E(B, t)$ geschrieben werden. Also ist $e^{\lambda t}p(t) = P(t)E(B, t)u_0$. Da $P(t+T) = P(t)$ und $p(t+T) = p(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, hat man

$$e^{\lambda(t+T)}p(t+T) = P(t+T)E(B, t+T)u_0,$$

und daher ist

$$e^{\lambda t}e^{\lambda T}p(t) = P(t)E(B, t)E(B, T)u_0.$$

Also gilt

$$e^{\lambda T}P(t)E(B, t)u_0 = P(t)E(B, t)E(B, T)u_0.$$

Zusammen genommen ist

$$P(t)E(B, t) (E(B, T) - e^{\lambda T}) u_0 = 0.$$

³Achille Marie Gaston Floquet (15.12.1847-7.10.1920) war ab 1873 Professor in Belfort, Angers und Clermont-Ferrand ab 1890 Professor für Analysis an der Universität Nancy. Er beschäftigte sich mit Astronomie, Differentialgleichungen und periodischen Funktionen.

Daher ist $\det(E(B, T) - e^{\lambda T} \mathbb{1}) = 0$. Für die Umkehrung beachtet man einfach, dass aus dem Verschwinden von $\det(E(B, T) - e^{\lambda T})$ die Existenz eines Vektors u_0 folgt mit

$$(E(B, T) - e^{\lambda T}) u_0 = 0.$$

Man kann sogar λ und u_0 so wählen, dass λ Eigenwert von B ist. Dann ist

$$E(B, t)u_0 = e^{\lambda t}u_0,$$

und $P(t)E(B, t)u_0$ ist die gewünschte Lösung. $\square$

Lemma 4.3.16 Seien $\rho_j = e^{\lambda_j T}$ die charakteristischen Multiplikatoren. Dann ist

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = \exp \left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \right)$$

und

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \bmod \left(\frac{2\pi i}{T} \right).$$

Beweis. Sei $\Psi(t)$ die Fundamentalmatrix mit Anfangswert $\Psi(0) = \mathbb{1}$. Dann ist

$$\det C = \det \Psi(T) = \exp \left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s) ds \right).$$

Daraus folgt alles weitere. $\square$

Als Hauptsatz über lineare periodische Systeme ergibt sich

Satz 4.3.17 (a) Das lineare, homogene periodische System $\dot{u} = A(t)u$ ist genau dann stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren betragsmäßig kleiner oder gleich eins sind und die, die dem Betrage nach eins sind, gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen.

(b) Das System ist genau dann gleichmäßig asymptotisch stabil, wenn alle charakteristischen Multiplikatoren dem Betrage nach kleiner eins sind. In diesem Fall kann man eine Fundamentalmatrix abschätzen:

$$\exists K > 0, \alpha < 0 \text{ mit } t - s \geq 0 \implies \|\Psi(t)\Psi(s)^{-1}\| \leq K e^{-\alpha(t-s)}.$$

Beweis. Benutzt im wesentlichen die Ideen wie im autonomen Fall. $\square$

Als Stabilitätskriterium für geschlossene Orbits erhält man schließlich den

Satz 4.3.18 *Sei $\mathcal{O}$ ein geschlossener Orbit der autonomen Gleichung $\dot{u} = f(u)$, wobei die rechte Seite als genügend glatt vorausgesetzt werde. Dann ist $\mathcal{O}$ genau dann orbital stabil, wenn das lineare homogene periodische System*

$$\dot{y} = Df(u(t))y, \quad (4.9)$$

stabil ist, wobei $u(t)$ eine Lösung im Orbit $\mathcal{O}$ ist.

Ohne vollständigen Beweis wollen wir noch ein Kriterium für orbital asymptotische Stabilität angeben.

Satz 4.3.19 *$\mathcal{O}$ ist genau dann orbital asymptotisch stabil, wenn (4.9) stabil ist, 1 charakteristischer Multiplikator mit algebraischer Vielfachheit 1 ist und alle von 1 verschiedenen charakteristischen Multiplikatoren dem Betrage nach kleiner als 1 sind.*

Beweis. (Skizze)

1. Die Eigenwerte von $D_u\Pi(u_0)$ sind gerade die charakteristischen Multiplikatoren, wobei die Vielfachheit von 1 um eins verringert ist.
2. Man benötigt das dem Satz 4.1.4 vom Spektrum und Stabilität Π entsprechende Stabilitätskriterium für Abbildungen, dies wiederum entspricht der Aussage von Satz 4.1.4, nur ist jeweils $\operatorname{Re}\lambda <=> 0$ durch $|\lambda| <=> 1$ zu ersetzen.

$\square$

4.4 Ljapunov-Funktionen

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Bestimmung der Stabilität von Lösungen sind sogenannte Ljapunov-Funktionen. Sie verallgemeinern erste Integrale.

Definition 4.4.1 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige Funktion. Eine Funktion $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt erstes Integral, falls w längs Lösungen der Gleichung $\dot{u} = f(u, t)$ konstant bleibt.*

Kennt man eine hinreichende Zahl von (linear unabhängigen) ersten Integralen, so kann man die Differentialgleichung als gelöst ansehen. Eine wichtige Klasse von Systemen mit erstem Integral sind Hamiltonsche Systeme. Die Hamilton-Funktion H ist bereits das erste Integral.

Definition 4.4.2 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, f Lipschitz stetig auf U . Wir betrachten die Gleichung $\dot{u} = f(u)$. Sei $W \subset U$ offen. Eine Funktion $V : C^0(W, \mathbb{R})$ heißt Ljapunov Funktion auf W zu $\dot{u} = f(u)$, falls alle partiellen Ableitungen von V existieren und für alle $w \in W$ gilt

$$\langle \nabla V(w), f(w) \rangle \leq 0.$$

Eine unmittelbare Konsequenz dieser Forderung ist, dass für alle $w \in W$ gilt

$$\frac{d}{dt} V(u(t, u_0))|_{t=0} \leq 0.$$

Ist $W = U$, so gilt für jede Lösung $\frac{d}{dt} V(u(t)) \leq 0$.

Satz 4.4.3 Wir betrachten $\dot{u} = f(u)$ mit Ruhelage $u = 0$. Gibt es eine Umgebung W von 0 und eine Ljapunov-Funktion V auf W mit $V \geq 0$ und $V(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, so ist u stabil. Ist $\dot{V}(u)|_{t=0} < 0$ für $u > 0$, so ist 0 asymptotisch stabil.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Stabilitätsaussage. Zu zeigen ist also, dass zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass aus $|u_0| < \delta$ folgt, dass das maximale Existenzintervall vorwärts unbeschränkt ist und für alle $t \geq 0$ gilt $|u(t, u_0)| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und $\varepsilon > \eta > 0$ gegeben. Es existiert eine Umgebung $B_\tau(0)$ mit

$$V(B_\tau(0)) \subset [0, \eta).$$

Sei

$$\mu = \inf \{V(x) \mid |x| = \tau\}$$

und $r < \mu$. Dann ist die Zusammenhangskomponente von $V^{-1}[0, r)$ in $B_\tau(0)$ enthalten. Ist nun $\delta < \tau$, so ist für $u_0 \in B_\delta(0)$ die Lösung auf ihrem maximalen Existenzintervall in $B_\varepsilon(0)$ enthalten. Damit ist dieses Existenzintervall unbeschränkt und die Aussage gezeigt. Um zu zeigen, dass die eben gemachte Aussage gilt, wollen wir $V(t) = V(u(t, u_0))$ betrachten. Es gilt $V(0) = V(u_0) < r < \mu$. Angenommen, es gibt ein t_0 mit

$V(t_0) = \varepsilon$, dann gibt es ein $0 < t_1 < t_0$ mit $V(t_1) = \mu$. Wegen $\dot{V} \leq 0$ und $V(t_1) = \mu < \varepsilon = V(t_0)$ erhalten wir einen Widerspruch.

Im zweiten Fall müssen wir noch zeigen $u(t, u_0) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann ist klar, $V(t)$ ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent. Angenommen $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = c > 0$. Dann ist $\omega(u_0)$ nichtleer und $0 \notin \omega(u_0)$. Dann ist V konstant auf $\omega(u_0)$. Enthält $\omega(u_0)$ einen regulären Punkt, ist dort aber $\dot{V} < 0$. Also enthält $\omega(u_0)$ keinen regulären Punkt, sei x ein kritischer Punkt in $\omega(u_0)$. Aber auch dann $\dot{V}(t) = \nabla V \cdot \dot{x} = 0$ und damit $x = 0$. $\square$

Nebenbei haben wir noch gezeigt:

Korollar 4.4.4 *Unter den Voraussetzungen von Teil (a) des letzten Satzes gilt: Sei R die Menge $\dot{V} = 0$ und M die größte invariante Menge in R , so ist für jedes u_0 die Grenzmenge $\omega(u_0) \subset M$.*

Der Beweis des Satzes 5.1.3 liefert auch eine Aussage über Gradientensysteme.

Korollar 4.4.5 *Unter den Voraussetzungen von Teil (a) des letzten Satzes gilt: V ist auf Grenzmengen $\omega(u_0)$, $\alpha(u_0)$ konstant.*

Ohne Beweis wollen wir die sogenannten Umkehrsätze angeben.

Satz 4.4.6 (Umkehrsatz) *Die Existenz einer Ljapunov-Funktion mit den im Satz 4.4.3 angegebenen Eigenschaften ist notwendig für Stabilität bzw. asymptotische Stabilität einer Ruhelage.*

Beweis. Findet man z.B. im Buch von HARTMAN [13]. $\square$

Beispiel 4.4.7 1. Wir betrachten $\ddot{x} + g(x) = 0$, mit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(0) = 0$. Das System ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x).\end{aligned}$$

Setze

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds$$

und

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x).$$

Dann ist $\dot{V} = 0$ und die Ruhelage $(x, y) = 0$ stabil, falls $xg(x) > 0$.

2. Für die entsprechende Gleichung mit Dämpfung findet man asymptotische Stabilität.