

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 9

Aufgabe 33 Wir betrachten die Abbildung

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : t \mapsto \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2} \cos t \sin t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte (als Funktionen von t) und zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte $\lambda_{1,2}(t)$ in der linken Halbebene liegen.
- (b) Weisen Sie nach, dass

$$u(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \exp\left(\frac{t}{2}\right)$$

eine für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkte Lösung der Gleichung $\dot{u} = A(t)u$ ist.

Aufgabe 34 (a) Beweisen Sie, dass für eine reelle Matrix C mit $\det C \neq 0$ gilt: es gibt eine reelle Matrix B mit $E(B, 1) = C^2$.

- (b) Führen Sie aus, dass es für T -periodisches $A(t)$ immer eine $2T$ -periodische reelle Matrix und eine reelle konstante Matrix gibt mit

$$\Psi(t) = P(t)E(B, t).$$

Aufgabe 35 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, U)$. Zeigen Sie ausführlich: ist $f(x_0) = x_0$ ein Fixpunkt und gilt $\sigma(Df(x_0)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

- (a) so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ impliziert, dass $\|f^n(x) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Stabilität).
- (b) so gibt es ein $\rho > 0$, so dass $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \rho$ impliziert, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$.

Aufgabe 36 Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy. \end{aligned}$$

Begründen Sie zunächst warum dies ein Modell für zwei Spezies ist, von denen eine sich von der anderen ernährt. Untersuchen Sie dieses System auf Ruhelagen und auf periodisches Verhalten.

Wie verändert ein Eingreifen von außen auf die Beutespezies das Verhalten. Begründen Sie damit, dass das Spritzen von Insektiziden das bekämpfte Insekt auf lange Sicht begünstigt und damit ökologisch unsinnig ist.

Abgabe: 13.6.2012