

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 8

Aufgabe 29 Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$ einen Fluss auf dem Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induziert. Man bestimme für jedes σ die α - und ω -Limesmengen für alle Orbits.

Aufgabe 30 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Gegeben seien n Lösungen $u_1, \dots, u_n$ der Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$.

(a) Man zeige: Gibt es ein $\tau \in I$, so dass die Vektoren $u_1(\tau), \dots, u_n(\tau)$ linear unabhängig sind, so sind die Vektoren $u_1(t), \dots, u_n(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig. Man nennt dann $u_1(t), \dots, u_n(t)$ ein *Fundamentalsystem* und die Matrix $Y(t)$, deren Spalten aus den Vektoren $u_1(t), \dots, u_n(t)$ besteht, *Fundamentalmatrix*.

(b) Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so nennt man die reellwertige Funktion $w(t) = \det Y(t)$ die *Wronski-Determinante* von A . Man zeige: w löst die Differentialgleichung $\dot{w} = \operatorname{tr}(A)w$.

Aufgabe 31 Entscheiden Sie die folgende Aussage und belegen Sie diese mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel. Ist u_0 eine instabile Ruhelage der autonomen Differentialgleichung $\dot{u} = V(u)$, so gibt es eine Lösung $u(t)$ mit $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = u_0$.

Aufgabe 32 Wir betrachten die lineare Differentialgleichung $\dot{u} = A(t)u$, wobei $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung sei. Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$U(t) = \left\{ u(t, t_0, u_0) \mid u_0 \in U \right\}.$$

Geben Sie eine Bedingung an A an, das für alle $t \in \mathbb{R}$ das Lebesgue-Maß $\mu(U(t))$ gleich dem von U ist, also $\mu(U(t)) = \mu(U)$. Beginnen Sie mit dem Fall, dass A konstant, die Differentialgleichung also autonom ist.

Abgabe: 4.6.2012