

Übungen zu Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme Blatt 6

Aufgabe 21 (a) Gegeben sei ein autonomes global Lipschitz stetiges Vektorfeld $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass v einen Fluss erzeugt.

(b) Untersuchen Sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ und $x_0 = 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung nicht eindeutig ist.

(c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass ein lokal aber nicht global Lipschitz stetiges Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$ nicht notwendig einen Fluss erzeugt.

Aufgabe 22 (a) Für das mathematische Pendel $\ddot{u} + \sin(u) = 0$ wird $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y^2 - \cos x$ durch

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}(\dot{u}(t))^2 - \cos u(t)$$

zum Funktional auf den Lösungen der Differentialgleichung. Man zeige, dass E längs Lösungen konstant ist. Wie sehen die Niveaulinien von E aus? Entscheiden Sie, ob es periodische Punkte gibt.

(b) Betrachten Sie für $c > 0$ das gedämpfte mathematische Pendel

$$\ddot{u} + \sin(u) + c\dot{u} = 0$$

Zeigen Sie, dass $E(u)(t)$ längs Lösungen streng monoton abnimmt. Was folgt für das Langzeitverhalten?

Aufgabe 23 (a) Man zeige, dass für das dynamische System auf $[0, 1]$, das durch $f(x) = 2x \bmod 1$ gegeben ist, rationale Anfangswerte zu periodischen Orbits führen.

(b) Man zeige, dass für das dynamische System auf $[0, 1]$, das durch $f(x) = x + b \bmod 1$, gegeben ist, bei irrationalem b jeder Orbit dicht in $[0, 1]$ liegt.

Aufgabe 24 Gegeben sei das Anfangswertproblem $u' = 2t(u + 1)$, $u(0) = 0$.

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

(b) Im Beweis des Satzes von Picard und Lindelöf wurde für hinreichend kleines $\delta > 0$ gezeigt, dass

$$T : C(I_\delta, U) \rightarrow C(I_\delta, U) : u \mapsto u_0 + \int_{t_0}^t V(u(s), s) ds$$

eine starke Kontraktion ist und $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $u_{n+1} = Tu_n$ bei gegebenem $u_0 \in C(I_\delta, U)$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. Berechnen Sie für $u_0 = 0$ die Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und vergleichen Sie diese mit der in (a) gewonnenen Lösung.

Abgabe: 14.5.2012